Scanſia XXII n°139

collaz. compl.


ÆRARIUM
PHILOSOPHIÆ
MATHEMATICÆ
IHS
F. Curtus Bonon Incid.

ÆRARII PHILOSOPHIÆ MATHEMATICÆ TOMVS TERTIVS,

IN QVO

Reliqui quatuor libri elementares de planis applicati, &c.
Epilogus Planimetricus,
Breuiarium ſpeculatiuum, & practicum de curuis, & ſolidis cum facillimis, ac nouis demonſtrationibus, & Materiæ plurium Tomorum indicatæ.

Cum Indicibus viginti communibus Secundo, & Tertio huic Tomo.

BONONIÆ M.DC.XLVIII.
Typis Io. Baptiſtæ Ferronij. Superiorum permiſſu.

⁂ 2

V.D.Andreas Cuttica Sacræ Pœnitentiariæ Rector, pro Eminentiſs. ac Reuerendiſs.Card.Ludouiſio Arch. Bonon. & Principe.

Imprimatur.F.Io.Baptiſta Spadius Magiſter,pro Reuerendiſs.P.Inquiſit. Bonon.

Ego Cæſar à Boſco in Prouincià Veneta Præpoſitus Prouincialis, poteſtate ad id mihi factâ ab Admodum Reuer. P. Noſtro Vincentio Caraffa Præpoſito Generali, facultatem concedo, vt opus, quod inſcribitur: *Aerarij Philoſophiæ Mathematicæ Tomus Tertius* a Patre Mario Bettino Bononienſi è Societate noſtra conſcriptum, & trium Doctorum Virorum Noſtræ Societatis iudicio approbatum Typis mandetur, ſi ita ijs, ad quos pertinet, videbitur.

In quorum fidem has literas manu noſtra ſubſcriptas, & ſigillo noſtro munitas dedimus.

Bononiæ Kalendis Decembris, anno 1646.

Cæſar à Boſco.

Locus † Sigilli.

Eccleſiaſtici cap. 24, verſ. 31, vbi Sapientia eloquitur:

Qui elucidant me vitam æternam habebunt.

In eius præmij finem Geometricæ huiuſce Sapientiæ potior pars, ac verè ſolidior de ſolidis, antehac ſtudioſis vt plurimum inacceſſa, breuiter, nouiter, ac luculenter elucidata eſt in 2 parte huius 3 Tomi.

R E G I S T R V M —

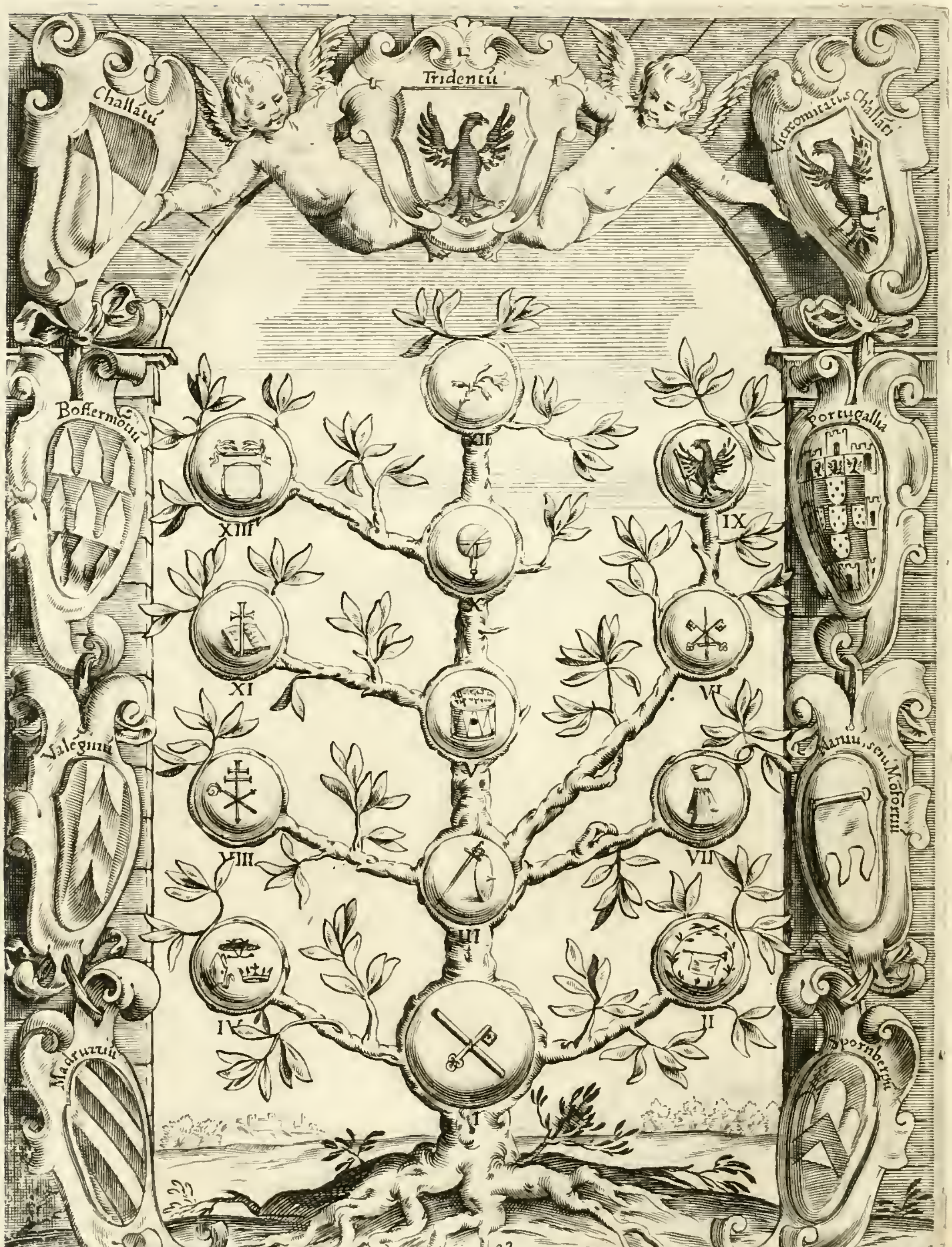
— huius Tertij Tomi vide in fine Indicis vltimi. &c.

E R R O R E S —

— Grauioris momenti aut nullos, aut correctos habes, amice Lector.

Monitum pro alijs impreſſionibus Ærarij.

Vt minori cum impenſa fieri poſſint (ſi ſit opus) aliæ Ærarij impreſſiones, formæ ligneæ, ac æreæ pro figuris aſſeruantur in Bibliotheca Collegij Bonon. Soc. Ieſu.


Challátú
Tridentú
Vicecomitatus Challati
Portugallia
XIII
IX
XI
VI
V
VIII
VII
IIII
IV
II
I


IOANNES BAPTISTA ZECCADORVS
EVGVBINVS
BONONIÆ PROLEGATVS etc.
ÆTAT. ANN. XXX.
Io. Bapt.a Coriolanus delin. et incid. Bononiæ

Illuſtriſs. ac Reuerendiſs. D.

D. IO. BAPTISTÆ ZECCADORO

BONONIÆ PROLEGATO,

In Prouincijs Bonon. Ferr. Aemilię Commiſsario Generali,

Et Foroſempronij electo Epiſcopo

FELICITATEM.

AErarij Philoſophiæ Mathematicæ, hoc eſt inter ſcientias humanas aureę, quid ni Tomus ſaltem hic tertius Ærario aureo (*vulgò, al Zeccadoro*) tibi ſcilicet, Illuſtriſsime, ac Reuerendiſsime Præſul, agnomine, moribus, ac meritis verè aureo debeatur? Tibi, quem argenteo, & aureo benignitatis fulgore afflat, ac planè Illuſtriſſimum reddit Pontificia ter Maximi Innocentij Columba, cuius (vt regius Vates cecinit) *pennæ deargentatæ, & poſteriora dorſi eius in pallore auri*. Vt meritò huius Ærarij Mathematici

Aerarium ærario cōgruit.

Pontificia beneuolētia.

Pſal. 67.

Author in Breuiarij ſui Stereometrici (quod ſecunda pars eſt huius tertij Tomi) problemate decimo, atq; exodico, figuram permiſerit, in qua Pontificia Columba eſt alis, quaſi beneuolentiæ vlnis, expanſis, & capite ad gentilitij tui Stemmatis auream ſegetem obuerſo, à cuius gemino ſole oculorum tibi fæcunda, ac ſecunda omnia proueniunt.

Videatur citata figura, vt hæc intelligantur.

Quis enim aliunde tuas laudes ampliores, aut veriores requirat, quàm ab eo, cui diuinum adſtare Spiritum gentilia ipſa Columba teſtatur? Ille te ſuis Pontificijs in Diplomatibus non vno verborum exornat oraculo: *litterarum ſcientia, vitæ, ac morum honeſtas, aliaq; laudabilia probitatis, & virtutum merita, quibus ornatum te eſſe cognoſcimus.* &: *de cuius fide, experientia, ſcientia, & in rebus agendis dexteritate plurimam in Domino fiduciam habemus.* & appellat *dilectum filium*, quem conſtituit *de latere Legati Vicelegatum, & motu proprio, & ex certa Scientia, & matura deliberatione ſuis, deque Apoſtolicæ poteſtatis plenitudine ſuum, & Apoſtolicæ Sedis Commiſſarium*, cum ampliſſimis, & extraordinarijs facultatibus

Diuinus Spiritus in Columba Pontificia.

Pontificia Elogia in Illuſtriſſimum Præſulem.

Pontificia beneficentia.

bus

bus in tribus Legationibus Bononienſi, Ferrarienſi, Romandiolenſi; vt ſub auguſtiſſimo Innocentio pacem eccleſiaſticas ditiones fouentem tu bellicà tuà prouidentià, & tacito armorum apparatu (quod & ſtrenuè preſtitiſti) munires.

Nec mirum. Quid enim aliud, quam pacis iuſſa expectes à Colũba pacis oleam geſtante? Ac rectè in citati exodici problematis figurà Columbam vides Pontificijs Petri clauibus non oneratam, ſed ornatam, ac torquatam, cum epigraphe à Poetarum Principe: *claudentur belli portæ.* Electa Verba ſunt è vaticinio de florente pacis otio Romanum per Orbem vernaturo ſub Auguſti pacatiſſimi Principis Imperio. *Videatur cit. figura, & hæc intelligãtur.*

——diræ ferro, & compagibus arctis
Claudentur belli portæ: furor impius intus *Aen. 1.*
Sæua ſedẽs ſuper arma, & centum vinctus ahenis
Poſt tergum nodis fremet horridus ore cruento.

Scilicet poſt cruentum Martis diluuium, quo eccleſiaſticus ager nuper inundarat, opportunè pacifica è cœlo aduolauit Columba, quæ non ſolum mitem oleam, ſed etiam *Iris pacis nũtia etiã in coloribus Columba.*

etiam nuntiam pacis Iridem ſecum ipſa geſtat, dum

Virg.

—— croceis ex alto roſcida pennis
Mille trahit varios aduerſo Sole colores.

Illa ſuis tibi pennis irradiat, dum tibi adſcribit illuſtria pacis munia, quem nuper experta eſt in bellis non imbellem.

Quo ſcilicet tempore Cimmeria temerarij Mauortis tempeſtas ſub infauſto, & infeſto ſydere, doloſo, & inopinato impetu lætis Autumnali ſuburbano otio Flaminiæ populis repente incubuerat, apud pacatos, innocentes, & inermes fœdiſſima, & ſæculis omnibus deteſtanda, quacumq; ruebat, relinquens veſtigia. Maronis tuba tunc verè intonuit:

Degeneres animos timor arguit.

In Cæſenæ præfectura ſingulare facinus bellica fortitudinis in bonum publicum.

Vnus tu dum id temporis Cæſenæ cum poteſtate præſideres, aduentantis hoſtis veſanas minas aſpernatus, Martij torrentis violentum impetum firmiſſimo tui pectoris obiecto robore fregiſti, atq; alio inuitum inuictus auertiſti. Vnus tu tot Populorum, Picennorum, Vmbrorum, Romandiolorum tibi ſuas fortunas, vxores, liberos, vitam ipſam debentium incolumi-

tati

tati conſuluiſti, quos populabundus ille turbo, te cedente, miſerandis cladibus inuoluiſſet. Vnus tu eccleſiaſticorum armorum, & Pontificiæ maieſtatis bellica dècora nutantia confirmaſti, corruẽtia ſuſtinuiſti, ac palam omnibus prodidiſti Pontificias Petri Claues coniuratis hoſtibus formidandas, ſi quando à viris fortibus, & prudentibus, hoc eſt à tui ſimilibus, in igniuoma belli fulmina verterentur. Vnus tu hoc immortali, & ſæculis omnibus laudando facinore te demum Eugubinum heroa pręſtitiſti, hoc eſt eius Vrbis patritium, in qua, tanquam in Martis Aerario, quot capita (ſententia eſt Sereniſs. ac extremi Vrbinatium Ducis) totidem ſtrenui exercituum Duces excuduntur.

Eugubinorum martialis genius.

Sapientiſſimi Principis veriſſimam ſententiam ſuo firmauit exemplo Illuſtriſſimus Germanus tuus Carolus Zeccadorus, dum elapſis proximè annis pro publica, & Eccleſiaſtica re ſtrenuus peditum, ac equitum ductor ſtetit in armis, acer, alacerq; pugnauit, hoſtili ferro ferocior, & contempta Morte viuacior, plenus animi fortiter effundendi pro Chriſti Domini, Deiq; in

Illuſtriſſimi Caroli Zeccadori Martium pectus.

ter-

terris Vicario. Vt alias pugnas ommittam, viget in ſæculorum memoriam illuſtris, ac aliarum prima ad Creualcorium victoria, cuius ille non exigua pars fuit, hoſtibus cęſis, fuſis, fugatiſq;

Poſt Ceſenaticam gubernationem Fani te Præfectura inter mixta lacrymis gaudia excepit, dum eodem in itinere Ceſenatum publicus è tui diſceſſu dolor te proſequeretur, publica tibi Fanenſium gaudia occurrerent: ac vna erat lacrymarum, & gaudiorum communis cauſa, ſcilicet in vtraq; Vrbe ſumma erga te animorum beneuolentia. Quam tu Fanenſibus abundè rependiſti, & rebus à te præclarè geſtis apertè confirmaſti, dum id temporis ſuburbana maria hoſtili claſſe Fani mænia infeſtarent. Quæ tua tunc animi fortitudo, prouidentia, vigilantia? Sanctè teſtari poſſunt qui plurimi tibi Fanenſes adſtiterunt, ac mirabundi viderunt diù, noctuq; per mænia circumcurſantem, nouis adſtructionibus infirma munientem, omnia circumſpicientem, verbis, & exemplo ad ſtrenuam Patriæ propugnationem ciues inflammãtem, vigiles excubias agitantem, breuiſſimi ſoporis

In Fani præfectura præclara facinora.

poris

poris vix partem aliquam libare mænibus ipſis incubantem; ac ideo dignum cuius inuictum animi robur pro Eccleſiaſticæ rei publica incolumitate Ceſena, & Fanum, ceu geminum, & immortale nominis, ac famæ tuæ monumentum, terra, mariq; deprædicent.

Ecce autem dum armatis Adriaci maris fluctibus obluctaris, repente ſæui diſcordiarum ignes inter auxiliarios milites, & ciues armatos emicuerunt. Vix te primi fulgores afflarant, cum ſtatim equum inſcendiſti, & cum aperto vitæ diſcrimine, nocte intempeſta, inter infeſtas acies, & igneam grandinem medius inſilijſti; & oris præſenti auctoritate, nunc graui vocis obiurgatione, nunc minaci prece, nunc miti ſermonis adhortatione obtinuiſti, vt, abiectis vtrimq; armis, obuiæ dexteræ in mutua pacis fœdera iungerētur, & amica conſpiratione ſimul omnes in exterū, & communem hoſtem rurſus obarmarentur.

Armata ſeditio ſedata.

Deniq; poſt marinum Martē extra mænia pacatum, intra mænia rurſū popularis coorta tempeſtas fluctuantibus odio animis in ciuē vnum primarium publica defe-

Ciuilis altera ſeditio ſedata.

✠✠ ctione

ctione ſæuiebat; quam tu periculoſo, ac difficillimo tempore, ſcilicet Eccleſiaſtico interregno, facillimè, ac celerrimè ſedaſti; & quod olim fortunæ Fanum prophanum fuit, tu Sacrum publicæ Paci templum condidiſti.

Fanum a fortuna olim Fano appellatum.

Quæ propter ſpectatiſſima in bello pro pace tua promerita maximus, & auguſtiſſimus *Rex hominum, Diuumq; Sacerdos* Innocentius te (ſic appellat) *Commiſſarium Generalem* Eccleſiaſticorum armorum, ac munitionum tribus in Prouincijs (vt prædictum eſt) ampliſſimo diplomate promulgauit.

Virg.

Eccleſiaſticorum armorum Cõmiſſarius Generalis, &c.

Ac tu ſtatim in finibus agri Bononienſis Caſtelfranchi Arcem, Pontificij regni primarium propugnaculum, & inexpugnabile Martis domicilium, poſt finitima ſuperiorum annorum bella exarmatum, ac præterea in Vrbis Bononienſis regio Prætorio publicum armamentarium breuiſſimo tempore omni armorum, & bellici apparatus genere copioſè inſtruxiſti; ne ſcilicet Bononiæ Minerua vel in Vrbe, vel in agro ſit inermis, ac repētè, ſi res poſcat, exiſtat in armis.

Caſtelfrãchi Arx, & vrbis armamẽtariũ munita.

In

In honorificentiſſima verò tua iſtà Bononienſi Prolegatione (iam pridem vltra conſuetum triennium tibi non roganti prorogata) nobiliſſimam hanc meam patriam, ac tot inſignium doctrina virorum laureato cætu florentiſſimam tam æquo regis iure, ac dirigis, vt neutram commiſſæ tibi publicæ Iuſtitiæ lancem vel auara munera deprimant, vel neglecti iuris impatientia eleuet, vel à iure doloſè declinantes ambages circumagant, ſed omnia maturo iuſtæ rationis in æquilibrio expendas, ac potius tu de tuo non rarò aliquid impendas, quàm quidquam alieni iuris depereat. Tibi enim ipſe conſcius es non mentiri publicam de te famam ab alijs promulgatam, quibus tu eam pæcuniæ partem, quæ ad te iuſta mulctatione pertinebat, vltronea liberalitate remiſeris, vt quibus iuſta cauſa deerat, tua non deeſſet pecunia.

In prolegatione Bononienſi Iuſtitia.

Vidi ego dum tu plerumq; etiam ab infimæ plebis mulierculis, & egenis ſupplices pro iure ſyngraphas humaniſſimè acciperes, ac ſtatim ijſdem aliquid ſtipis elargiebare, quaſi earum ad te preces emeres, ac oſtenderes, tibi duas in vna manu eſſe

Erga infimos pietas, & miſericordia.

✠✠ 2 pal-

palmas, alteram Iuſtitiæ, liberalitatis alteram, dum qua ſupplices chirographos accipis, eàdem, eodemq; momento ſtipem etiam non rogantibus erogas. Quam verò faciles omnibus horis omnium ordinum ad te aditus! Somno, menſæ, tibi ipſe dees, vt omnibus adſis. Non ſolum petentes ſtatim admittis, ſed tu ipſe in grauiſſimis tuis, ac domeſticis negotijs ſubinde petis adſint ne qui te, vel abs te aliquid petant, vnus omnibus ſemper expoſitus. Humaniſſimè verò ſingulos admiſſos quantà comitate, quibus verborum officijs vel iuri renitentes ad æqua illicis, vel iniurià preſſos eleuas, ac ſolaris! Difficillimas, ac numero penè infinitas controuerſias vel inter priuatos, vel à priuatis ad publica diſſidia, & periculoſas Ciuitatis factiones tacitè ſerpentes peruigili tua prouidentia maturè, ac radicitus exſcidiſti, tanta in aſperioribus aliquando vel animis, vel remedijs lenitate vſus, vt qui paulò antè grauiter, ac periculosè inter ſe diſſidebant, ad te vnum in vnum pacatis animis conuenirent, & amicas, nuper inimici, gratiarum actiones publica cũ laude tibi rependerent.

Facilitas, & aſſiduitas audiendi.

Pacata diſſidia.

Dum

Dum verò publicus æqui arbiter ciuiles audis controuerſias tam prompta, & à ſcientia iuris exacutà ingenij tui acie gordianos controuerſiarum nodos intercìdis, diuidis, abſoluis, vt viri iuris prudentia præſtantes ſumma cum admiratione à te diſcant quæ publicè deprædicent, ac doceant. Nimirum quemadmodum fortitudinis, ita & ſcientiæ ſemina, & copiam habes non modo intus ab ingenij ſtudio, ſed extra etiam à Patriæ genio Eugubino ad arma æquè, ac ad ſcientias aptiſſimo Conciuium tuorum complurium Iuriſprudentiæ, Medicæ, ac Phyſicæ Philoſophiæ, Sacræ, prophanæq; eruditionis doctiſſima monumenta teſtantur Eugubij Martem eſſe non modo armatum, ſed & togatum.

Publici iuris prudentia.

Eugubini ſcientijs illuſtres.

Quod ſi quod aliquando vel exiguum anni tempus, ſilente foro, tibi vacat, id tu non leuibus animi laxationibus impendis, ſed eruditæ lectioni, ac in primis Moralis Philoſophiæ auditioni ab huius Aerarij Authore tui obſeruantiſſimo, & olim in Parmenſi Academia eius Philoſophiæ publico Doctore; vt omnium priuatarum, & publicarum actionum humanarum è

Moralis Philoſophiæ ſtudium.

rectæ rationis præſcripto dirigendarum primos, ac ſupremos in ea ſcientia fontes apertos videas, ac de iure priuato, & publico æqua pronunties non modo ex aliena ſententia, ſed etiam è Philoſophici animi certà ratione, ac ſcientia. Tam vtilis publicè, & priuatim Philoſophiæ voluptate mirum eſt quantum ipſe capiare. Virtutum genera, & præcepta, quæ ab Aerarij Authore audis, ipſe opere cùm in omnes, tum in ipſum ſpeciatim exhibes, vt philoſophicæ in te ſegetis vberrimos fructus, ſcilicet benemoratæ in rebus omnibus temperationis, magnanimitatis, benificentiæ recipiat.

Beneficentia in amicos Authoris.

Tu illi amica, & cariſſima tibi capita, luctis olim, & gladiatorijs luctibus infracta, tibi debiti obſequij cauſa inſanis iactata vndis cænoſæ, ac fruſtra remis pulſatæ paludis, & furiali proterui Aquilonis concuſſa turbine, pacatiſſimo, ac tutiſſimo beneuolentiæ, ac patrocinij tui portu excepiſti, fouiſti, recreaſti.

In ipſum Auctorē.

Tu ipſum Ærarij Authorem etiam apud Principes viros crebris, publicis, & honorificis de eius virtute, ac Doctrina deprædica-

dicationibus abſentem decoraſti, præſentem ſingularibus beneuolentiæ ſignificationibus amplecteris. Quibus ille tibi deuinctus, non vt ſe à tam caris vinculis abſolueret, ſed vt tibi aliquam ſaltem grati animi ſignificationem ſolueret, tertium hunc Ærarij Tomum dicatum voluit, vt quantum ille tibi debeat, etiam apud poſteros teſtaretur.

O iucundam illius diei Memoriam, dum Ærarij Author in ſuburbano Autumnali receſſu corporis, animiq; vires aſſiduis commentationibus, & typographijs fractas tantiſper reficeret, ac tu illum humaniſſimè inuiſurus repente, ac improuiſus ſuperueniſti. Scilicet modeſtiæ tuæ dolo, vt ab eo, eiuſq; ſocijs frugali menſa exciperere, dum tu interim ibi omnes, ac ſingulos ſingulari excipiebas comitate. *Humanitas.* *Modeſtia.*

Iamq; Autumnalibus ferijs exactis, Ærarij Author in Vrbem deſcenderat, cum ecce iucundiſſimus illi præ omnibus, ac certiſſimus Roma perlatus eſt Nuntius te Dei, & Apoſtolicæ Sedi Præſidētis Innocentij Optimi Maximi Pontificis, tibi beneuolentiſſimi, regià gratià Foroſempronienſis Epiſco-

ſco-

Foroſempronienſis Epiſcopatus omina geometrica.

ſcopatus inſulis decoratum. Ac peropportunè dum Ærarij Author in hoc tertio Tomo Pentagonum Regulare ope lineæ proportionaliter ſectæ deſcriberet; quaſi in ea figura (quæ Epiſcopalis thiarę formam, & ſymbolum refert) verè diuinaret, ſcilicet è lineæ ſectione, quam (ob præclariſſimos in Geometrica Philoſophia vſus) diuinam appellant. Paulo etiam ante in Breuiario Stereometrico ſolida elementaria vnam in turrim conſtruxerat, & eccleſiaſticis vſibus aptarat, quaſi tibi templum abſtractæ à ſenſibilibus Sapientiæ appararet. Sed quid opus eſt diuinationibus geometricis de ſacra paſtorali tua dignitate coniectari? Vel ipſa gentilitij tui ſtemmatis meſſis triticea iam pridem te paſtorem animorum ominabatur; ſcilicet pro ſymbolo, ac indice tibi non deeſſe copioſam alendis animis annonam Sapientiæ flaueſcentis aureo colore paſtoralis Charitatis.

Acceſſit igitur opportunè hoc etiam Epiſcopi nomen, quo tibi tertius hic Ærarij Tomus debeatur. In quo de proportionibus, de circulo, de ſolidis Author mirifica, & perutilia philoſophatur. Siue

enim

Tertij To. Aerar. materia Prolegato, & Epiſcopo congruit.

enim Sacrorum voluminum lectioni te impendas, vt creditis tibi rationalibus ouibus æternæ vitæ pabula præbeas, mirum eſt quãtum præſidij ad Sacrorum antiquorum rituum, vaſorum, ædificiorum intelligentiam conferat ſolidarum geometricarum figurarum, & proportionum cognitio. Cuius rei luculentum patet ſpecimen in doctiſſimis, & eruditiſſimis Villalpandi (Authoris Aerarij conſocij) cõmentarijs in Sacrum Vatem Ezechielem. Siue populis (vt & nunc hìc Bononiæ) publicam adminiſtres Iuſtitiam, habes ab huiuſce Tertij Tomi de proportionibus doctrinà vnde noris Iuſtitiæ diſtributiuæ potiſſimum opus in geometricà (quemadmodum commutatiuæ in arithmeticà) exercendà proportione verſari. Siue deniq; te verè Epiſcopum, hoc eſt virum Apoſtolicum (quod facis) præſtiteris, in hoc eodem volumine habes pro Apoſtolico Epiſcopo documẽta ab inſcriptione in Circulo Pentagoni. Nam Apoſtoli circuli, ſiue rotæ appellantur, quæ ſuper terram, iuxta ſacra oracula, eleuantur, & per orbem voluuntur, vt Euangelia promulgent. Epiſcopalis ergo thiara in circu-

Circulus Apoſtolici viri Symbolum.

lo

lo animum in te oſtentat ab infimis auaritię ſordibus eleuatum; cui quemadmodum Epiſcopalis dignitas (iurati teſtari poſſunt ij, quibus magnanimi tui pectoris arcana patefcunt) vt minimè dicam, prorſus non optanti obtigit, ita Epiſcopales non opes, ſed opus bonum, de Apoſtoli ſententia, deſideras, ſcilicet pro publica ſalute animarum laborioſiſſimum. Vidimus, ac in exemplum poſteritati teſtamur: In Eccleſiaſtico ad te delato principatu princeps tibi cura fuit non de cenſu inquirere, ſed ſtatim idoneos Euangelicæ doctrinę adminiſtros conquirere. Macte hoc animo verè magno. Tu dum bonus Eccleſiæ Paſtor commiſſas tibi rationales oues per tuæ Diœceſis oppida infracto labore luſtrabis, & ſacrę doctrinæ pabulo recreabis, Epiſcopalis tuæ thiarę ſacrum Pentagonum radioſo ſanctimoniæ, ac æternæ fælicitatis circulo coronabis.

Eugubini Epiſcopi virtute, ac ſanctimonia illuſtres.

Habes non vnum exemplum à duobus tibi conciuibus; quorum alter te etiam affinitate attingit Octauius Accorombonus Eugubinus, & Foroſempronij paucis antè annis Epiſcopus, & Pontificius in Luſitania Legatus, morum integritate, rerum gerenda-

darum prudentia, Eccleſiaſticæ diſciplinæ nitore Illuſtriſſimus Præſul, & futuris etiã ſæculis verẽdus. Alter eſt (vt cętera vtriuſq; ſexus Eugubina capita ommittam Sanctitate Illuſtria) Sanctiſſimus Vbaldus Eugubinus Epiſcopus. Quibus tertium te, ac ſupparem fore tua te ſperat Patria; vt quorum Virtutes imitatus fueris, etiam fælicitatis præmia conſequaris.

In hac publica de te ſpe, ac pro te voto Epiſtolæ orbem claudo, ac venerabundus obſecro, vt Philoſophicum hocce munus tuis munijs, ac dignitatibus aptiſſimum, tuæ in Authorem (auunculum meum maternum) beneuolentiæ debitũ, perpetuum Authoris erga te humillimi obſequij monumentum, in tui patrocinij mitiſſimum ſinum admittere ne graueris, & diutiſſimè bono publico valeas, ac ſoſpiteris.

Bonon. Kalendis Decembris 1647.

Humiliſſimus, & addictiſſ. Seruus

Antonius Maria Nellus.

AMICO LECTORI

Antonius Maria Nellus

Cur Tertius Tomus pro tertia parte 2 Tomi; & Methodi ab Ærarij Authore inſtitutæ opportunitas.

TOmum Tertium libuit inſcribere hanc Ærarij partem, pro tertia parte, quæ ſecundo tomo ſuperaddità molem incommodam confeciſſet. Ac præterea tomum tertium videbantur poſtulare libri, ad quos, poſt duos antecedentes elementarios, fit gradus, qui materijs, quas continent, ab antepoſitis prorſus diſtincti ſunt. Quoniam verò in Tomi ſecundi vtraq; parte citantur aliquando aliqua, vel indicantur ſub nomine tertiæ partis, quæ in hoc tertio Tomo ſunt, ideo poteſt idem pertinere quaſi tertia pars ad Tomum ſecundum. In hoc igitur 3 Tomo plurium figurarum numero abſtinuit, & ſolidarum pleraſq; ſeorſim ab opere incidi iuſſit in ære, & plura indicauit, quam expoſuit, aut applicauit, & pleraq; in Breuiarium contraxit Author Ærarij, ſcilicet memor exordij apud Hippocratem: *Ars longa, vita breuis.* Vniuerſa moles elementarium pro-

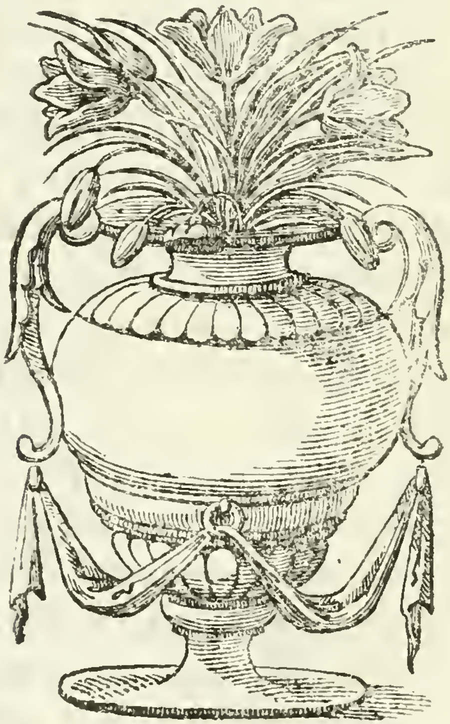
poſitionum in Geometricà Philoſophià in immenſum excreſcat, ſi ſingulos libros exponat hic Author, & applicet cum ea vſuum copia, & varietate, quam habes in duobus antecedentibus libris, ac Tomis, atq; interim ætas ægritudinibus, & annis iam grauior ſuccumbat operi non perfecto. Satius igitur viſum eſt quodam cũ temperamento præcipua vel breuiter applicare, vel plura alia ſaltem indicare; & aliorum virentibus viribus loca relinquere, ad quæ ſe extendant, & ſimilem in modum reliquis elementaribus in libris (vt in duobus præcedentibus exemplum habent ab hoc Authore) latentes theſauros expromant interim, dum, (ſi vita, & vires ſuperfuerint) Ærarij Author exponat omnia, quę in ſequentibus libris indicat. Matheſeωn tamen ſtudioſis, præſertim publicis Lectoribus, in arcto huius Tomi ſatis eſt amplitudinis, dum vſus aliqui ſingulares, ac non vulgati apponuntur, & ſumma cum facilitate, ac breuitate demonſtrantur; quorum publica in Scholis expoſitio mirificè allicere, ac ſuauiſſimè imbuere poſſit animos Auditorum. Videre licet ad initia, vel fines librorum ſingulorum non oſtentatoriè, ſed prorſus verè appoſita eſſe in inſcriptione huius tertij Tomi ea verba: *Materiæ plurium Tomorum indicantur*. Si quis enim campos ab Aerarij Authore apertos ingrediatur, & opes ab eo indicatas à citatis Authoribus, & argumentis comportarit ad propoſitiones, & ad reliquos hìc libros elementares, copioſam penè Bi-

blio-

bliothecam Mathematicam conſtruxerit. Ideo vniuerſo operi facta inſcriptio Aerarij, non Geometricæ, ſed vniuerſæ Mathematicæ Philoſophiæ; ad elementares enim propoſitiones, tanquam ad ſua principia, reuocantur quæcunq; in omni genere Mathemicarum ſcientiarum, atq; etiam extra ſcientias Mathemaricas, geometricè demonſtrantur.

Quod ad Methodum in ſequentibus libris elementaribus, relege quæ ad te, Lector, habes ante Tomum ſecundum. Quibus & adde ſequētia. Cùm Aerarij Author in octauo huius Aerarij Tomo, qui erit de quantitate irrationali, acturus ſit non ſolum de lineis incommenſurabilibus, (vt habet lib. 10 elem.) ſed de ſuperficiebus, & de ſolidis incommenſurabilibus, & earum omnium quātitatum proportionibus, & alijs affectionibus, quæ contemplationes ſupponunt plurima non ſolum de lineis, & ſuperficiebus, ſed etiam de ſolidis commenſurabilibus; ideo eam totam partem quantitatis irrationalis ſepoſuit extra, & poſt contemplationem quantitatum commenſurabilium. Docet enim naturæ methodus in ſcientijs ea poſponere, quæ antecedentium cognitione indigent. In eum octauum Tomum traducentur ex lib. 13, & 14 elem. ex Pappo, & alijs ea, quæ conſultò ſunt omiſſa in ſectione 3 Breu. Stereometrici, in 2 par. hu. 3 Tomi. In tribus enim hiſce Tomis Author quātitates commenſurabiles complexus eſt ea fine, ac libentià, quòd feraces ſunt plurimarum

marum vtilitatum in omni artium, & ſcientiarum génere, incommenſurabiles verò miræ quidem, ſed vtilitatum ciuilium ſteriles, ac ideo in locum poſtremum ab huius Authoris methodo reiectæ. Vale, Amice Lector, ac multa paucis incluſa in hoc tertio Tomo lege oculo beneuolo.



TOMI TERTII
ÆRARII
Philoſophiæ Mathematicæ
PARS PRIMA
Complectens reliqua quatuor Elementa, & Epilogum Planimetricum.

ELEMENTVM

TERTIVM ex noſtra,

QVINTVM ex veteri methodo.

§ I.

SCHOLION.

Vniuerſalitas, & vtilitas huius libri Quinti. Numerorum vſus in Geometricis aſſertus. Materia pro Quarto Ærarij Tomo indicata.

1 *LEmmaticus eſt hìc liber quintus ad ea, quæ docentur, præſertim in lib. 6 circa proportiones figurarum. Nos de more veterum poſtpoſuimus (vt habes etiam apud Euclidem) lemmata huius lib. 5 poſt propoſitiones lib. 6.*

In veteri ſcholio è græco apud Commandinum: Librum (*hunc quintum elementorum*) dicunt eſſe Eudoxi, qui Platonis Magiſter fuit. *&:* Hic liber cõmunis eſt Geometriæ, Arithmeticæ, Muſicæ, & omni ſimpliciter Mathematicæ diſciplinæ. Nam quę in ipſo demonſtrantur non ſolum Geometricis theorematibus congruunt, ſed & omnibus, quæ ad Mathematicas, vt dictum eſt, diſciplinas referuntur.

Libri 5. Elemen- Authori Eudoxus.

Quod quidem attinet ad Geometriam nullus omnium elementariorum librorum vniuerſalior eſt hoc 5. librò. Nam in 1. l. Elem. vt plurimum de triangulis, in 2. de rectangulis, in 3, & 4 de circulo, in 6 de proportionibus figurarum planarum; in 10 de lineis incommenſurabilibus; in rel quis libris de aliquibus ſolidis agitur;

Communis eſt omnibus Scientijs Mathē.

at in hoc quinto agitur generaliſsimè, & demonſtrantur de proportionibus propoſitiones conuenientes & lineis, & figuris tam planis, quàm ſolidis cuiuſcunque formæ, ac non ſolum commenſurabilibus, ſed etiam incommenſurabilibus.

2 *Solet hic liber non parum incommodare Tyronibus auidis rerum iucundiorum, & applicatarum vſibus propoſitionum elemẽtariarum. Nos hanc huius libri moleſtiam, & moram Tyronibus ante iucunda, quæ docentur in lib. 6, ablaturi, præmiſimus librum ſextum, poſt cuius opiparas dapes poſsint facilius tolerare ieiunas huius lib. 5. theorias.*

Quas nos (præter geometricas demonſtrationes in ipſo libro) breuiſsimis per numeros expoſitionibus Tyronibus apertiores, & faciliores reddemus. Eoque magis, ac libentius, vt ſi quando in 2 Tomi primà, & ſecundà parte aliquid ſuppoſitum ſit ex hoc li. 5, ſtatim poſsit Tyro quaſi ad breuiſsimum lemma recurrere, & ſuppoſitæ propoſitionis veritatem ſtatim in numeris apertè videre, donec geometricè videat eandem veritatem in Euclidis propoſitionibus cùm verſabitur in hoc 3. Tomo. Eſtque in per numeros oſtẽſione id compendij, quod non ſit opus, pro demonſtratione antecedenti, vllà alià propoſitione, vt aſſolet plerumque in geometricis.

Demonſtrationum per numeros non indigentes antecedẽtibus.

3 *Quam verò firma ſit per numeros oſtenſio, ac demonſtratio docent ſequentia verba Maurolyci in Præfat. 2 par. li. 2. Arith.*

Numerorũ vſus ĩ Geometricis firmatus

Quoniam Arithmetica inſtrumentum eſt omnis ſupputationis, & numeri ſunt termini, quibus quælibet magnitudo ſignificatur, non dubium eſt, quin per numeros fieri poſſit omnis magnitudinis calculus. Cum verò Geometria comprehendat omnium quantitatum ſpecies, videlicet lineas, ſuperficies, ſolida, & cætera continua, quæ ad hæc redigi poſſunt; vt tempora, & pondera; duplicem vtiq; praxim habebit, vnam, quæ fit lineando, alteram, quæ ſupputando: quarum hæc ab illa tamquam à fonte deriuatur: & illa theoriæ innititur. Sicut enim tam theoremata, quàm problemata per theoriam demonſtrantur, & ſoluuntur; ita mox ſiue per lineationem, ſiue per calculum ad praxim rediguntur. Nam intellectu præmeditata lineamus, & lineata calculamus. Et quamuis lineator deſcriptionem oculo repræſentet, & mentali ſpeculatione

tione punctum geometricum conſequatur, tamen calculator numeris etiam id ipſum conſequitur, ſed, & paucis characteribus minutiores partes diſtinguit, quod lineator non niſi in ſpatio immenſo, vel magno inſtrumento (quod nulli facile eſt) preſtare poteſt. Quæ diſtinctio quidem neceſſaria eſt, cum per numeros irrationalis, aut ignotę magnitudinis terminum, ſeu limitem magis, ac magis propinquantes veſtigamus. *Idem in fine lib. 13. Elem.* Calculus demonſtrationem comprobat, & pro demonſtratione vſuuenire poteſt.

Vtilitas numerorum in geometr.

4 *Huic libro 5. ditando, & ornando habes ex vniuerſæ Geometriæ penu infinita, quæ tamquam ad ſua genera huc adducas ad huius lib. 5. propoſitiones. Ex Arithmeticis verò proportionalitatibus ſuppeditabitur infinita, & mirifica materia proportionum in numeris, & propoſitionum ſimillimarum propoſitionibus, & proportionibus huius lib. 5. Quarum copia in promptu eſt, præter alios, apud noſtrum Clauium in digreſſione de proportionalitatibus poſitâ inter definitiones hu. lib. 5. Muſicæ verò ſcientia nihil aliud eſt, quam vſus proportionum in ſonis, vnde & ex noſtro Apiar.* 10 *poſsis ornamenta iucunda conferre in hunc librum 5. Infinita ſunt alia in phyſicis pertinentia ad proportiones in motibus, temporibus, locis, elementis, fluxu aquarum, motu grauium, magnitudinibus, in corporum partibus, in vegetabilium ramis, fibris, folijs, &c. In artefactis, Architectura, &c.*

Proportionum arithmeticarum copia apud quẽ.

Proportiones ſonorũ.

Proportiones in motibus, temporibus, &c.

Præter prædictam materiam ſuppeditabunt pro ampliſsimo Tomo circa hunc li. 5 præ omnibus Cardanus in libris de proportionibus, vbi variæ, curioſæ, iucundæ materijs phyſicis applicationes proportionum. Præterea noſter Villalpandus in pluribus propoſitionibus Lemmaticis, quas habet ante lineas proportionales, vbi plura alia de proportionibus magnitudinũ vniuerſaliſsimè demonſtrat (præter ea, quæ in hoc 5 li. ſunt) in to. 3 in Ezechielem in apparatu Vrbis, ac Templi Hieroſolymani, parte 2 de ponderibus lib. 1. cap. 2.

Authores de proportionibus.

Habes & apud Io. Baptiſtam Benedictum in libro diuerſarum ſpeculationum, pag. 198. vbi theoremata huius libri 5. ad prima quædam principia reuocat, & aliter ſingula demonſtrat. Deniq; ex Campano erudita, & ab alijs licebit accipere condiendo, ditando, exponendo hunc 5 lib. Elem.

Ex

Ex prædictis & citatis nos aliquando iuſtum tomum conflabimus in hunc lib. 5, quemadmodum fecimus in lib. 1, & 6 element. Interim parcimus tantiſper viribus, & ætati, & impenſis, & conſulimus vtilitati Tyronum propter rationes, quas habes in initio huius 3 Tomi ad te, mi Lector.

DEFINITIONES.

I.

PARS eſt magnitudo magnitudinis, minor maioris quando minor metitur maiorem, *Vt 2 eſt pars ipſius 6, at non ipſius 7. quia 2 metitur 6, non metitur 7.*

§ II.

SCHOLIA.

I.

MEmento ex noſtra Methodo ſupponi definitiones huius elementi ante librum, ſiue elementum antecedens Sextum ex veteri, Secundum ex noſtra Methodo.

II.

Pars quæ non ſolũ minor toto, ſed & quæ metitur totum.

Definit partem aliquotam, quæ ſuum totum aliquoties repetita metitur; non aliquantam, quæ ſuum totum repetita vel non explet, vel excedit, vt numerus 2 (apud Lantzium hic interpretem) qui ter repetitus non aſſequitur totam 7, quater repetitus excedit. Ex hiſce intelligere licet Scholion vetus Græcum ad hanc 1 defin. apud Commandinum, vbi docetur apud Geometram non ſatis eſſe vt ſit minor toto, ſed etiam vt metiatur pars, &c.

Mul-

DEFIN. II.

Multiplex eſt maior minoris, quãdo minor metitur maiorem. *Vt 6 eſt multiplex ipſius 2, at 7 ipſius 2 multiplex non eſt, quia 2 metitur 6, non item 7.*

DEFIN. III.

Proportio eſt duarum magnitudinum eiuſdẽ generis mutua quædam ſecundum quantitatem habitudo. *Proportio ergo eſt inter res eiuſdem generis, vt inter numeros, lineas, ſuperficies, corpora, &c.*

SCHOLIA.

I.

Etiam ad alia quæ habent aliquam cum quantitate ſimilitudinem transfertur proportio. Proportionis antecedens dicitur quantitas, quæ ad aliam refertur ea vero, ad quam refertur, dicitur conſequens proportionis. *Proportionis antecedẽs, & cõſequẽs quæ.*

II.

E veteri ſcholio græco apud Commandinum valde notanda ſequentia ſunt, in quibus apparet eſſe definitionum geometricarum ſingula verba ponderãda, & prorſus intelligenda, vt ab hallucinationibus auertantur geometricæ philoſophiæ ſtudioſi, & dubitationum, vel cauillationum hydræ incidantur.

Duarum magnitudinum eiuſdem generis. Vt ſeparet ab alijs ſpeciebus quantitatis, vt ne quis lineam cum ſuperficie comparet; hæc enim inter ſe proportionem nullam habent. *Secundum quantitatem.* Vt ſeparet ab infinitis magnitudinibus; quantitas enim continua eſt terminus continui non infiniti, & quantitas diſcreta eſt diſcreti non infiniti; ſed diſcretum non eſt magnitudo, multitudo enim eſt. *Defin. 3 excludit infinitã quãtitatem.*

§ 1.

§ III.

SCHOLION.

Proportionum genera, ſpecies, denominatores.

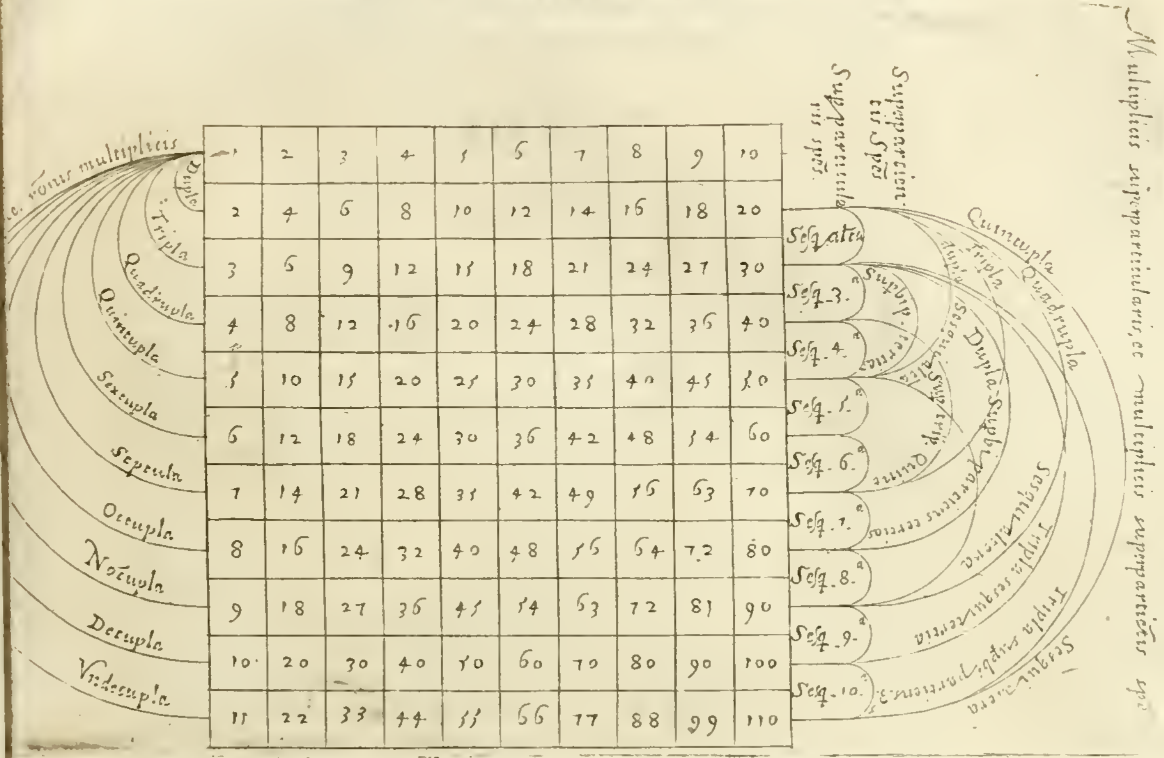
Plurima, quæ ad cognitionem proportionum exponi poſſunt, hic accipe breui compendio indicata quantum ſatis eſt Tyroni geometrico ad reliqua elementa cognoſcenda properanti.

Proportio alia eſt rationalis, quæ numeris exprimi poteſt, alia irrationalis, quæ numeris exprimi non poteſt, velut inter lineas incommenſurabiles in li. 10. *Rationalis proportio alia æqualitatis, alia inæqualitatis, inæqualitatis alia maioris, alia minoris inæqualitatis; maioris cùm quãtitas maior refertur ad minorem, minoris cùm minor ad maiorem; additurque particula, ſub, in denominatione minoris reſpectu maioris.*

10 *ad* 1 *eſt maioris inæqualitatis, ideſt decupla vnitatis,* 1 *ad* 10 *eſt minoris inæqualitatis, ideſt ſubdecupla vnitatis ad* 10. *Relatio, ſeu proportio maioris eſt tamquam totius, & continentis ad minorem, tamquam partem, & contentum; proportio minoris eſt tãquam partis, & contenti ad totum, & continens, licet vtrobique intercedat idem numerus, & differentia nouenarij inter* 10, *&* 1.

Ponuntur quinque genera proportionum tam maioris, quàm minoris inæqualitatis, multiplex, ſuperparticularis, ſuperpartiẽs, multiplex ſuperparticularis, multiplex ſuperpartiens. Exempla in numeris, & compendium ingenioſum habes apud nos in to. 2. *Apiariorum, Apiario* 11. *progym.* 4. *in fine capitis* 4. *vbi tabella Pythagorica eſt ab Orontio prædictis proportionibus applicata, & ſignata. Vide illam & hic, & in ea cognoſce quæ pluribus expoſita ſunt ab alijs.*

Quod



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110

Quod pertinet ad proportionum denominatores à poſterioribus aliquibus affectatos, nos, ne Tyrones implicentur, ſatius ducimus exempla veterũ Geometrarum ſequi, qui in minimis numeris denominabant proportionem per eorum comparationem, velut: eſt inter duas figuras proportio 3 ad 7, 7 ad 12. &c. Quam animaduiſionem relege apud nos in cit. Ap. 11. cap. 4. ante tabellã Orontianam. Prædicta de proportionibus ſatis, ſuperq; ſunt præuiæ Tyronum cognitioni ad alia, quæ vſu diſcent.

Denominatores proportionum quomodo apud Antiquos.

DEFIN. IV.

Proportionem inter ſe habere dicuntur magnitudines, quæ multiplicatæ poſſunt ſe inuicẽ ſuperare. *Vnde liquet inter angulum contingentiæ, & rectili-*

neum quemcumque proportionem non eſſe. Quia licet prior in in-finitum multiplicetur, nunquam tamen ſuperabit poſteriorem.

§ IV.

SCHOLION.

Defin. 4 excludit infinitũ in quantitate.

DOctè, vt ſolet, Commandinus ad hanc 4 definit. Hoc idcirco dictum videtur, vt infinitæ magnitudines à proportionibus excludantur. Finita enim magnitudo quantunlibet multiplicata tantum abeſt vt infinitam magnitudinem exuperet, vt ne æquare quidem poſſit vnquam.

§ V.

Ex definitione 4

COROLLARIVM I.

Archimedes vindicatus à calumnia ex ignorãtia huius 4 definitionis.

1 *MIrum eſt quam audacter, ac temerè aliqui audeant aſſerere ſibi auctoritatem criticam, ac fermè damnatoriam ſententiam etiam in ſupremos ſcientiarum Auctores, aut illuſtratores, quorum mirificas theorias omnium ſæculorum acutiſſima ingenia & ſcrutata, & admirata ſunt. Sed cinici cenſores meritas, & publicas, & perpetuas apud abſentes, & poſteros pœnas luunt audaciæ, ac temeritatis, dum arguuntur ignorantiæ vel in primis principijs earum ſcientiarum, in quibus publicos gentium magiſtros carpere non dubitarunt. Franciſcus Vieta, & Ioſeph Scaliger dum iniquè, ac parallogiſticè Archimedem damnant, egregiè, ac meritò vapularunt, præ alijs, à Rinalto*

ualto in Archim. illuſtr. non ſemel, & à noſtro Clauio in Geomet. pract. vbi de circ. quadr. Vide obiectiones cynicorum eorum in Archimedem, Scaligeri, quidem in cyclometricis Elem. Vietæ verò in li.4. reſponſ. 5. ſchol. &c. & in fine poſtulatorum ad ſupplem. Geom.

Piget, ac pudet eorum verba hic apponere, in quibus nec logicæ facultatis, nec geometricæ ſcientiæ etiam in primis principijs veſtigium vllum videas, ita contra ſe ipſi pugnant, & aſſumunt quæ negant, apertè falſa aſſerunt. &c.

2 *Demonſtrat (aiunt iſti) Archimedes circulum eſſe æqualem triangulo rectilineo rectangulo, cuius alterum latus circa rectum angulum æquale ſit ſemidiametro circuli, alterum circuli peripheriæ, quia triangulum id nec maius, nec minus eſt, ergo æquale circulo. Item: exhibet Archimedes lineam maiorem ambitu cuiuslibet polygoni in circulo inſcripti, minorem ambitu cuiuslibet circumſcripti; ergo, inquit, eſt æqualis peripheriæ circuli. &c.*

Malè ratiocinatur, & paralogiſticè Archimedes. Si enim valet eius argumentatio, ac demonſtratio, ego pariter contra demonſtrata apud Euclidem de angulo ſemicirculi, quòd ſit minor recto, oſtēdam eum ſemicirculi angulum æqualem eſſe recto. Non eſt maior recto, quia minor eſt omni obtuſo, qui ſemper maior recto eſt; non eſt minor recto, quia maior eſt omni acuto, qui ſemper minor eſt recto; ergo æqualis eſt recto angulus ſemicirculi.

Vt prædicta iſtorum contra Archimedem, & mox à nobis dicēda pro Archimede rectius intelligas, hortor te, mi Tyro, vt viſas paradoxa apud nos angulorum in Apiar. 3, toto Progym. 5. Si Vieta ſibi tantum permiſit, vt audeat Archimedi notam inurere ignorantiæ geometricæ, quaſi neſciret geometricè demonſtrare, permittet & mihi, opinor, vt potius pro Archimede aſſirmem Vietam nimiū oſcitanter ignoraſſe primam principium, ſiue definitionem hanc 4 *geometricam elementarem; ſi enim non ignoraſſet, vel intellexiſſet, nunquam tam fœdè pronuntiaſſet in Archimedem.*

3 *Itaque reſpondeo Vietæ (omiſsis alijs, in quibus peccat) paralogiſmum eſſe contra hanc definitionem* 4. Angulus ſemicirculi non eſt maior, nec minor recto, ergo æqualis, *quia comparat angulos, qui nullam inter ſe proportionem habent; at Archimedes comparat & figuras, & lineas, quæ proportionem inter ſe habent.*

Archimedes rectè comparat quantitates inter ſe proportionales.

 Nam

Anguli mixti nõ habẽt propor-tione cũ rectilineis.

Nam anguli mixtilinei, è quorum genere angulus eſt ſemicirculi, non habent proportionem cum rectilineis; quantumcumq; n. augeatur angulus ſemicirculi, nunquam æquabit, aut ſuperabit angulum rectum, qui fit à diametro, & à linea recta tangente circulum, cuius anguli ſemper pars eſt angulus ſemicirculi factus à diametro, & peripheria, quæ ſemper cadit intra ſpatium anguli recti. At verò, datis lineis alterà rectà, alterà circulari, vtralibet minor aucta poteſt vtramlibet ſuperare, & datà trianguli (quo vtitur Archimedes in dimenſione circuli) areà, quæ ſit minor areà circuli, poteſt ita augēri, vt aream circuli dati excedat, ſcilicet ſi area trianguli fiat æqualis rectangulo, vel quadrato circumſcribẽti datum circulum. Sic area minor circuli aucta poteſt ſuperare datam aream trianguli. Ac propterea, iuxta hanc difin. 4, angulus ſemicirculi non habet proportionem cum recto; at figuræ rectilineæ cum curuilineis, triangulum, & circulus, &c. lineæ circularis, & recta habent inter ſe proportionem, & rectè ab Archimede fit ratiocinatio de æqualitate inter ea quæ habent proportionem; malè verò, & cum ignorantia huius 4. defin. fit à Criticis obiectio contra Archimedem, dũ illi cõparant inter ſe, quæ non habent proportionẽ.

Proportio inter lineas circularem & rectam.

4 *Confirmat Archimedem præter plura alia, etiam id, quod rectè adnotauit Eutocius ad Archim. quadr. circ. & de quo nos plura in To. 1. huius Aerarij ad definitionem lineæ, & ad prop. 5, § 2. Scilicet linea recta, & circularis conueniunt inter ſe in triplici proximo genere (ſub remotis & quantitatis, & ſecundum latitudinem indiuiſibilis) quia & lineæ, & ſimplices, & ſimilarium partium ſunt; ideo ſunt inter ſe comparabiles. Vide apud nos in Breuiarij Sec. 2, probl. 18, coroll. 4, rectam peripheriæ æqualem.*

Conuenientia iter lineas circularẽ, & rectã.

Recta peripheriæ æquales apud nos

Anguli curuilinei æquantur rectilineis, vt habes à nobis (præter citatum progym. 5. Apiar. 3.) ad Axioma 7. § 10 ex Proclo exẽpla. In progym. verò 6. cit. Ap. 3, & à Proteo noſtro Geometrico in Apiar. 1 habes exempla figurarum curuilinearum, & mixtilinearum, quæ æquantur rectilineis. Quæ omnia vt videas te hortor nõ ſolum ob iucundam in paradoxis admirationem, ſed in primis ad hoc hic negotium; ſunt enim omnia & confirmatoria Archimedis, & refutatoria calumniatorum, & illuſtratoria huius 4 definitionis. Ac velim valde notes in æqualitatibus illis apud nos curuilineorũ,

Proportio inter figuras curuilineas, mixtas, & rectilineas.

vel

vel mixtilineorum cum rectilineis, eas fermè oſtendi per appoſitiones, vel detractiones partium. Quæ res confirmant hanc definitionem 4 Eucl. de ſuperantia per multiplicationem. Quæ enim æqualia fiunt, etiam ſuperari poſſunt per nouam alterius additionem.

5 *Interim audi Ioſephi Scaligeri paralogiſmum contra hanc 4 defin. & ineptiam contra quadraturam Briſonis, immò & contra argumentationem Archimedis, & aliorum Antiſtitum in Philoſophia Geometricà, qui quidem Briſo, inſcripto quadrato in circulo, & altero circumſcripto, inferebat: ergo medium inter duo illa quadrata eſt æquale circulo. Scaliger igitur apponit, & opponit ſeq.*

Deinde datis minore, & maiore, poſſe dare medium, aut æquale falſum conuincit ἡ κερατοειδὴς γωνία, qui eſt angulus minor omni minimo angulorum rectilineorum. *Mirabar, quod & Vieta aſſolet, Scaligerum in philoſophicis non affectare opinionem Grammatici græculi dum græca latinis ſubinde ingerit, vt abdicet à ſe ſummam in ſcriptore Mathematico laudem perſpicuitatis. Scilicet puduiſſet Scaligerum latinè appellare cornicularem angulum, qui & contactùs (vide in cit. Ap. 3. apud nos alias ſpecies cornicularium) à quo tamen male argumentatur; nam & ille angulus eſt ex genere mixtorum, qui nullam habent cum rectilineis proportionem; quantumcumq; enim augeatur angulus contactùs nunquam æquabit, aut ſuperabit angulum vel minimum rectilineum acutum, quia quælibet recta ducta ad punctum contactùs vt faciat angulum cum tangente, ſecat circuli peripheriam, atq; intra ſe concludit tamquam partem, angulum contactùs è cōuexà peripherià, & rectà peripheriam tangente.*

Briſonis verò paralogiſmus in alio peccat, quàm in eo, quòd illi opponit Scaliger. Vide nos in Schol. 1 ad 4. propoſ. Prog. 2. Apiar. 3. Quod ſi Briſo ad ſimilitudinem Archimedis potuiſſet argumentari ſic: Quadratum medium inter circumſcriptum, & inſcriptum circulo eſt maius omni polygono in circulo, & eſt minus omni polygono circa circulum, ergo eſt æquale circulo; rectè concluſiſſet, iuxta à nobis antedicta. Atq; hactenus de his. Ex occaſione hìc cum Buteone moneo Tyrones, vt conferant Archimedis modum demonſtrandi quadraturam circuli cum modo Euclidis in propoſ. 2. lib. 12, qui eſt de proportione inter circulos quemadmodum quadrata

à cir-

à circulorum diametris. Eàdem enim formà, & methodo vterque progreditur. Cætera, quæ huc facere poſſunt pro hac 4 definitione, vide in loco apud nos ad 16 propoſ. tertij Elem.

Inter curuas, & planas ſuperficies proportio. *Adde etiam in ſuperficiebus curua planis æqualia, vt nos circulo ſuperficiem cylindricam æqualē oſtendimus in fine li. 3. Elem. & Archimedes ſuperficiem ſphæricam circulo quadruplam. &c. & inde partes ſuperficiei ſphæricæ cum partibus circuli habēt proportionem; vt ſphæricum triangulum apud nos æquale ſemicirculo, in fine lib. 3. Elem. Et in ſect. 1, & 2 Breuiar. Stereometrici plura de his apud nos. Illuc i.*

SCHOLION.

EX hac defin. 4 rationes habes aliquorum paradoxorum circa proportiones angulorum inter ſe, partim in citat. Api. 3. partim in, & ad propoſitiones 16, & 31 lib. tertij. Hinc illuc ito, & inde huc remeato, vt conſonantiam geometricam animo exaudias.

§ VI.

COROLLARIVM II

è definitione 4.

Quantitatis finitæ cum infinita non eſt proportio; & patefacti paralogiſmi Geometrici.

Definitio 4 eſt primum prīcipiū. *DEfinitio hæc quarta, ſi rectè percipiantur eius termini (ſiue verborum ſenſus) adeo vera eſt, vt ſit etiam primum principium. Vnde fit vt eo fœdiores paralogiſmi ſint in philoſophia geometrica, ſi qui fiant contra hanc. Contra quos paralogiſmos munire candidatos Philoſophiæ Geometricæ nobis hic conſilium eſt. Quoniam igitur ex primo principio etiam phyſico, ac per ſe noto finiti ad infinitum nulla eſt proportio, nulla etiam erit pro-* *Finiti ad infinitum non eſt proportio.*

portio quantitatis finitæ ad infinitam. Ratio ab hac definitione eſt euidentiſsima, quia quantitas finita quantumuis multiplicata nũquam poteſt æquare, multo minus ſuperare infinitam, ac propterea finita erit ſemper minor (quatenus licet ſic loqui) in comparatione cũ infinita, nec poterit habere finita cũ infinita proportionem æqualitatis, multo minus maioritatis. Quæ doctrina, iuxta hanc 4 definitionem, veriſsima ſemper eſt in quolibet genere quantitatis ad geometricam philoſophiam ſpectantis. Exempla ſint in lineis, & in figuris: linea, vel figura finita non poteſt vnquam eſſe, ac demonſtrari æqualis lineæ, vel figuræ infinitæ, ac multo minus maior, quàm linea, vel figura infinita; vt etiam rectè notat hic Clauius. Adde Commandinum in § 1 anteced. *Ratio geom. ab hac 4 defin. in quantitate.*

2 *Et quoniam, iuxta definitionem* 14. *lib.* 1. *Elem.* figura eſt quæ ſub aliquo, aut aliquibus terminis continetur, *implicat in Geometricà philoſophià figuram eſſe, quæ non ſit terminata (ac eſt præterea ſubiectum Geometricæ philoſophiæ quantitas abſtracta, & ſimul terminata; infinitum enim ſub ſcientiam non cadit, iuxta Procli, & verè Philoſophorum geometricorum ſententiam) Si quod autem quantum non ſit terminatum vndique, eſt omnino extra genus figuræ, habetq; infinitatem ab ea parte, à qua non eſt figuratum, ac terminatum.* *Implicat figura infinita.* *Infiniti non eſt ſcientia.*

Quemadmodum igitur in genere linearum non poteſt fieri comparatio, aut extendi proportio inter finitam, & infinitam, cùm tamen ſint ambæ ſaltem in eodem genere ſuperiore, id eſt in genere linearum; eodem, ac multo maiori iure non poteſt demonſtrari (quia non poteſt eſſe) proportio inter figuram, & ſpatium quantum aliqua ex parte non terminatum, id eſt infinitum, quia figura, & quantitas interminata, id eſt finita, & infinita, differunt etiam toto genere figuræ.

Prædicta intellige quemadmodum de omni genere linearum rectarum, curuarum, regularium, irregularium mixtarum, &c. ſic & de omni genere figurarum regularium, irregularium planarũ, ſolidarum, quarum nullæ comparari poſſunt cum ſpatio vllo quantitatis non figuratæ, interminatæ, denique infinitæ.

3 *Ac licet nos ad prop. 35. 36. lib. 1. in 1. Tomo huius Aerarij, & in ſecundo ad propoſ. 1. lib. 6. affirmauerimus inter geometrica*

para-

paradoxa, triangula, vel parallelogrammata inter parallelas ſuper æqualibus baſibus ita eſſe inter ſe, vt minimum poſsit æquare, ac maius eſſe altero quolibet infinito, intellige ſemper finitum triangulum, vel parallelogrammum, licet in infinitum ſub maioribus lateribus obliquatum.

Quod non ſolum inter parallelas, ſed etiam inter aſymptotos protulimus ex Antiquorum Geometricorum Philoſophorum ditiſsimo penu. Atque ibi dum affirmamus cum Antiquis etiam inter aſymptotos parallelogrammo alicui eſſe æquale parallelogrammum quodlibet infinitum inter ſpatium infinitum inter aſymptotos (quod, & ad triangula traduximus) intellige, mi Tyro, de ſemper finitis parallelogrammis inter ſpatium aſymptoton infinitum, quemadmodum infinitum eſt ſpatium inter parallelas, in quo infinita numero, ſemper finita terminis (ideſt figuræ parallelogrammorum quantumuis terminis extenſorum) ſunt parallelogrammata, & ſingula inter ſe, ac vni vel minimo inter eaſdem parallelas, & baſes conſtituto.

Parallelogrammata, & triangula licet infinita, eſſe æqualia minimo inter parallelas, & aſymptotos, quo ſenſu apud nos.

Diſtingue igitur, mi Tyro, nec mihi impinge paralogiſmum euidentiſsimum contra hanc definitionem. Aliud enim eſt comparare figuras inter aſymptotos numero, & terminis finitas cum aliqua alia, aliud eſt comparare figuram cum ſpatio inter aſymptotos, ſiue cũ figuris inter aſymptotos ſpatiũ id omne occupantibus. Quod cum ſit infinitum, (hoc eſt inter nunquam inter ſe conuenientes lineas, ac propterea implicat accipi vt finitum, eſſet enim inter aſymptotos, & non aſymptotos. i. concurrentes, & nõ &c.) vt totũ occupetur opus eſt infinitis numero, & quantitate in infinitum extenſà præditis figuris. Primum illud ego aſſerui de parallelogrammis inter aſymptotos, non autem hoc ſecundum, quod eſſet manifeſtiſsimus paralogiſmus, propter prædicta in hoc 2 coll. ad hanc 4 definitionem; quæ omnia ſunt demonſtrationis loco apud intelligentes, & ſanè ſentientis. Ac quidquid, quaſi corollarij loco, deducerem ex eo paralogiſmo, totum eſſet de falſo falſum, & catenam è paralogiſmis vitream (pro adamantina è veris demonſtrationibus) contexerem. Dum ego te vera è puris huius geometricæ philoſophiæ fontibus doceo, quid tu mihi fucata ingeris, quæ nunquam ſomniaui?

4 An ſuades vt præclarum ſcilicet id paradoxum de finito, quod ſit æquale infinito, contra primum principium ex hac 4 definitione,

ego

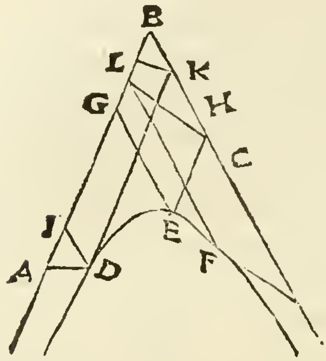
ego meis apponam, quæ plurima in omni Mathematicarum ſcientiarum genere habeo in meis Apiarijs, illudq; firmem argumentatione aliqua per minimas particulas? figuram (videor te ingerentē audire) quæ demonſtretur æqualis omnibus figuris eiuſdem generis, ceu parallelogrammis occupantibus totū ſpatium inter aſymptotos, diuide in quotlibet minimas particulas, ac poſtquam oſtenderis primam, ſecundam. &c. particulas figuræ ſingulas ſingulis parallelogrammis æquales, conclude deinde de reliquis figuræ partibus, quod ſint æquales reliquis parallelogrammis totum aſymptotōn ſpatium occupantibus. Scilicet, mi homo, doces me tua iſtà fallaciſsimà per minimas particulas argumentatione ſaltum Rhedium in Geometricà Philoſophia ſaltare. Quis verò Philoſophus Geometricus mihi impunè permiſerit contra primum principium huius 4 definitionis ſic ratiocinari? Partes aliquæ prioris figuræ ſunt æquales aliquibus partibus, ſiue figuris occupantibus partem ſpatij inter aſymptotos, ergo tota reliqua figura eſt æqualis reliquis partibus, ſiue figuris occupantibus totum ſpatium inter aſymptotos? Quod cum ſit infinitum, idem eſſet ac ſi dicerem figuram finitam eſſe æqualem infinitæ, nempè occupanti totum ſpatiū, quod eſt infinitum inter aſymptotos, ac ſic finiti ad infinitum eſſet proportio, contra hanc defin. 4.

5 *Addo pro me geometricè demonſtratam rationem, qua fit vt, dum inter aſymptotos affirmaui poſſe parallelogrammata extenſione etiam infinita, eſſe æqualia parallelogrammo vel minimo, intellexerim ſemper de finitè infinitis extenſione terminorum parallelogrammis. Scilicet ne Apollonio, & mihi contradicerem. Nam Apollonius Conic. lib. 2. prop. 14; & nos, ſine Apollonio, in Apiario 3, Progym. 2. propoſ. 3, demonſtrauimus aſymptoton, & hyperbolen in concurſu peruenire ad interuallum ſemper minus quolibet dato. Itaq; etiam ſumpta extremà, ac minimà parte figuræ, quam fingat quis æqualem figuræ conflatæ in partialibus occupātibus totum ſpatium aſymptotōn, nūquam poteſt comparationem facere cum extremà parte figuræ occupantis totum ſpatium inter aſymptotos; datà enim qualibet parte figuræ comparandæ cum aſymptotōn ſpatio, & comparatà cum qualibet acceptà, vel acceptibili parte verſus extremum. (ſi ſic loqui liceat de non habente extremum) ſpatij inter aſymptotos, ſemper adhuc minor, ac minor ſupereſt in infinitum, etiam* *Cur non poſſit fieri cōparatio figuræ cū ſpatio inter aſymptotos.*

poſt acceptas omnes partes figuræ, quam cum ſpatio inter aſymptotos aliquis compararit.

Implicantia comparationis. &c.

6 At enim, inquies, comparatur figura cum ſpatio inter aſymptotos quatenus id eſt vel infinitè finitum, vel finitè infinitum, eoq; modo cum figura poteſt comparari. Hoc ſi dicas te ipſe implicas; eſſet enim id ſpatium inter aſymptotos, & inter non aſymptotos. Nā dum illi vel in recto, vel in obliquo finem aliquem aſsigas, terminum indicas, ad quem (in appoſita figura) hyperbolica linea FE-D cum peruenerit, coincidet cum recta AB, ac proinde non erit aſymptotos. At enim rurſus figura, quæ comparatur cum ſpatio inter aſymptotos, etiam ipſa diuiſibilis eſt in partes in infinitum. Si ergo figuræ partes partibus ſpatij inter aſymptotos æquales oſtendantur, ergo tota figura toti ſpatio inter aſymptotos æquabitur. Scilicet hoc eſt in Geometrica Philoſophia figurarum quantitates, ac proportiones per partes demonſtrare.



Per indiuiſibilia infinita quælibet figura cuilibet æqualis.

Quoniam verò quælibet figura eſt diuiſibilis in infinitum, quælibet ad quamlibet, licet minima ad maximam, habet proportionem æqualitatis, ſemper enim in minima, & maxima erunt partes in infinitum comparabiles. At verò nec etiam cum hoc effugio, & abſurdo figura vlla, licet in infinitum diuiſibilis, comparari poteſt cum ſpatio inter aſymptotos, quia id ſpatium, licet & ipſū ſit in infinitū diuiſibile (ideo enim eſt inter aſymptotos, id eſt nūquam ſe contingentes, licet ſemper inter ſe accedentes lineas) tamen, vt prædictum eſt, eſt in ea ipſa infinitate differens genere ab infinitate figuræ, cui comparatur. Figura enim eſt actu finita, terminiſq; concluſa, licet potentià infinita, ſiue infinitè diuiſibilis, ſpatium verò inter aſymptotos eſt actu, ac ſemper ſine termino, ac infinitum, finibus non vndiq; concluſum, ac extra figuram. Quare iterum in abſurda primarum rationum relaberis contra definitiones & figuræ, & proportionis inter figuras. Nunquam enim per partes

Figura, & ſpatiū inter aſymptotos differunt toto genere.

(licet;

(licet numero infinitas per deſignationem) multiplicatas in figura peruenies ad æqualitatem ſpatij inter aſymptotos actu non figurati, hoc eſt non terminati.

7 *Denique quid me premis hac tua doloſa per partes argumentandi ratione, ac non ego vno ictu totam hanc ſyluam partium amputo? Relege definitionem primam huius lib.* Pars eſt magnitudo magnitudinis minor maioris, quando minor metitur maiorē. *Spatij inter aſymptotos infiniti, ſiue figuræ, quam fingas occupare totum id ſpatium, illiq; æqualem eſſe, non ſunt verè partes, per quas poſsis figuram (ſi licet ſic loqui) ſpatij inter aſymptotos comparare, aut metiri; nulla enim pars infinitũ metitur. Ac ſi velis eius aſymptotæ (liceat ſic appellare) figuræ partes eſſe ſaltem ex parte aliquantas, quæ ſcilicet multiplicatæ deficiant à toto eo ſpatio aſymptotωn, nihil agis, ac rurſus cogeris fateri non poſſe comparari totũ id ſpatium cum vlla figura. Quare, gratijs actis, ac tua cum venia recuſo paradoxum à te mihi oblatum.*

Comparatio figuræ cũ ſpatio ĩter aſymptotos eſt contra definitiones 1, & 4 huius libri.

8 *Adhuc perſtas? Ac quaſi ſtudioſus mei geometricè ditandi, relicta argumentatione à partibus, offers demõſtrationem aliquam indirectam, & cum Archimede pro me arguis? Scilicet vis dicam: figura quæpiam neq; maior, neq; minor eſt parallelogrammis omnibus inter aſymptotos, ergo eſt æqualis. Velles, mi homo, me ſub vmbrâ Archimedis fœdius labi, quàm nuper in antecedenti Corollario Vieta contra ipſum Archimedem. Nam calumnia illa Vietana ſaltem argumentationem, & comparationem vſurpabat, licet inferiori, non tamen ſupremo, ac toto genere differentium; ſcilicet comparabat angulos cum angulis; at hic facerem, te doctore, comparationem figuræ cum non figurâ, id eſt terminatæ quantitatis cum interminata inter aſymptotos. Figura igitur cõparata cum ſpatio inter aſymptotos, non eſt quidem maior eo ſpatio, ſed tamen ſemper eſt minor, propter demonſtrata in antecedentibus. Non ſuades ergo bonam indirectè argumentandi formam, immò directè pugnantem cum primo principio è quarta hac definitione, de ijs quæ proportionem inter ſe habent in geometrica philoſophia.*

Nullæ argumẽtatione indirectâ comparari poſſunt figura, & ſpatium inter aſymptot.

Apage igitur cum tuis pro me, ſiue potius contra me cauillationibus, ac me pro meo, & vero ſenſu intellige, dum parallelogrammata, & eorum dimidia, ſingula inter aſymptotos, ita inter ſe compa-

raui, vt aſſirmarim etiã à minimo eorum aliquo poſſe ſuperari duplà quantitate quodlibet eorum ſeorſim ſumptum etiam infinitum, ideſt ſemper finitè in infinitum terminis maioribus, ac maioribus extenſum. Ac qui ſe non continent intrà noſtros hoſce terminos dũ verſantur inter aſymptotos, intelligant ex antedictis ſe inciſuros in verè aſymptotos, ideſt infinitos geometricos paralogiſmos. Quos indicare eſt vere amare philoſophicam veritatem; licet non ſim neſcius à veritate, dum ea nubit inuiſo animo, progigni odium, turpiſſimum è pulcherrimà matre natum.

§. VII.

COROLLARIVM III.

Infiniti ad infinitum non eſt proportio, iuxta hanc 4 defin.

Per indiuiſibilia geomtricè philoſophari diſſonat ab hac 4 definit.

EX hac eadem definitione 4. patet potiſſima ratio cur viri in Geometrica Philoſophia doctiſſimi reprobarint cognitionẽ, & cõparationem figurarum inter ſe per cognitionem, & cõparationem indiuiſibilium in figuris; ſunt enim in qualibet figura infinita indiuiſibilia; & infiniti ad infinitum nulla eſt proportio, & iuxta hanc definitionem indiuiſibilia vnius figuræ quantumlibet multiplicata non poſſunt ſuperare indiuiſibilia alterius figuræ, quia ſunt infinita, nec vnquam ſumĩ omnia poſſunt, nec determinari poteſt eorum numerus, ac perinde nec figuræ ex ijs conflatæ poſſunt inter ſe comparari, nec in ſe ipſis ſingillatim agnoſci quod ad quantitatem. Satis eſto hæc quaſi in tranſitu indicare Tyronibus in Geometrià philoſophiantibus, quæ patentiſſima ſunt ex verbis huius defin. 4. Plura non addimus circa hoc tertium Corollarium, quia ſatis doctè aliqui aliqua, (plurima, ſi vita ſuperfuiſſet, ſcripturi) ſcripſerunt in hoc genere; ac ne videamur vllis priuatim infenſi, dum publicè prodeſſe nitimur. Tantùm, pro inſtituto exponendorum elementorum geometricorum, indicamus hallucinationes, vt Tyrones diſcant in Geometrica Philoſophia diſpicere (quod eſt in prouerbio) Quid diſtent æra lupinis.

D E-

DEFIN. V.

In eàdem proportione dicuntur eſſe magnitudines, prima ad ſecundam, & tertia ad quartam, quando æquè multiplices primæ, & tertiæ æquè multiplices ſecundę,& quartæ,ſecundum quamuis multiplicationem, vtraq; ab vtraque vel æquè deficiunt, vel æquè æquales ſunt, vel æquè ſuperant, ſi ordine ſumantur. *Vt ſi horũ quatuor numerorum* 8, 6, 4, 3 *primi,& tertij accipiantur æquè multiplices* 16, *&* 8: *ſecundi, & quarti* 18, *&* 9, *& collocentur eo ordine, quo numeri, quorum ſunt multiplices, hoc nimirum* 16, 18, 8, 9; *ſi iam primus minor ſit ſecundo, erit & tertius quarto minor; & ſi maior, maior; ſi æqualis, æqualis; ſi, inquã, hoc ſemper contingat, dicentur quatuor magnitudines in eadem eſſe proportione.*

§ VIII.

SCHOLION I.

Noſtra methodus non patitur difficultates vulgatas definitionis quintæ huius lib. 5.

DVm noſtra methodus Tyrones traducit per proportiones rationales quantitatis in lineis, planis, ſolidis, & in locum extremum ſeponit ea, quæ pertinent ad proportiones irrationales, non eget expoſitione hu. 5 definit. per æquemultiplicia, quorum appoſitione tenebræ, ac turbæ non leues Tyronibus excitantur. Vide ſeq. ſchol. 2 *tam pro rationali, quam pro irrationali proportione.*

§ 9.

§IX.

SCHOLION II.

Expoſitio diſtincta, facilis, ac breuis definit. 5 de in eadem proportione ab æquemultiplicibus. &c.

AD diſsipandas omnes nubeculas, quæ in hac 5, & in 7 definitione poſſunt offundi animis Tyronum, accipe à nobis paucula ſequentia pro prolixioribus apud aliquos alios. Ac primo rectè percipiendus eſt ſenſus verborum definitionis, quem ſatis apertum habes in appoſita breui explicatione, & applicatione in numeris ab interprete Lantzio. Addo & aliter, & breuiter.

1 Si antecedentium æquemultiplicia æqualia ſint, vel minora, vel maiora æquemultiplicibus conſequentium, dicuntur antecedentia eſſe in eadẽ proportione cũ conſequentibus. *Apertè, ac breuiter dici poterat à doctore Geometra:* In eadem proportione dicuntur eſſe quantitates, quando antecedens primæ proportionis toties continet conſequens, vel à conſequente toties continetur, quoties ſecundæ proportionis antecedens continet conſequens, vel continetur. &c. *Vt inter* 8, & 4 *eadem eſt proportio, quæ eſt inter* 4, & 2. *id eſt dupla. Sed hæc definitio comprehendit tantùm ſpecies, & genera proportionis multiplicis, ſeu rationalis, quæ poteſt exprimi numeris inter ſe multiplicibus, quiq; non extenduntur ad alterum ſupremum genus proportionis irrationalis, quæ numeris exprimi nequit, & in ijs eſt quantitatibus, quæ ſunt incommenſurabiles, & quarum altera non completè poteſt alteram comprehendere. Igitur Geometra Philoſophus, vt definitionem vniuerſalem afferret comprehendentem quantitates tam multiplices, & rationales, quàm irrationales, & incommutabiles, confugit ad vnum aliquid, quod ſit commune commenſurabilibus, & incõmen-*

Defin. 5 continet etiã irrationales proportiones

menſurabilibus, vt ſciatur an quantitates propriè ſint in eadem proportione, & cognoſcatur quando ſunt in eadem proportione.

Ingenioſè ab æquemultiplicibus indiciũ eiuſdem proportionis etiam in irrational. &c.

2 *Indicium autem id commune ingenioſiſsimè ſumpſit ab æquemultiplicibus quantitatum ſiue rationalium, ſiue irrationalium. Nam ſi datæ quantitates ſunt in eadem proportione, neceſſarium eſt, euidens, ac per ſe notum etiam æquemultiplices datarum quantitatum debere eſſe in eadem proportione; vt magis etiam è ſequenti noſtra expoſitione patebit.*

Duplex idẽtitas eiuſdem proportionis. &c.

In eadem autem proportione duplex idẽtitas eſt, generica, & ſpecifica. Nam dum inter 8, & 4, & inter 4, & 2 eſt eadem proportio dupla antecedentium ad conſequentes numeros, vel ſub dupla conuerſo modo, eſt cum ſpecie duplæ proportionis etiam genus proportionis maioritatis antecedentium ad conſequentes quãtitates, & in ſubduplà conuerſo modo eſt genus minoritatis. &c. Itaq; quoniam identitas ſpecifica proportionum ſupponit ſemper neceſſario etiam identitatem genericam vel excedentiæ, vel deficientiæ, vel æqualitatis, ideo ingenioſè, ac certò ſumitur ea generica identitas pro indicio identitatis ſpecificæ inter quantitates.

Expoſitio in numeris.

Quoniam autem vt ſe habent quantitates inter ſe, ita & earum æquemultiplices, ſi 2 eſt duplus vnitatis 1, & dupli eorum numerorum erunt in eadem proportione dupla 4, & 2; & ſi quantitates non ſint multiplices, ſed incommenſurabiles, & abditam habent proportionem ſpecificam identitatis, habebunt tamen apertam proportionem genericam identitatis, ſcilicet vel excedentiæ, vel deficiẽtiæ, vel æqualitatis in ſuis æquemultiplicibus. Sicut in eadem proportione inter 2, & 1 inter 4, & 2 ſi neſcirem eſſe duplam, vt tamen ſcirem eſſe eos numeros in eadem proportione, & confugerem ad genericam identitatem, ideſt ad æquemultiplicium vel excedentiam, vel deficientiam, vel æqualitatem antecedentium ad conſequentes, ſcirem, & concluderem etiam eſſe identitatem ſpecificam inter eos numeros 2, 1; 4, 2. Antecedentium 2, & 4 æquemultiplices ſint 6, & 12; conſequentium 1, & 2 ſint æquemultiplices 2, & 4. Quoniam 6, & 12 excedunt 2, & 4, eſtq; inter æquemultiplices generica identitas proportionis excedentiæ, euidens conſequentia, & indicium eſt quantitates, quarum ſunt multiplices, eſſe etiam in eàdem ſpecificà proportione inter ſe, licet ea eſſet mihi ignota indiuidualiter, ideſt eſſe vel duplã,

vel

vel triplam. &c. vel etiam licet ea eſſet, quæ numeris exprimi non poſſet. Propterea dicit Geometra: Quorum æquemultiplicia vel excedunt, vel deficiunt, &c. ſunt in eadem proportione, ſcilicet ſpecificà indicatà à generica excedentiæ, deficientiæ. &c.

Diſtinctio propoſitionis 4 hu. à definitione hac 5.

3 *In propoſitione tamen 4 huius lib. 5. demonſtratur quando quantitates ſunt in eadem proportione, earum æquemultiplices eſſe inter ſe non ſolum in eadem generica proportione excedentiæ, deficientiæ, &c. ſed etiam eſſe in eadem ſpecificà proportione, in qua ſunt eæ quantitates, quarum ſunt æquemultiplices; ſiue ea proportio nota ſit in indiuiduo, dupla, tripla, ſeſquialtera. &c. ſiue ſit ignota, irrationalis, & quæ numeris pateſieri nequeat. Si quæ quantitates ſunt in eadem proportione, earum æquemultiplices ſunt & ipſæ in eadem ſaltem generica exceſſus, defectus. &c. & conuerſà ratione, ſi æquemultiplicia ſunt in eadem excedentia, deficientia. &c. etiam eæ quantitates, quarum ſunt æquemultiplices, ſunt in vna, eademq; ſpecificà proportione, & in hoc conuertuntur, & per ſe nota hæc ſunt ſine alia demonſtratione, propter, & iuxta in antecedentibus explicata. At verò quod æquemultiplicia ſunt etiam in eadem proportione ſpecifica, in qua ſunt eæ quantitates, quarum ſunt æquemultiplicia, non per ſe notum eſt, nec facile concedetur, niſi demonſtretur, quod fit in 4. propoſ. huius. Igitur in hac definitione ea, quæ ſola egent expoſitione verborum, vt pateat veritas definitionis, diſtinguenda ſunt ab ijs, quæ demonſtrationem poſtulant, quæque à Geometra non ponuntur in definitione, iuxta prædicta.*

Defin. 5 eſt axioma apud aliquos.

4 *Poſſet hæc definitio reponi inter prima principia, ſiue axiomata, quæ habet Commendinus ad finem definitionum huius lib. 5.* Eiuſdem, ſiue equalium æquemultiplices inter ſe æquales ſunt: *&*. Quarum eadē æquemultiplex eſt, vel quarum æquales ſunt equemultiplices, & ipſe inter ſe ſunt æquales. *Vbi vides in proportione æqualitatis conſonare inter ſe æquemultiplicia cum ijs, quorum ſunt æquemultiplicia. Pariter, iuxta hanc 5 definitionem, etiā in proportione inæqualitatis conſonāte ſaltem in generica inæqualitate exceſſus, defectus. &c. Rectè Orontius ad hanc 5 defin.*

Axiomata pro euidentia hu. 5 def.

In proportionibus ſicuti antecedentia ad inuicem, & ipſa pariter conſequentia mutuam quandam inter ſe videntur habere relationem: haud diſſimiliter ipſorum antecedentium pariter,

&

& conſequentium æquemultiplicia, iuxta quamuis multiplicationem coaſſumpta fraterna quadam rationum colligantur ſimilitudine, atq; è diuerſo: tametſi alia inter ipſa æquemultiplicia, ab ea, quæ inter partes offenditur ſubmultiplices, contingat plerumq; rationum identitas.

DEFIN. VI.

Magnitudines, quæ eandem proportionem habent, proportionales vocantur, *Vt 4, & 2. item 6, & 3, cùm habeant eandem proportionem, nempe duplam, dicũtur proportionales.*

DEFIN. VII.

Quando æquè multiplicium multiplex primæ ſuperat multiplicem ſecundæ; at multiplex tertiæ non ſuperat multiplicem quartæ; prima ad ſecundam dicitur habere maiorem proportionem, quàm tertia ad quartam.

§. IX.

SCHOLION.

SEptima definitio lucem habet ab ijs, quæ adnotauimus ad antecedentem quintam. Hîc enim explicatur quid dicatur, aut quid intelligatur, quando dicitur prima habere maiorem proportionem ad ſecundam quantitatem, quã habet tertia ad quartam. Applica tu exemplis numerorum. Duo notanda. 1 *non eſſe neceſſe, vt ſecundum omnem multiplicationem multiplex primæ exce-*

dat multiplicem ſecundæ, ſed ſatis eſt, vt vel ſemel, nuſquam tamen multiplicē tertiæ ſuperante multiplicem quartæ. 2, quod dicitur de multiplice primæ ad multiplicem ſecundæ, intellige etiam de multiplice tertiæ ad multiplicem quartæ, ſcilicet dici tertiam quantitatem habere maiorem proportionem ad quartam, quàm prima ad ſecundam, quando tertiæ æquemultiplicia aliquando ſuperant æquemultiplicia quartæ, nō ſuperātibus æquemultiplicibus primæ æquemultiplicia ſecundæ.

DEFIN. VIII.

Analogia eſt proportionum ſimilitudo.

DEFIN. IX.

Analogia in tribus minimùm terminis conſiſtit. *Vt in his numeris 4, 6, 9. vt enim eſt primus ad ſecundum, ita ſecundus ad tertium.*

§ X.

SCHOLION.

Index copiæ circa analogias.

De Analogiarum (non ſolum de tribus præcipuis generibus Arithmetica, Geometrica, Harmonica) ſpeciebus decem, quid ſingulæ ſint: circa ſingulas varia theoremata, & problemata: earum miras aliquas præcipuas affectiones, & alia plura curioſa, & iucunda, quibus illuſtres hanc 8 definitionem, habes apud nos in 1 parte 2. Tom. ad propoſitiones 10, & 13 Præter Pappum à nobis citatum, vide & Clauium ad defin. 3 huius lib. 5.

DE-

DEFIN. X.

Cum fuerint tres magnitudines proportionales, prima ad tertiam duplicatam proportionem habere dicitur eius, quã habet ad ſecũdam. *Vt cum fuerint proportionales hi tres numeri 2, 4, 8, erit proportio, quam habet 2 ad 8, duplicata eius, quam habet ad 4.*

DEFIN. XI.

Cum fuerint quatuor magnitudines proportionales, prima ad quartam triplam proportionem habere dicitur eius, quam habet ad ſecundam. Et deinceps ſemper vna amplius quoadvſque proportio extiterit. *Vt ſi ſint proportionales hi quatuor numeri 2, 4, 8, 16, erit proportio, quam habet 2 ad 16, tripla eius, quam habet ad 4.*

§ XI.

SCHOLION.

Veteris ſcholiaſtæ hallucinatio.

IN *veteri græco Scholio apud Commànd. ante hunc li.* 5 Analogia dicitur proportionis proportio. *Fallitur tamen author eiuſce Scholij in exemplo duarum linearum in dupla proportione, & in proportione quadratorum ex illis lineis, quæ quadrupla eſt; & ſimilitudo non eſt duplæ, & quadruplæ proportionis, ac proinde non eſt analogia, quæ, ex definitione, requirit ſimilitudinem proportionum. &c.*

§ XII.

SCHOLION.

Plura, quæ dici poſſunt abſtractè pro explicatione 10, & 11 definitionum, vide apud nos in concreto clariora, & ad praxes, in 2 par. 2. Tomi, ad propoſ. 19, 20, vbi primum Geometra praxim habet 10 hìc definit. Vide & apud nos in praxi non ſemel, præſertim ex vſu geometrico centri grauitatis, velut vbi de triplicata proportione diametrorum in ſphæris, &c. ad 20 prop. lib. 6.

DEFIN. XII.

Homologæ, ſeu ſimilis rationis magnitudines dicuntur eſſe, antecedentes antecedentibus, conſequentes conſequentibus.

DEFIN. XIII.

Permutata ratio, eſt ſumptio antecedentis ad antecedentem, & conſequētis ad conſequentē.
Demonſtratur propoſ. 16, in qua cum eſt vt A ad B, ita C ad D, eſt quoq; permutando, vt A ad C, ita B ad D.

§ XIII.

SCHOLION I.

Expoſitio permutatæ proportionis.

DEfinit quoſdam modos argumentandi demonſtratiuè in proportionalibus quantitatibus apud philoſophos Geometricos. Quos deinde firmos eſſe demonſtrat in lib. 5. propoſitionibus. Igitur hic eos accipe tantùm, vt definitos, & explicatos; vt verò ſunt theoremata demonſtrata vide in lib. 5. Interim earum veritatem in numeris hìc oſtendemus. Permutata proportio dicitur & alterna ratio, & in demonſtrationibus ab hac forma dicitur: ergo & permutando. *vel:* alternando. *vel:* ergo & viciſſim. *Si eſt, vt 8 ad 4, ita 2 ad 1, ergo permutando, eſt etiam vt 8 antecedens primæ proportionis ad 2 antecedens ſecundæ proportionis, ita 4 conſequens primæ proportionis ad 1 conſequens ſecundæ proportionis.*

Proportionis permutatæ varia nomina, & formulæ.

§ XIV.

SCHOLION II.

Cur in argumentatione à permutando debeant termini eſſe in eodem genere.

1 *NOtant quidem quidam doctè, ac verè in hac forma ſola argumentationis debere eſſe vtriuſq; proportionis terminos in eodem genere, in reliquis verò modis ſequentium geometricarum illationum circa proportiones quantitatum, velut in conuerſa, compoſita proportione, &c. poſſe eſſe primæ proportionis terminos vnius generis, ſecundæ verò proportionis poſſe eſſe terminos in genere diuerſo à genere primæ proportionis. Verbi*

gratia

gratia. Si in primæ proportione ſit vt linea ad lineam, ita in ſecunda proportione ſit ſuperficies, ſiue figura ad figuram, non licebit permutando inferre, ergo vt antecedens linea ad antecedentem ſuperficiem, ſic conſequens ad conſequentem; fit enim tranſitus à genere in diuerſum genus, inter quæ non eſt geometrica proportio, iuxta 4 definit. huius, & notata à nobis ad eam; linea enim quantumuis extendatur, vt linea, ideſt in longum, numquam æquabit ſuperficiem. At in alijs ſequentibus formis argumentandi, velut in ſequēti ab inuersà proportione, licebit inferre, ſi eſt vt linea antecedens ad lineam conſequentem, vt ſuperficies antecedens ad ſuperficiem conſequentem, ergo, & inuertendo, vt linea conſequens ad lineam antecedentē, ſic ſuperficies conſequens ad ſuperficiem conſequentē.

2 *At vnde iſtæ anguſtiæ in argumentatione à permutata proportione, vt ea ſola debeat habere vtriuſq; proportionis terminos in eodem genere? E modò dictis patet. nam in alijs formis argumentandi circa proportiones fiunt illationes in eadem proportione, ideſt conferuntur variè inter ſe termini, & eorum partes in eadem proportione, in qua ſunt; ideſt termini primæ proportionis inter ſe, termini ſecundæ proportionis inter ſe, lineæ cum lineis, ſuperficies cum ſuperficiebus; & in nullis earum illationum fit tranſgreſsio à genere terminorum in vna proportione ad terminos alterius proportionis, nec itur à terminis in vno ad terminos alterius generis; ideo in ſuo quæq; genere, licet diuerſo, rectè procedunt illationes. At quoniam in ſola formà à permutando fit tranſitus, & collatio terminorum primæ proportionis, etiam cum terminis ſecundæ proportionis, ab antecedente primæ ad antecedens ſecundæ à conſequente primæ ad conſequens ſecundæ, ideo, vt poſsit eſſe legitima illatio, & proportio iuxta 4 defin. debent primæ, & ſecundæ proportionis termini eſſe in eod. genere. Aliqui Geometricæ Philoſophiæ imperitiā in ſe produnt, dum non permutando, ſed permiſcendo conferunt antecedens primæ proportionis cum conſequente ſecundæ, & antecedens ſecundæ cum conſequente primæ. Abſurdiſsimū enim eſt, ſi eſt vt 8 ad 4, ita 2 ad 1, inferre: ergo permutando eſt, vt 8 ad 1, ſic 2 ad 4. Fœditas enim permixtionis, pro permutatione, ſtatim per ſe patet.*

§ 15.

§ XV.

SCHOLION III.

Hæreſis de æternitate mundi ex ignorantià huius 13 definitionis malè firmata.

Hinc fœdæ hallucinationes aliquorum philoſophorum truncatorum, & mancorum, qui ſcilicet profitentur ſe philoſophos ſine cognitione potioris, & certioris partis philoſophiæ, quæ eſt in primis Geometrica. Quales Auerroiſtæ pleriq; qui, dum hæreſim de Mundi æternitate aſſirmant, & aſſertionis illius infirmitatem vident: Vt ſe habet voluntas Dei noua (*vt aiunt*) ad effectum antiquum, ideſt ad Mundum ab æterno, ſic voluntas Dei antiqua, ideſt ab æterno, ad effectum nouum, ideſt ad Mundum in tempore, *conantur illam fulcire ineptiſſimè, ac fœdiſſimè formà argumentationis ab hac 13 definitione ſic: Vt voluntas noua ad effectum nouum, ſic antiqua, ſiue æterna in Deo ad effectum antiquum, ſiue æternum; ergo, & permutando, vt voluntas noua ad effectum antiquum, ſic voluntas antiqua ad effectum nouum; at voluntas noua non ponit effectum antiquum, qui iam ſupponitur ante voluntatem nouam, ergo nec voluntas Dei ab æterno potuit ponere in tempore effectum nouum, ideſt mundum. ergo ab æterno eſt mundus cum volūtate Dei æterna. Papæ acutos Philoſophos, ac geometricæ philoſophiæ peritiſſimos, & inconcuſſos æterni Mundi fulciores! Nec rudes quidē Tyrones definitionis huius 13 verba vel leuiter percipientes tam fœdè laberentur. Peccant Auerroiſtæ non ſolum in hæretica materia, ſed etiam in geometrica forma dupliciter; primo, quia eam vſurpant in duabus proportionibus rerum diuerſi generis, & à generis vnius proportione tranſiliunt ad genus alterius proportionis, contra prædicta in expoſitione conditionum neceſſariarum ad veritatem geometricæ ratiocinationis à permutatà proportione. Proportio antiquæ voluntatis ad antiquum effectum alterius generis terminos habet à proportione nouæ voluntatis*

tatis ad nouum effectum, ideo ex præſcripto geometrico non licet tranſilire ab altera in alteram. &c. Secundo, peccant in abuſu etiã altero permutatæ proportionis, quia non permutant, ſed permiſcent terminos, & ab antecedente prioris proportionis, ideſt à voluntate noua tranſiliunt ad conſequens ſecundæ proportionis, ideſt ad effectum antiquum; at permutata proportio eſt tantum antecedentis ad antecedens, & conſequentis ad conſequens, atq; in proportionibus terminorum eiuſdem generis. Relege notata, & cauta in antecedenti ſcholio 2.

Noſtrum eſt, qui Geometricam Philoſophiam profitemur, expendere ſi quando aliqui ageometrici noſtra vſurpent, an id legitimè faciant, vt rectè noſtris vtantur, non abutantur. Vides quanti interſit recta intelligentia vel vnius geometricæ definitionis, quæ tanti momenti hæreſim tam apertè ſubruit, ac meritò vilitat.

DEFIN. XIV.

Conuerſa ratio eſt ſumptio conſequentis, vt antecedentis, ad antecedentẽ vt ad cõſequentẽ. *Vide cor. prop. 4.*

SCHOLION:

SI eſt 9 ad 6 vt 12 ad 8, ergo conuertendo, vel è contrario, erit quoq; 6 ad 9 vt 8 ad 12.

DEFIN. XV.

Compoſitio rationis eſt ſumptio antecedentis vnà cum conſequente, vt vna ad conſequentem. *Demonſtratur prop. 18, in qua cum eſt vt ◡AB ad ED, ita CF ad FD, eſt quoque vt ◡AB ad FD, ita CD ad FD.*

SCHO-

SCHOLION.

SI eſt vt 6 antecedens ad 4 conſequens, ita 3 antecedens ad conſequens 2; ergo & componendo 4 cum 6, erit 10 ad conſequẽs 4; vt 3 cum 2, ideſt 5 ad 2. &c.

DEFIN. XVI.

Diuiſio rationis eſt ſumptio exceſſus, quo antecedens ſuperat conſequentẽ, ad conſequentẽ.
Demonſtratur propoſ. 17, in qua cum eſt vt AB ad BE, ita CD ad DE, eſt quoque vt AE ad EB, ita CF ad FD.

SCHOLION.

SIt 16 compoſitum ex 12, & 4, in eadem proportione ad partem 4, in qua eſt compoſitum 8, ex 6, & 2, ad partem 2; erit etiam vt pars 12 ad partem 4, ita pars 6 ad partem 2. Si eſt vt 16 ad 4, ita 8 ad 2, ergo, diuidendo, eſt vt 12 ad 4, ita 6 ad 2. Compoſita erant in vna eademque proportione quadrupla ad partes, 16 ad 4, 8 ad 2; partes ſunt in vna, eadẽq; tripla inter ſe 12 ad 4, 6 ad 2

DEFIN. XVII.

Conuerſio rationis eſt ſumptio antecedentis ad exceſſum, quo antecedẽs cõſequentẽ ſuperat.
Demonſtratur prop. 19, in qua cum eſt vt AB ad CD, ita AE ad CF, erit quoq; EB ad FD, vt eſt AB ad CD.

SCHOLION.

Sit totum 10 diuiſum in duas partes 6, 4. Item ſit totum 20 diuiſum in duas partes 12, & 8; & ſit vt totum antecedens 10 ad conſequens, ideſt ad partem 4, vt alterum totum antecedens 20 ad conſequentem, ideſt ad partem 8; erit etiam, vt primum antecedens 10 ad 6 exceſſum, quo ſuperat conſequens 4, ita & antecedens 20 ad exceſſum 12, quo ſuperat conſequens 8.

Si eſt vt 10 ad 4, ita 20 ad 8, ergo & conuertendo, vel per conuerſionem rationis, erit vt 10 ad 6, ſic & 20 ad 12.

DEFIN. XVIII.

Ex ęquali ratio eſt cùm plures fuerint magnitudines, & aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ, & in eadem ratione ſumantur, fueritq; vt in primis magnitudinibus prima ad vltimam, ita in ſecundis prima ad vltimam. Vel eſt ſumptio extremarum per ſubtractionem mediarum. *Demonſtratur 22, in qua cum eſt vt A ad B, ita D ad F, & vt B ad C, ita E ad F, erit ex æquali, vt A ad C, ita D ad F.*

SCHOLION.

Sint tres numeri 18, 12, 6, & alij tres 12, 8, 4, & ſint bini in eadem proportione, vt 18 ad 12, ſic 12 ad 8, & vt 12 ad 6, ita 8 ad 4; igitur ex æquali, ſiue ex æqualitate (ſubductis medijs 12, 8, & ſumptis extremis) erit vt 18 ad 6, ita 12 ad 4.

DEFIN. XIX.

Ordinata proportio eſt, cum fuerit vt antecedens ad conſequentem, ita antecedens ad conſequentem, vt autem conſequens ad aliã quampiam, ita conſequens ad aliam quampiam. *In propoſ. 20, & 23, in primis magnitudinibus antecedens eſt A, conſequens B, alia quæpiam C, in ſecundis antecedens eſt D, conſequẽs E, alia quæpiam F.*

SCHOLION.

SInt 12, 6, 4, & 6, 3, 2; ſi eſt 12 ad 6, vt 6 ad 3, & ſit etiam vt 6 ad 4 ſic 3 ad 2, dicitur ordinata proportio, ſcilicet eodem ordine procedens in primis, & ſecundis terminis.

DEFIN. XX.

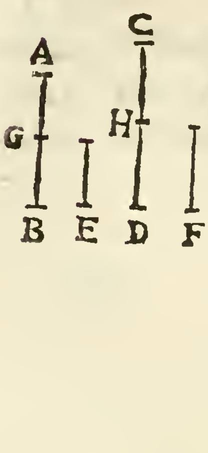
Perturbata proportio eſt, quando tribus exiſtentibus magnitudinibus, & alijs ipſis numero æqualibus, fuerit vt in primis magnitudinibus antecedens ad conſequentem, ita in ſecundis antecedens ad conſequentem. Vt autem in primis conſequens ad aliam quampiam, ita in ſecundis alia quæpiam ad antecedentem. *Vt in 21, & 23 prop. in primis tribus magnitudinibus antecedens eſt A, conſequens B, alia quæpiam C. In ſecundis antecedens eſt E, conſequens F, alia quæqiam D.*

SCHOLION.

Sint 12, 8. & 6, 4, vt quidem 12 ad 8, ſic 6 ad 4; & ſit, vt in prioribus numeris cõſequẽs 8 ad alium quẽpiam 4. v.g. duplus, ita & in poſterioribus numeris alius quiſpiam numerus 12 duplus ſit ad antecedẽtem 6; dicitur hæc illatio perturbata. Vtraque ſeries eſt: 12, 8, 4, & 12, 6, 4. Si eſt vt 12 ad 8, ita 6 ad 4, erit & vt 8 ad 4, ita 12 ad 6. Vide nos etiam ad 20, & 21 propoſ. huius lib. 5.

Propoſ. I. Theor. I.

Si fuerint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum æqualium numero, ſingulæ ſingularum æquè multiplices, quotuplex eſt vna magnitudo vnius totuplices ſunt omnes omnium.



Sint quotcumq; magnitudines AB, CD quotcumque magnitudinum E, F ęqualium numero, ſingulæ ſingularum æquè multiplices. Dico quam multiplex eſt

AB ipſius E, tam multiplices eſſe AB, CD ſimul ipſarum E, F ſimul. Cùm enim quam multiplex eſt AB ipſius E, tam multiplex ſit CD ipſius F; erunt in CD tot magnitudines æquales ipſi F, quot ſunt in AB æquales ipſi E. Diuidatur AB in magnitudines AG, GB æquales ipſi E, Et CD in CH, HD æquales ipſi F; eritque multitudo ipſarum AG, GB æqualis multitudini ipſarum CH, HD: cumque AG ipſi E, & CH ęqualis ſit ipſi F, erunt AG, CH æquales ipſis E, F. Eàdem de cauſa erunt GB, HD ipſis E, F æquales. quot ergo in AB ſunt magnitudines ęquales ipſi E, tot ſunt in AB, CD æquales ipſis E, F. Quare quàm multiplex eſt AB ipſius E, tam multiplices ſunt AB, CD ipſarum E, F. Si ergo fuerint, &c. Quod oportuit demonſtrare.

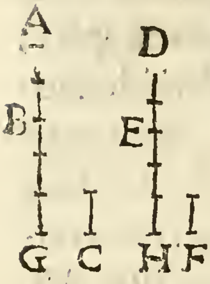
SCHOLION.

Sint numeri 4, *&* 3, *& vtriuſq; æquimultiplices, puta, tripli, ipſius* 4 *triplus* 12, *ipſius* 3 *æquemultiplex* 9, *ſi addantur inter ſe* 4, *&* 3, *& fiat* 7, *addantur & æquimultiplices* 12, *&* 9 *inter ſe, & fiat* 21, *quemadmodum alteruter multiplicium ſe habebit ad alterutrum* 4. *vel* 3, *quorum ſunt æquemultiplices, ſic & ſimul additi æquemultiplices in ſummam* 21 *ſe habebunt ad ſummũ duorum* 4, *&* 3, *ideſt ad* 7, *ideſt pariter in tripla proportione.* 4, 3, 7; 12, 9, 21. *Si eſt vt* 12 *ad* 4, *ita* 9 *ad* 3; *ergo erit pariter &* 21 *ad* 7 *in eadem proportione.*

Pro-

Propoſ. II. Theor. II.

Si prima ſecundæ æquè multiplex fuerit, atque tertia quartæ fuerit autem & quinta ſecundæ æquè multiplex, atque ſexta quartæ, erit & compoſita ex primà, & quinta æquè multiplex ſecundæ, atq; tertia, & ſexta quartæ.



ESto prima AB ſecundę C ęquè multiplex, atque tertia DE quartæ F: ſit verò & quinta BG ſecundæ C ęquè multiplex, atq; ſexta EH quartæ F. Dico & compoſitam ex primà, & quintà AG ſecũdæ C æquè multiplicem eſſe, atque eſt tertia, & ſexta DH quartæ F. Cùm enim quàm multiplex eſt AB ipſius C, tam multiplex ſit DE ipſius F, erunt in DE tot magnitudines æquales ipſi F, quot ſunt in AB æquales ipſi C. Eàdemque de causà quot ſunt in BG æquales ipſi C, tot erunt in EH æquales ipſi F: quot ergo ſunt in tota AG æquales ipſi C, tot ſunt in tota DH æquales ipſi F. Quã multiplex eſt ergo AG, ipſius C, tã multiplex eſt DH ipſius F. Ergo AG, compoſita ex prima, & quinta, ſecundæ C æquè multiplex eſt, atq; tertia, & ſexta DH quartæ F. Si ergo prima ſecnndæ, &c. Quod oportuit demonſtrare.

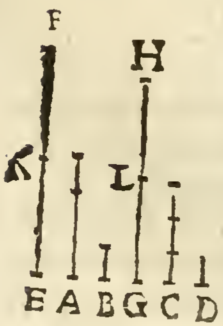
SCHO-

SCHOLION.

SInt numeri primus 2 æquemultiplex ſecundi numeri 1, vt tertius 4 eſt æquemultiplex quarti numeri 2, ideſt, primus, & tertius duplices ſecundi, & quarti. ſit quintus numerus 4 æquemultiplex ſecundi numeri 1, vt ſextus numerus 8 eſt æquemultiplex quarti numeri 2, ideſt ſint quintus, & ſextus numeri quadrupli ſecundi, & quarti; erit etiam numerus compoſitus, ex primo numero 2, & ex quinto numero 4, ideſt 6 erit æquemultiplex ſecundi numeri 1, ac compoſitus ex tertio numero 4, & ex ſexto numero 8, ideſt 12, eſt multiplex quarti numeri 2. 2, 1; 4, 2; 4, 8; 6, 12. *ſi 2 eſt ad 1, vt 4 ad 2; & ſi eſt 4 ad 1, vt 8 ad 2, erit etiam 6 ad 1, vt 12 ad 2.*

Propoſ. III. Theor. III.

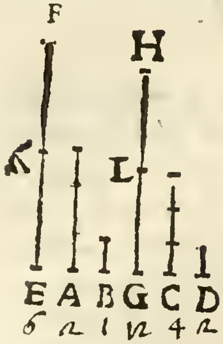
Si prima ſecundæ æquè fuerit multiplex, atque tertia quartæ, ſumantur autem æquè multiplices primæ, & tertiæ, erit ex æquali ſumptarum vtraq; vtriuſq; æquè multiplex, altera quidem ſecundæ, altera autem quartæ.



ESto prima A ſecũdæ B æquè multiplex, atque tertia C quartę D, & accipiantur ipſarum A, C æquè multiplices EF, GH. Dico æquè multiplicem eſſe EF ipſius B, atque eſt GH ipſius D. Cùm enim æquè multiplex ſit EF ip-

F ip-

F ipſius A, atque eſt GH ipſius C, continebuntur in GH tot magnitudines æquales ipſi C, quot in EF æquales ipſi A. Diuidatur EF in magnitudines EK, KF æquales ipſi A, & GH in GL, LH æquales ipſi C. Eſt autem multitudo ipſarũ EK, KF æqualis multitudini ipſarum GL, LH. Et



quia æquè multiplex eſt A ipſius B, vt C ipſius D, eſtque EK ipſi A, & GL ipſi C æqualis, erit & EK æquè multiplex ipſius B, vt GL ipſius D. Eadẽ de cauſa ęquè multiplex eſt KF ipſius B, vt LH ipſius D. Cùm igitur prima EK ſecundæ B æquè multiplex ſit, vt tertia GL quartæ D, ſit verò & quinta KF ſecundæ B æquè multiplex, vt eſt ſexta LH quartæ D; erit & compoſita ex prima, & quinta EF ſecundæ B æquè multiplex, atque eſt tertia cum ſexta GH quartæ D. Si ergo prima ſecũdæ, &c. Quod oportuit demonſtrare.

a propoſ. 2. 5.

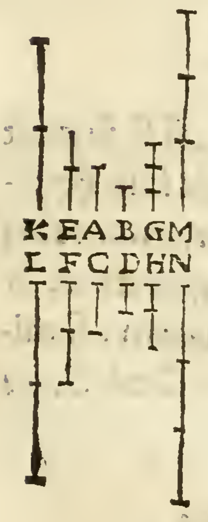
SCHOLION.

SI numerus primus 2 eſt æquemultiplex ſecundi numeri 1, ac eſt tertius numerus 4 multiplex quarti numeri 2. ideſt in dupla proportione; & primi numeri 2 ſumatur æquemultiplex 6, ac tertij 4 multiplex 12, ideſt in tripla proportione, erit 6 æquemultiplex ſecundi numeri 1, ac multiplex eſt 12 quarti numeri 2; ideſt in ſextupla proportione. 2, 1; 4, 2; 6, 12. Si eſt vt 2 ad 1, ita 4 ad 2, ergo erit vt 6 ad 1, ita 12 ad 2.

Pro-

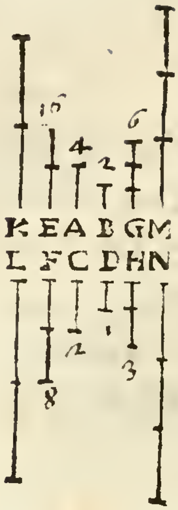
Propoſ. IV. Theor. IV.

Si prima ad ſecundam eandem habuerit proportionem, quam tertia ad quartam, habebunt & æquemultiplices primæ, & tertiæ ad æquemultiplices ſecundæ, & quartæ, ſecundum quamuis multiplicationem, eandem proportionē, ſi, vt inter ſe reſpondent, ſumpta fuerint.



HAbeat prima A ad ſecūdam B eandem proportionem, quam tertia C ad quartā D. Et accipiantur ipſarum A, C æquè multiplices E, F; ipſarū verò B, D quæcunque aliæ æquè multiplices G, H. Dico vt eſt E ad G, ita eſſe F ad H. Accipiantur enim ipſarum E, F ęquè multiplices K, L; ipſarum verò G, H æquè multiplices M, N. Et quia ita multiplex eſt E ipſius A, vt F ipſius C, acceptæque ſunt ipſarū E, F æquè multiplices K, L: [a] ita ergo multiplex eſt K ipſius A, vt L ipſius C. Eadem de cauſa ita multiplex eſt M ipſius B, vt N ipſius D. Et quia eſt vt A ad B, ita C ad D, acceptæque ſunt ipſarum A, *a propoſ. 3. 5.*

F C æquè



b def. 5. 5.

c def. 5. 5.

C æquè multiplices K, L, ipſarum verò B, D alię quæcunque M, N; b ergo ſi K ſuperat M, ſperabit & L ipſam N; & ſi æqualis, æqualis; ſi minor, minor; ſuntque K, L ipſarum E, F æquè multiplices, M verò, & N ſunt ipſarum GH, æquè multiplices; c eſt ergo vt E ad G, ita F ad H. Si ergo prima ad ſecundam &c. Quod oportuit demonſtrare.

LEMMA.

QVoniam demonſtratum eſt, ſi K ſuperet M, ſuperare & L ipſum N, & ſi ſit ęqualis, eſſe æqualem; ſi minor, minorem; conſtabit etiam, ſi M ſuperet K, ſuperare & N ipſum L, & ſi ſit æqualis, eſſe æqualem, ſi minor, minorem; atque idcirco erit vt G ad E, ita H ad F.

COROLLARIVM.

EX hoc manifeſtum eſt, ſi quatuor magnitudines fuerint proportionales, & cõuerſim proportionales eſſe. *Hoc eſt ſi eſt vt A ad B, ita C ad D, eſſe quoque B ad A, vt D ad C.*

SCHO-

SCHOLION I.

Sint antecedentes vtriuſq; proportionis numeri 2, 4, & conſequentes 1, 2, ſitq, vt 2 ad 1, ita 4 ad 2, in dupla proportione. accipiantur antecedētium æquemultiplices, ipſius 2 accipiatur multiplex 8, ipſius 4 æquemultiplex 16, in quadrupla proportione. Pariter conſequentium accipiantur æquemultiplices, ipſius 1, multiplex 3, ipſius 2 æquemultiplex 6, in tripla proportione; erunt & æquemultiplices antecedentium proportionales cum æquemultiplicibus conſequentium, ideſt erit vt 8 multiplex primi antecedentis ad 3 multiplicem primi conſequentis, ita 16 æquemultiplex ſecundi antecedentis ad 6 æquemultiplicem ſecundi conſequentis. 8, 2, 1, 3; 16, 4, 2, 6. *Si eſt vt 2 ad 1, ita 4 ad 2, erit etiam vt 8 ad 3, ita 16 ad 6. Vt 8 cōtinet bis ipſum 3, & duas ipſius 3 tertias, ſic 16 continet bis ipſum 6, & duas ipſius tertias, ideſt duos binarios.*

SCHOLION II.

Præterea, iuxta lemma poſt hanc propoſitionem quartam, vt 8 ſuperat 3, ſic 16 ſuperat 6; & vt 3 minor eſt ipſo 8, ſic 6 minor ipſo 16. Si æquales fuerint extremi primæ proportionis, erunt & extremi ſecundæ æquales. &c.

SCHOLION III.

Ex corollario huius 4 propoſ. elicitur demonſtratio 14. definitionis, ideſt conuerſæ proportionis, atq; hìc patet geometricè rei veritas in ea definitione indicata, & arithmeticè à nobis oſtēſa. *Demonſtratio definitionis 14.*

SCHOLION IV.

Vniuerſalitates huius 4 propoſitionis.

Notanda eſt vniuerſalitas huius quartæ propoſitionis, cuius verba vniuerſalia ſunt de proportione in genere, quæ ſcilicet etiam irrationalem comprehendat, vt ex proportione

tione eàdem, ac rationali æquemultiplicium elicias, ac demonſtres etiam quantitates irrationales eſſe in eadem proportione. Prætcrea vniuerſalis etiam eſt ad proportionem eamdem inter quantitates diuerſi generis, cùm v.g. antecedens, & conſequens vnius proportionis ſunt lineæ, & alterius proportionis ſunt ſuperficies. &c.

SCHOLION V.

D*Eniq; probat hæc propoſ 4. æquemultiplicia eſſe in eàdem etiam ſpecificà proportione cum quantitatibus, quarum ſunt æquemultiplicia. In definitione autem quinta aſſumpſit eſſe ſaltem in generica, &c. iuxta ad eam definitionem à nobis explicata. ea relege.*

§I.

SCHOLION VI.

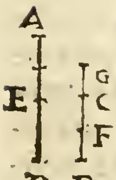
Oſtenſiones numericæ valent etiam de proportionibus irrationalibus.

E*X hac eadem propoſ. 4 licebit nobis demonſtratiuè vti numeris in omnibus huius libri propoſitionibus. Nam licet numeri pertineant ſolum ad proportiones multiplices, & rationales, tamen aſſumpti tanquam indices partium in æquemultiplicibus proportionum etiam irrationalium, rectè oſtendunt proportiones, & proportionum affectiones, geometricè demonſtratas in propoſitionibus huius libri quinti. nam ex hac 4 prop. patet geometricè æquemultiplicia eſſe in eàdem proportione cum quantitatibus, quarum ſunt æquemultiplicia; & quod in numeris oſtenditur de æquemultiplicibus valet etiam de proportionibus quantitatum irrationalium, quarum ſunt æquemultiplicia.*

Pro-

Propoſ V. Theor. V.

Si magnitudo magnitudinis æque multiplex fuerit, atq; ablata ablatæ & reliqua reliquæ æque multiplex erit atque tota totius.



SIt magnitudo A B magnitudinis C-D æque multiplex, atque eſt ablata AE ablatæ CF. Dico & reliquam EB reliquæ F D æque multiplicem eſſe, vt eſt tota AB totius CD. Quotuplex enim eſt AE ipſius C F, totuplex fiat E B ipſius C G. Et quia æque multiplex eſt AE ipſius CF, atque EB ipſius CG, a erit AE æquè multiplex CF, atque AB ipſius GF; ponitur autem AE æquè multiplex ipſius CF, atq; eſt AB ipſius CD æquè multiplex, ergo multiplex eſt AB vtriuſq; GF, CD: b ęquales ergo ſunt GF,CD. Communis CF auferatur, & erit reliqua GC reliquæ DF æqualis. Et cum ęquè multiplex ſit AE ipſius CF; atq; EB ipſius GC, eſtque GC æqualis DF, æque ergo multiplex eſt AE ipſius CF, atq; EB ipſius FD. Ponitur autem & AE ipſius CF ęquè multiplex, vt AB ipſius CD: æquè ergo multiplex EB ipſius FD, atq; AB ipſius CD; ergo reliqua EB reliquę FD æquè multiplex eſt, atque eſt tota AB totius CD. Si ergo magnitudo, &c. Quod oportuit demonſtrare.

a propoſ. 1.5.

b Colligitur ex ax.7.

SCHO-

SCHOLION I.

Sint numeri 16, & 8, & auferatur ex 16 quarta pars 4, ex 8 verò quarta 2; & ex ſubductione ipſius 4 ex 16 reliquus ſit numerus 12; ex ſubductione ipſius 2 ex 8 reliquus numerus ſit 6; ſitq; 16 ipſius 8 æquemultiplex, ac pars ablata 4 partis ablatæ 2, ſcilicet in dupla proportione, erit reliqua pars 12 æquimultiplex reliquæ 6, ac eſt totus numerus 16 numeri totius 8, ideſt pariter in dupla: 16, 8, 4, 2, 12, 6. Si eſt vt totum 16 ad totum 8, ita ablatum 4 ad ablatum 2, erit & reliquum 12 ad reliquum 6, vt totum 16 ad totum 8.

§ II.

SCHOLION II.

Demonſtratio praxis § 3 ad poſtulata.

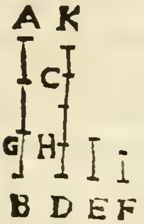
Ex hac propoſ. habes demonſtrationem praxis ingenioſæ, & paradoxicæ in § 3 ad poſtulata. Vide etiam inferius ad propoſ. 19. Habes in citato § vſum ſingularem, & practicum æquemultiplicium.

Pro-

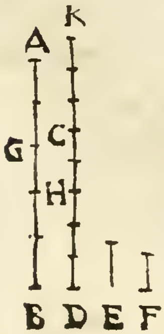
Propoſ. VI. Theor. VI.

Si duæ magnitudines duarum magnitudinum æquè multiplices fuerint, & ablatæ quædam ſint earumdẽ æquè multiplices, erunt reliquæ eiſdem aut æquales, aut æquè multiplices.

Sint duæ magnitudines AB, CD duarum magnitudinum E, F æquè multiplices, auferanturq; AG, CH earundẽ E, F æquè multiplices. Dico reliquas GB, HD ipſis E, F aut æquales eſſe, aut ęque multiplices. Sit primo GB ipſi E æqualis. Dico & HD ipſi F æqualem eſſe. Ponatur ipſi F æqualis CK. Cùm igitur AG



æque multiplex ſit ipſius E, atque CH ipſius F, ſit verò GB ęqualis ipſi F, & CK ipſi F, [a] æquè multiplex erit AB ipſius E, atque KH ipſius F. *a prop.1.5* Ponitur autem æque multiplex AB



ipſius E, atque eſt CD ipſius F: æque ergo multiplex eſt KH ipſius, F, atque CD eiuſdem F. Cùm ergo vtraque KH, CD ipſius F æquè ſit multiplex, [b] æqualis erit KH ipſi CD. *b Colligitur ex ax 7.* Communis CH auferatur, & erunt reliquæ KC, HD æquales. Sed KC

æqua-

æqualis eſt F, ergo & HD eidem æqualis erit. Eſt ergo GB æqualis ipſi E, & HD ipſi F. Similiter demonſtrabimus, ſi GB ipſius E fuerit multiplex, æquè multiplicem eſſe HD ipſius F. Si ergo duæ magnitudines. &c. Quod oportuit demonſtrare.

SCHOLION.

DVo numeri antecedentes 16, & 8 duorum numerorum conſequētium 4, & 2 ſint æquemultiplices, ſcilicet quadrupli, & ex 16, & 8 detracti numeri partiales 12, & 6 ſint æquemultiplices eorumdem 4, & 2, ſcilicet tripli; reliqui poſt ablationem 12 ex 16, & 6 ex 8, ideſt numeri 4, & 2, erunt æquales conſequentibus; vt patet.

16, 4; 8, 2; 12, 6; 4, 2. *Si eſt vt* 16 *ad* 4, *ita* 8 *ad* 2, *& pariter ſit* 12 *ad* 4; *vt* 6 *ad* 2; *reliqui* 4, *&* 2 *æquales erunt ipſis primis conſequentibus* 4, *&* 2.

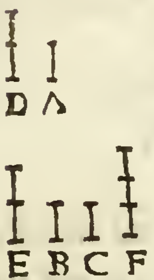
Quoniam verò propoſitio affirmat reliquas partes ablationum primarum partium ex antecedentibus eſſe aut æquales, aut æquemultiplices conſequentium, eſto ſecundum exemplum in ſequentibus numeris: 16, 4; 8, 2; 6, 3; 10, 5. *Si eſt vt* 16 *ad* 4, *ita* 8 *ad* 2 *& ex* 16 *ablata pars* 6 *eſt ad* 4 *conſequens, vt ex* 8 *ablata pars* 3 *ad* 2; *ergo & reliquæ ad complementum* 16, *&* 8, *ideſt* 10, *&* 5 *ſunt etiam ipſæ æquemultiplices conſequentium* 4, *&* 2.

Clauius hoc theorema ſextum demonſtrat vniuerſalius etiam de omni genere proportionis, vt Euclides demonſtrat vniuerſaliter in 24 *theoremate theorema* 2 *huius lib.*

Pro-

Propoſ. VII. Theor. VII.

Aequales ad eandem eandem habent proportionem, & eadem ad æquales.



SInt magnitudines A, B æquales, & alia quæcunque C. Dico vtramque A,B eandem proportionem habere ad C, & C eandem ad eaſdem A, B. Accipiantur ipſarum A, B æque multiplices D, E; & alia F ipſius C vtcunque multiplex. Cùm igitur æque multiplex ſit D ipſius A, & E ipſius B, ſit verò A æqualis B, [a] erit & D æqualis E, eſtque alia F vtcunque multiplex ipſius C. Si ergo D maior eſt ipsà F, erit & E eàdem F maior, & ſi æqualis, æqualis; ſi minor, minor; ſuntque D, E ipſarum A, B æquè multiplices, & ipſius C alia F vtcunque multiplex: eſt [b] ergo vt A ad C, ita B ad C. Dico & C ad vtramque A, B eandem habere proportionem. Iiſdem enim conſtructis oſtendemus D æqualem eſſe E, & aliam quandam F. Si ergo F maior eſt D, erit & maior, quã E, & ſi æqualis, æqualis; ſi minor minor, eſtq; F ipſius C multiplex, aliæ verò D, E vtcunque multiplices ipſarum A, B. [c] eſt ergo vt C ad A, ita C ad B. Si ergo æquales ad eandem, &c. Quod oportuit demonſtrare.

a *Colligitur ex 6.*

b *def. 5. 5.*

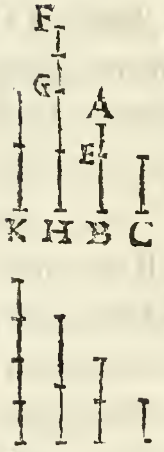
c *def. 5. 5*

SHOLION.

P*Atet in ipſis terminis. nam 8 & 8 habent ad 4 eandem proportionem duplam, & 4 habet eandem ſubduplam ad 8, & 8.*

Propoſ. VIII. Theor. VIII.

Inæqualium magnitudinum maior ad eandem maiorem habet proportionem, quàm minor. Et eadem ad minorem maiorẽ habet, quàm ad maiorem.



SInt inęquales magnitudines AB, C; ſitque AB maior, quàm C: ſit & alia D quæcũuque. Dico AB ad D maiorem habere proportionẽ quàm C ad D, & D ad C maiorem, quàm ad AB. Cũ enim AB maior ſit quàm C; ponatur ipſi C æqualis BE. Itaque minor ipſarum AE, EB *a* multiplicetur, donec maior fiat, quàm D. Sit primò AE minor quàm EB, & multiplicetur AE, donec maior fiat quàm D, quæ ſit FG, & quam multiplex eſt FG ipſius AE, tam multiplex fiat GH ipſius EB; & K ipſius C. Sumatur L ipſius D dupla, M tripla, & ita deinceps

a def. 4. 5

ps vna plus, quoad ſumpta multiplex ipſius D ſiat primò maior quam K, ſumpta ſit N quadrupla ipſius D, & primò maior quam K. Cum ergo K primò minor ſit quam N, non erit K minor quam M, cumque æque multiplex ſit FG ipſius AE, & GH ipſius EB, *b* erit FG æque multiplex ipſius AE, & FH ipſius AB. æque autem multiplex eſt FG ipſius AE, & K ipſius C, *c* æque ergo multiplex eſt FH ipſius AB, & K ipſius C: ſunt ergo FH, & K eque multiplices ipſarum AB, C. Ruiſus cum GH ipſius EB æque ſit multiplex, vt K ipſius C, ſitque EB ipſi C æqualis. *d* erit & GH ipſi K equalis. At K non eſt minor M, ergo nec GH minor erit M. maior autem eſt FG, quam D, tota ergo FH vtraq; D, M maior eſt. Sed vtraq; D, M æqualis eſt ipſi N, cum M ipſius D ſit tripla, vtraque autem M, D ipſius D quadrupla: eſt verò & N ipſius D quadrupla, ergo vtraq; M, D æquales ſunt ipſi N. ſed FH ipſis M, D maior eſt, *e* ergo FH ſuperat N, & K non ſuperat N. Quia ergo FH, & K ſunt eque multiplices ipſarum AB, C, at N ipſius D vtcũq; multiplex eſt, *f* habebit AB ad D maiorẽ proportionem, quam C ad D. Dico contra D ad C maiorem habere, quam ad AB ijſdem enim constructis, ſimiliter demonſtrabimus N ſuperare K, & non ſuperare FH. Etenim N multiplex

b prop. 1.5.

c ax. 1.

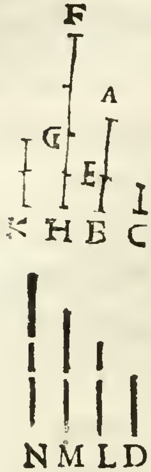
d Colligit ur ex ax. 1.

e def. 7. 5.

f Cum n. ſint quatuor magnitudines AB, D, C, D; ſuperet q; multi-

tiplex eſt ipſius D:ipſarum verò AB,C vtcunque multiplices ſunt FH, K: habet ergo D ad C maiorem proportionem, quam ad AB. Sit iam

ple x primæ FH multiplicē ſecūdæ N; at multiplex tertiæ k non ſuperet multiplicē quartæ N, erit maior proportio AB ad D, quàm C ad D, per def. 7 huius.



AE maior quam EB, & minor EB multiplicata fiat maior, quàm D, quę ſit GH, multiplex quidem ipſius EB, maior verò quàm D. Et quàm multiplex eſt GH ipſius EB, tā multiplex fiat FG ipſius AE & K ipſius C; ſimiliterq; oſtendemus FH, & K ipſarum AB, C æque multiplices eſſe. Sumatur deinde N multiplex quidem ipſius D, primo autem maior, quàm FG, vt rurſus FG minor non ſit, quàm M; maior verò GH quàm D, ita vt tota FH ipſas D, M, hoc eſt, N ſuperet, K verò ipſam N non ſuperet, quoniam & GF maior, quàm GH, hoc eſt, quam K, non ſuperat N. atq; ita perficiemus demonſtrationem vt ſupra. Inæqualium ergo, &c. Quod oportuit, &c.

SCHOLION I.

INæqualium numerorum datorum 12, & 8 maior 12 habet maiorem proportionem ad 4, ſcilicet triplam, quam 8 qui numerus habet ad 4 duplam, & idem 4 ad minorem datorum 8 habet maiorem proportionem, ideſt minori ſui additione æquat ipſum 8, ſcilicet duplici tantùm additione ſui; at verò reſpectu maioris 12, idē 4 maiori ſui additione, ſcilicet tripla, æquat ipſum

12, 12.

12. 12, & 8 continentibus ipſum 4, dicitur maior continentia ſeu proportio 12 reſpectu 4 quia ter continet 4, quam proportio 8 ad 4, quia bis tantùm continet. Contraria ratione maioritas proportionis partis contentæ reſpectu continentis ſpectatur ex minus cõtineri, & minus eſſe partem, & ex accedere magis ad eſſe ſimile ipſi toti non diuiſo. Quoniam igitur 4 per duplicem tantum ſui replicationem accedit ad 8, at per triplicationem accedit ad 12, ideò propior eſt æqualitati ipſius 8, & maiorem habet vicinitatem, ſiue proportionem ad 8, quàm ad 12. Hæc Tyronibus.

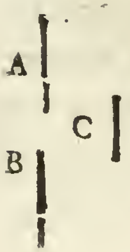
SCHOLION II.

In quo paradoxum contra hanc prop. 8.

ANgulus rectus, & angulus ſemicirculi ſunt maiores angulo acuto, & licet rectus ſit maior angulo ſemicirculi, non habet tamen ad acutum proportionem maiorem (ſiue maioris inæqualitatis) quam ang. ſemicirculi. Vide rationem in § 2 ad propoſ. 16. lib. 3.

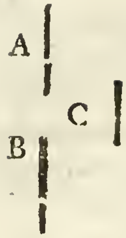
Propoſ. IX. Theor. IX.

Quæ ad eandem eandem habent proportionem æquales ſunt: Et ad quas eadem eandem habet, & illæ ſunt æquales.



HAbeat vtraque A, & B ad C eandem proportionem. Dico A, B ęquales eſſe. Si non ſunt æquales,[a] non habebit vtraq; A, B ad C eandem pro- por-

a prop. 8. 5.



portionem;habet autem;æquales ergo ſunt. Habeat deinde C ad A,B eandem proportionem. Dico A,B æquales eſſe. Si non ſunt æquales, [b] non habebit C ad A,B eandē proportionē. Habet autē, æquales ergo ſunt. Quæ ergo ad eandem, &c. Quod oportuit demonſtrare.

b prop. 8. 5.

SCHOLION.

Nona propoſitio patentiſsima eſt, & conuerſa ſeptimæ. Quia enim 8, & 8 eandem duplam habent proportionem ad 4, ideo & æquales ſunt; & quia 4 ad 8, & 8 habet eandem ſubduplam proportionem, ideo ſunt 8, & 8 æquales numeri.

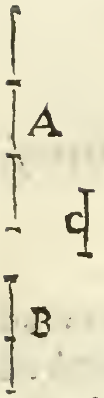
Propoſ. X. Theor X.

Ad eandem proportionem habentium, quæ maiorem habet maior eſt, ad quam verò eadem maiorem habet, minor eſt.

a prop. 9. 5.

Habeat A ad C maiorem proportionem, quàm B. Dico A maiorem eſſe. Si non, aut A eſt æqualis B, aut minor. non ęqualis, [a] vtraq; enim A, B eandem haberet proportionem ad C; at nō habet; non ergo B æqualis eſt ipſi A.

Non



Non minor; quia ſi minor eſſet A, quàm B, [b] haberet A ad C minorē proportionem, quàm B; at non habet: non ergo A minor eſt, quàm B. oſtenſum eſt autem quòd neque ſit æqualis; maior eſt ergo A, quàm B. Habeat rurſus C ad B maiorem proportionem, quàm ad A; dico B minorem eſſe, quàm A. Si non; aut eſt æqualis, aut maior. Non æqualis, [c] haberet enim C ad A, & B eandem proportionem; at non habet; non ergo A æqualis eſt ipſi B. Neque maior eſt B, quàm A; [d] haberet enim C ad B minorem proportionem, quàm ad A; at non habet: non ergo B maior eſt, quàm A. Oſtenſum eſt autem quòd neque æqualis. maior ergo eſt A, quàm B. Ad eandem ergo proportionem, &c. Quod oportuit demonſtrare.

b prop. 8. 5.

c prop. 9. 5.

d prop. 8. 5.

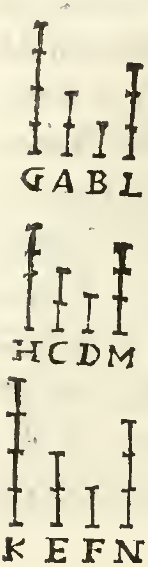
SCHOLION.

Decima converſa eſt octauæ. Nam duorum numerorum 12, & 8 habentium proportionem ad 4, maiorem proportionem (iuxta expoſita ad 8) continentiæ reſpectu ipſius 4 habet 12, quàm 8, ideo 12 maior numerus eſt, quàm 8; Ipſe verò numerus 4, qui habet maiorem proportionem, ac ſimilitudinem minus diuiſi, & propius accedentis ad totum reſpectu ipſius 8, quam reſpectu ipſius 12 (iuxta expoſita ad 8) ideo & minor eſt, ideſt minus replicatè continet ipſe numerus 8 numerum 4, quam 12 eundem 4. Ergo minor 4, quàm 12.

Pro-

Propoſ. XI. Theor. XI.

Quæ eidem eædem ſunt proportiones, & inter ſe eædem ſunt.



SIt vt A ad B, ſic C ad D; & vt C ad D, ſic E ad F. Dico eſſe vt A ad B, ita E ad F. Accipiantur enim ipſarum A, C, E æque multiplices G, H, K; ipſarum verò B, D, F aliæ vtcunq; æque multiplices L, M, N. Et quia eſt vt A ad B, ita C ad D, acceptæque ſunt ipſarum A, C æque multiplices G, H; ipſarum verò B, D vtcunq; æque multiplices L, M: [a] ergo ſi G excedit L, excedit & H ipſā M, & ſi æqualis, æqualis; ſi minor, minor. Rurſus cum ſit vt C ad D, ita E ad F, & acceptæ ſint ipſarū C, E æque multiplices H, K, ipſarum verò D, F aliæ vtcunque æque multiplices M, N; [b] ergo ſi excedit H ipſam M, excedet & K ipſam N; & ſi æqualis, æqualis; ſi minor, minor. Sed ſi excedit H ipſam M, excedet & G ipſam L; & ſi æqualis, æqualis; ſi minor, minor. Quare ſi excedit G ipſam L, excedet & K ipſam N; & ſi æqualis, æqualis; ſi minor minor. Et ſunt quidem G, K ipſarum A E

a def. 5. 5.

b def. 5. 5.

æque

æque multiplices; L, N vero ipſarum B, F ſunt aliæ vtcunque æque multiplices. Eſt c ergo vt A ad B, ita E ad F. Quæ ergo eidem, &c. Quod demonſtrare oportuit. c def. 5. 5.

SCHOLION.

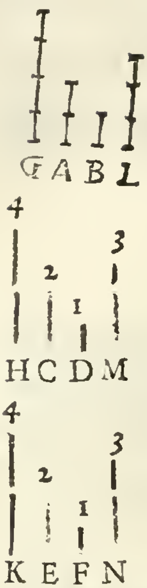
QVod geometricè demonſtratur ex 5 defin. firmata à 4 propoſ. huius lib. 5. per ſumptionem æquemultiplicium, facilius erit, & per ſe euidentius Tyroni per numeros. Nam ſi eſt vt 3 ad 2, ita 6. ad 4. & rurſus vt 3 ad 2, ita 9 ad 6; ergo erit vt 6 ad 4, ita & 9 ad 6, ideſt omnes in ſeſquialtera.

Propoſ. XII. Theor. XII.

Si quotcunque magnitudines proportionales fuerint, erit vt vna antecedentium ad vnam conſequentium, ita omnes antecedentes ad omnes conſequentes.

SInt quotcunq; magnitudines A, B, C; D, E, F, vt quidem A ad B, ita C ad D, & E ad F. Dico vt eſt A ad B, ita eſſe A, C, E ad B, D, F. Accipiantur enim ipſarum A, C, E æque multiplices G, H, K; ipſarum verò B, D, F aliæ vtcunque æque multiplices L, M, N. Et cùm ſit vt A

H ad



ad B, ita C ad D, & E ad F, acceptæq; ſint ipſarum quidē A, C, E æque multiplices G, H, K, ipſarum verò B, D, F aliæ vtcunque æque multiplices L, M, N; ergo ſi [a] G excedit L, excedet & H ipſam M, & K ipſam N; & ſi æqualis, æqualis; ſi minor, minor. Quare ſi excedit G ipſam L, excedent & G, H, K ipſas L, M, N, & ſi æqualis æquales, ſi minor, minores; ſuntque G, & G, H, K ipſarum A, & A, C, E æquè multiplices; [b] quia ſi fuerint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, æqualium numero, ſingulæ ſingularum æquè multiplices, quam multiplex eſt vna vnius, tã multiplices ſunt omnes omnium. Eadem de cauſa ſunt L, & L, M, N, ipſarum B, & B, D, F æque multiplices. Eſt ergo vt A ad B, ita A, C, E ad B, D, F. Si ergo quotcumque magnitudines, &c. Quod oportuit demonſtrare.

a def. 5. 5.

b prop. 5.4.

SCHOLION.

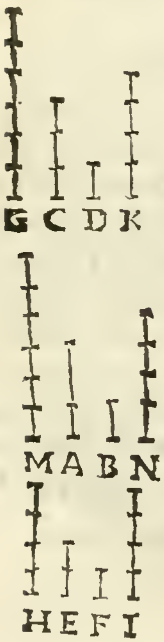
Haec propoſitio 12 demonſtrat vniuerſaliter de omni genere proportionis, etiam irrationalis, id, quod demonſtrauit prima propoſitio de genere proportionis multiplicis, ac rationalis. Huius veritatem vide in eodem exemplo numerorum à nobis poſito ad primam hu.

Pro-

Propoſ. XIII. Theor. XIII.

Si pima ad ſecundam eandem proportionem habuerit, quam tertia ad quartam; tertia verò ad quartam maiorem habuerit, quam quinta ad ſextam, habebit & prima ad ſecundam maiorem, quam quinta ad ſextã.

PRima A habeat ad ſecundam B eandẽ proportionem, quam tertia C ad quartam D, tertia verò C ad quartam D maiorem habeat, quam quinta E ad ſextam F. Dico primam A ad



ſecundam B maiorem habere, quam quintam E ad ſextam F. Cum enim C ad D maiorem proportionem habeat, quam E ad F, ſintque ipſarum C, E quædam æque multiplices, ipſarum verò D, F aliæ quæcumque; ac multiplex quidem ipſius C excedat multiplicem ipſius D, multiplex verò ipſius E non excedat multiplicem ipſius F. Sint ergo ipſarum C, E æquè multiplices G, H, ipſarum D, F aliæ vtcumque K, L, [a] ſic, vt G quidem K excedat, H verò L non excedat; & quam multiplex eſt G ipſius C, tam multiplex ſit M ipſius A; & quam multiplex eſt K ipſius D, a def. 7 5.

tam multiplex ſit N ipſius B. Et cum ſit vt A ad B, ita C ad D, acceptæque ſint ipſarum A C æque multiplices M, G, ipſarum vero B, D aliæ vtcumq; æque multiplices N, K; ſi M ſuperat N, & G ſuperabit K, & ſi æqualis, æqualis; ſi
b def. 5. 5. minor, minor: ſuperat autem G ipſam K; [b] ſuperabit ergo & M ipſam N: at H non ſuperat I, & ſunt M, H ipſarum A, E æquè multiplices, N verò, & L ipſarum B, F vtcumque æque multiplices ſunt: habet ergo A ad B maiorem proportionem, quàm E ad F. Si ergo prima ad ſecundam, &c. Quod oportuit demonſtrare.

SCHOLION.

Facilis eſt aſſenſus veritati ſatis patenti huius 13 propoſ. ſine æquemultiplicibus in geometrica demonſtratione, ſiue vice ipſorum vtendo numeris, iuxta dicta in anteced. 12 propoſ. Quod vniuerſaliter dictum eſto de reliquis huius lib. 5. propoſ. vniuerſalibus, etiam pro proportionibus irrationalibus. Sint numeri 12, 4; 6, 2; 4, 2. in quibus, vt 12. primus ad ſecundum 4, ſic tertius 6 ad quartum 2. & habeat 6 ad 2 maiorem proportionem, quàm quintus numerus 4 ad ſextum 2. ſcilicet 6 ad 2 triplam, 4 ad 2 duplam; etiam primus 12 ad ſecundum 4 habebit maiorem proportionem, quam quintus 4 ad ſextum 2; ſcilicet inter 12, & 4 tripla, inter 4 & 2 dupla eſt.

Pro-

Propoſ. XIV. Theor. XIV.

Si prima ad ſecundam eandem habuerint proportionem, quam tertia ad quartam; prima autem quam tertia maior fuerit, erit & ſecunda quam quarta maior: & ſi æqualis, æqualis; ſi minor, minor.

PRima A ad ſecundam B eandem habeat proportionem, quam tertia C, ad quartã D, & ſit A quàm C maior. Dico & B quàm D maiorem eſſe.



Cùm enim A quàm C maior ſit, ſitque alia quæcũq; magnitudo B;[a] habebit A ad B maiorem proportionem, quam C ad B. Vt autem A ad B, ſic eſt C ad D; ergo C ad D maiorem habet, proportionẽ, quam C ad B; [b] ad quam autem eadem maiorem proportionem habet, illa minor eſt; minor ergo eſt D, quam B. quare B quam D maior eſt. Similiter demonſtrabimus ſi A æqualis ſit C, & B ipſi D æqualem eſſe: & ſi A minor ſit quam C, & B minorem eſſe quàm D. Si ergo prima ad ſecundam, &c. Quod oportuit demonſtrare.

a prop. 8.5.

b prop. 8.5.

SCHO-

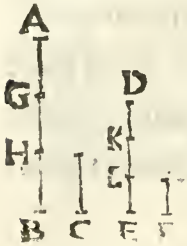
SCHOLION.

Sit vt 12 ad 4, ſic 6 ad 2; erunt in eadem proportione, vel maioritatis, vel minoritatis, vel æqualitatis inter ſe conſequentes 4, & 2, in qua ſunt antecedentes 12, & 6. Eſt quædam quaſi argumentatio à permutando, & quaſi lemma ante 16 propoſ. huius. Vt 12 ad 4, ſic 16 ad 2, ergo vt 12 ad 6 in maioritate, ſic 4 ad 2. Inuerte numeros: vt 6 ad 2, ſic ſit 12 ad 4; ergo vt antecedens 6 minor eſt antecedente 12, ſic & conſequens 2 minor conſequente 4. Pariter de æqualitate. &c.

Propoſ. XV. Theor. XV.

Partes cum pariter multiplicibus eandem habent proportionem; ſi, vt ſibi mutuo reſpondent, ſumantur.

Sint æque multiplices A B ipſius C, & D E ipſius F. Dico eſſe vt C ad F, ita AB ad DE. Cùm enim A B ipſius C ita multiplex ſit, vt



D E ipſius F, erunt in AB tot magnitudines æquales ipſi C, quot ſunt in DE æquales ipſi F. diuidatur enim AB in magnitudines AG, GH, HB æquales ipſi C. Et DE in DK, KL, LE æquales ipſi F, eritq; multitudo AG, GH, HB æqualis multitudini DK, KL, LE. Et quia tam

AG,

AG, GH, HB, quàm DK, KL LE æquales ſunt, erit vt AG ad DK, ita GH ad KL, & BH ad LE; a erit ergo vt vnum antecedentium ad vnum conſequẽtium, ita omnes antecedentes ad omnes conſequentes. Eſt ergo vt AG ad DK, ita AB ad DE. Eſt autem AG ipſi C æqualis, & DK ipſi F; ergo vt C ad F, ita AB ad DE. Partes ergo, &c. Quod oportuit demonſtrare. a prop. 12.5.

SCHOLION.

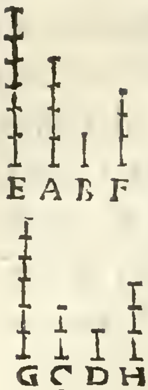
Scilicet ſi comparentur antecedentes cum antecedentibus, conſequentes cum conſequentibus, & ſit numerus 12 æquemultiplex ipſius 4, ac eſt 6 ipſius 2, ergo vt 4 pars conſequens prioris proportionis ad partem 2 conſequentem ſecundæ proportionis, ſic & æquemultiplex 12, antecedẽs prioris proportionis, ad æquemultiplicem 6 antecedentem ſecundæ proportionis.

Propoſ. XVI. Theor. XVI.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & permutatæ proportionales erunt.

SInt quatuor magnitudines proportionales A, B, C, D. Vt A ad B, ita C ad D. Dico & permutatas proportionales eſſe: Vt A ad C, ita B ad D. Accipiantur enim ipſarum A, B ęque

mul-



multiplices, E, F, ipſarum C, D aliæ vtcumque G, H. Et quia E, F æquemultiplices ſunt ipſarum A, B, [a] habentque partes eodem modo multiplicium eãdem proportionem inter ſe cõparatæ, erit vt A ad B, ita E ad F. Vt verò A ad B, ita eſt C ad D: ergo vt C ad D, ita eſt E ad F. Rurſus cùm G, H ipſarum C, D ſint æquè multiplices; [b] erit vt C ad D, ita G ad H. Vt autem C ad D, ita eſt E ad F: ergo vt E ad F, ita eſt G ad H. [c] Cùm autem quatuor magnitudines proportionales fuerint, & prima quàm tertia maior fuerit, erit & ſecunda quàm quarta maior; &, ſi æqualis, æqualis; ſi minor, minor. Ergo ſi E ſuperat G, & F ſuperabit H, &, ſi æqualis, æqualis; ſi minor, minor. Sunt autem E, F ipſarum A, B æque multiplices, G, H verò ipſarum C, D vtcumque ſunt ęque multiplices. [d] Eſt ergo vt A ad C ita B ad D. Si ergo quatuor magnitudines, &c. Quod oportuit demõſtrare.

a prop. 15.5.
b prop. 15.5.
c prop. 14.5.
d def. 5 5.

SCHOLION.

Ex hac 16 demonſtratio praxis paradoxicæ apud nos.

Demonſtratio definitionis 13.

Hæc eſt demõſtratio geometrica veritatis per definitionem 13 ſignificatæ. Viae ad eam animaduerſiones noſtras, & in numeris oſtenſionem.

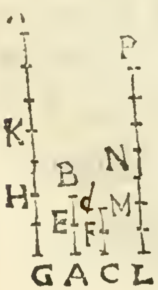
Ex

Ex hac etiam 16. propoſ. demonſtratur praxis ingenioſa §. 5 ad prop. 10. lib. 1.

Propoſ. XVII. Theor. XVII.

Si cõpoſitæ magnitudines proportionales fuerint, & diuiſæ proportionales erunt.

SInt compoſitæ magnitudines AB, BE, CD, DF proportionales. Vt quidem AB ad BE, ita CD ad DF. Dico & diuiſas proportionales eſſe, vt AE ad EB, ita CF ad FD. Accipiantur enim ipſarum AE, EB, CF, FD æquè multiplices GH, HK, LM, MN, ipſarum verò EB, FD aliæ vtcumque æquè multiplices KX, NP. Et quia ęquè multiplex eſt GH ipſius AE, vt HK ipſius EB, [a] erit GH ipſius AE ęquè multiplex, vt GK ipſius AB. Æquè autem multiplex eſt GH ipſius AE, vt LM ipſius CF: [b] ergo æque multiplex eſt GK ipſius AB, vt LM ipſius CF. Rurſus quia æquè multiplex eſt LM ipſius CF, vt MN ipſius FD, [c] erit LM ipſius CF æquè multiplex, vt LN ipſius CD. Æquè autem multiplex erat LN ipſius CF, vt GK ipſius AB, [d] ergo GK æque multiplex eſt ipſius AB, vt LN ipſius CD. Sunt ergo GK, LN ipſarum AB, CD æquè multiplices. Rurſus quia



a prop. 1 5.

b prop. 11. 5.

c prop. 1 5.

d prop. 11. 5.

HK ipſius EB æquè multiplex eſt, vt MN ipſius FD; eſt verò & KX ipſius EB æquè multiplex, vt NP ipſius FD; [e] erit compoſita HX ipſius EB æquè multiplex, vt MP ipſius DF. Et quia eſt vt AB ad BE, ita CD ad FD, ſumptæque ſunt ipſarum AB, CD æque multiplices GK, LN; ipſarum verò EB, FD aliæ vtcũque æquè multiplices HX, MP; ſi ergo GK ſuperat HX, & LN ſuperabit MP; & ſi æqualis, æqualis; ſi minor, minor. Superet GK ipſam HX, ablatà communi HK, ſuperabit GH ipſam KX. Sed ſi GK ſuperat HX, ſuperabit & LN ipſam MP. Superet ergo LM ipſam MP, ſuperabit (communi MN ablatà) & LM ipſam NP. Quare ſi GH ſuperat KX, & LM ſuperabit NP. Similiter demõſtrabimus, ſi GH æqualis ſit KX, & LM æqualem eſſe NP; & ſi minor, minorem. Et ſunt GH, LM ipſarum AE, CF æquè multiplices, ipſarum verò EB, FD aliæ vtcumque KX, NP. [f] Eſt ergo vt AE ad EB, ita CF ad FD. Si ergo compoſitæ, &c. Quod oportuit demonſtrare.

e prop. 1. 5.

f def. 5. 5.



S C H O L I O N.

Demonſtratio definitionis 16.

H*Æc eſt demonſtratio geometrica veritatis per definitionem 16, ſignificatæ. Vide ibi apud nos oſtenſionem in numeris.*

Pro-

Propoſ.XVIII.Theor.XVIII.

Si diuiſæ magnitudines proportionales fuerint, & compoſitæ proportionales erunt.

SInt diuiſæ magnitudines AE, EB; CF, FD proportionales. Vt AE ad EB, ita CF ad FD. Dico & compoſitas proportionales eſſe, vt AB ad BE, ita CD ad FD. Si non eſt vt AB ad BE, ita CD ad FD, ſit vt AB ad BE, ita CD vel ad minorem FD, vel ad maiorem. Sit primo ad



minorem DG. Cùm ergo ſit, vt AB ad BE, ita CD ad DG, erunt compoſitæ magnitudines proportionales; *a* ſunt ergo & diuiſæ, vt AE ad EB, ita CG ad GD; ponitur autem vt AE ad EB, ita CF ad FD: *b* erit ergo vt CG ad GD, ita CF ad FD. Eſt autem prima CG maior tertià CF; *c* erit ergo & ſecunda GD maior quartà FD; ſed & minor eſt: quod fieri non poteſt. Non ergo eſt vt AB ad BE, ita CD ad minorem ipsà FD. Similiter demõſtrabimus quod neque ad maiorem FD; ergo ad ipſam. Si ergo diuiſæ, &c. Quod oportuit demonſtrare.

a *prop.* 17.5.
b *prop.* 11. 5.
c *prop.* 14. 5.

SCHOLION.

Demonſtratio definit. 15.

HÆc eſt demonſtratio geometrica veritatis ſignificatæ per definitionem 15. *Vide ibi oſtenſionam in numeris.*

Propoſ. XIX. Theor. XIX.

Si fuerit vt tota ad totam, ita ablata ad ablatam, & reliqua ad reliquam erit, vt tota ad totam.

SInt vt tota AB ad totam CD, ita ablata AE ad ablatam CF. Dico & reliquam EB ad reliquam FD eſſe vt eſt tota AB ad totam CD.



Cum enim ſit vt tota AB ad totam CD ita AE ad CF, [a] erit permutando AB ad AE, vt CD ad CF, & [b] diuidendo BE ad EA, vt DF ad FC; rurſusque permutādo vt BE ad DF, ita EA ad FC. Vt verò AE ad CF, ſic ponitur tota AB ad totam CD; [c] eſt ergo reliqua EB ad reliquam FD vt tota AB ad totam CD. Si ergo fuerit, &c. Quod oportuit demonſtrare.

a prop. 5.
b prop. 17.5.
c prop. 11.5.

Scho-

SCHOLIA.

I

Demonſtrario praxis apud nos ex hac 19.

Ex hac 19. demonſtratur praxis §. 3. ad poſtulata.

II

Hic demõſtrat vniuerſaliter in omni genere proportionis etiam irrationali, quod in multiplici, & rationali demonſtrauit in propoſ. 5. huius. Ibi reuiſe apud nos oſtenſionem in numeris.

COROLLARIVM.

Et quia demonſtratum eſt, vt eſt AB ad CD, ſic eſſe EB ad FD, erit *d* permutando vt AB ad EB, ita CD ad FD. Compoſitæ ergo magnitudines proportionales ſunt. Oſtenſum eſt autẽ, vt eſt AB ad AE, ita eſſe CD ad CF, quod eſt per conuerſionem rationis. Vnde perſpicuũ eſt, ſi compoſitæ magnitudines proportionales ſint, *e* & per conuerſionem rationis proportionales eſſe.

d *prop. 16. 5.*

e *def. 17 5.*

Factæ autem ſunt proportiones & in æque multiplicibus, & in analogijs. Nam ſi prima ſecundæ æque fuerit multiplex, atq; tertia quartę, erit vt prima ad ſecundam, ita tertia ad quartam, Sed non ita ex contrario conuertitur. Si

enim

enim fuerit vt prima ad ſecundam, ita tertia ad quartam, non omnino erit prima ſecundæ, & tertia quart æque multiplex, vt in ſeſquialteris, vel ſeſquitertijs proportionibus, vel alijs huiuſmodi.

SCHOLIA.

I

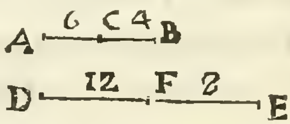
Demonſtratio definit. 17.

IN hocce Corollario indicatur demonſtrat ex prop. 19 veritates ſignificata per definitionem* 17. *Reuiſe ibi oſtenſionem in num.*

II

Conuerſa ratio demonſtrata vniuerſaliter de toto genere quantitatis.

PRo vniuerſalitate autem demonſtrationis geometricæ (nam in numeris apud nos eſt vniuerſalis) circa conuerſam rationem etiam in magnitudinibus diuerſorum generum (alij, vtendo argumentatione à permutãdo, probant tantum de magnitudinibus eiuſdem generis, iuxtà animaduerſa ad diſin: 13) *accipe à Clauio demonſtrationem, quæ valeat, etiam pro interpretis Lanzij eà, quam habet ille ab alijs interpretibus.*



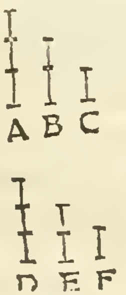
Sit enim vt AB ad CB, ita DE ad FE. Dico per conuerſionem rationis eſſe quoque vt AB ad AC, ita DE ad DF. Cum enim ſit vt AB ad CB, ita DE ad FE, erit quoq; diuidendo vt AC ad CB, ita DF ad FE. Igitur & conuertendo vt CB ad AC ita FE ad DF; ac propterea componendo quoq; vt AB ad AC, ita DE ad DF. Quod eſt propoſitum.

Pro-

Propoſ. XX. Theor. XX.

Si fuerint tres magnitudines, & aliæ illis numero æquales, quæ binæ & in eadem ratione ſumantur, ex æquali autem prima quàm tertia maior fuerit, erit & quarta quàm ſexta maior; & ſi æqualis, æqualis; ſi minor, minor.

Sint tres magnitudines A, B, C, & aliæ ipſis numero æquales D, E, F, quæ binæ, & in eadem ratione ſumantur. Vt quidem A ad B,



ita D ad E, vt verò B ad C, ſic E ad F, ex æquali autẽ A maior ſit quàm C. Dico & D quàm F maiorem eſſe; & ſi æqualis, æqualem; ſi minor minorem. Cùm enim A maior ſit quàm C, alia vero quæcumq; B, [a] habebit A ad B maiorem proportionem, quàm C ad B. Sed vt A ad B, ſic eſt D ad E; vt autem C ad B, ita eſt [b] conuertendo F ad E: Ergo D ad E maiorem proportionem habet, quàm F ad E. [c] Ad eandem autem proportionem habentium, quæ maiorem habet, illa maior eſt: maior eſt ergo D, quam F. Similiter demonſtrabimus, ſi A ſit æqualis C, & D æqualem eſſe F, & ſi minor,

a prop. 8. 5.
b prop. 16. 5.
c prop. 10. 5.

nor, minorem. Si ergo tres ſuerint magnitudines, &c. Quod demonſtrare oportuit.

SCHOLION.

HÆc 20 propoſ. eſt quaſi lemma ad 22 propoſ. vniuerſaliorem, vt indicabimus ad eit. 22. Repone hic numeros à nobis vſurpatos ad defin. 18. Sint tres 18, 12, 6, & tres 12 8, 4; vt 18 ad 12, ſic 12 ad 8; vt 12 ad 6, ſic 8 ad 4; & ex æquali, ideſt (iuxta interpretationẽ definitionis 18 de argumentatione ex æquali) ſumendo extremos in prima ſerie 18, & 6, in ſecunda 12, 4 per ſubductionem mediorum 12, & 8; quoniam eſt primus 15 maior, quam tertius 6, erit & quartus 12 maior, quàm ſextus 4. 18

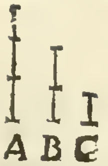
Inuerte numeros ſic 6, 12, 18; 4, 8, 12. Vt 6 minor eſt ipſo 18, ſic & 4 ipſo 12. pariq; modo de æqualibus.

Propoſ. XXI. Theor. XXI.

Si fuerint tres magnitudines, & aliæ ipſis numero æquales quæ binæ, & in eadem proportione ſumantur, fuerit autem earum perturbata proportio, & ex æquali prima maior fuerit quàm tertia; & quarta quam ſexta maior erit, & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor.

SInt tres magnitudines A, B, C, & aliæ ipſis numero æquales D, E, F, quæ binæ, & in eadem ratione ſumantur; ſit autem perturbata

eta



earum proportio vt A ad B, ſic E ad F, & vt B ad C, ſic D ad E; ſitq; ex ęquali A quàm C maior. Dico & D maiorē eſſe ipſa F; & ſi æqualis, æqualem; ſi minor minorem. Cum ergo A maior ſit quàm C, ſitque alia quędam B, [a] habebit A ad B maiorem proportionem, quàm C ad B. Sed vt A ad B, ita eſt E ad F; & [b] conuertendo, vt C ad B, ita E ad D: [c] quare E ad F maiorem proportionem habet, quàm E ad D. Ad quam autem èadem maiorem proportionē habet, illa minor eſt: minor eſt ergo F, quàm D; adeoq; maior D quàm F. Similiter oſtendemus ſi A ſit æqualis C, & D ipſi F æqualem eſſe; & ſi minor, minorem. Si ergo fuerint tres magnitudines, &c. Quod oportuit demonſtrare.



a *prop.8. 5.*
b *prop.5. 5.*
c *prop.8. 5.*

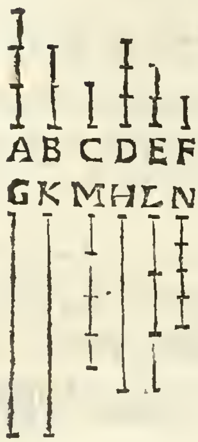
SCHOLION.

Eſt hæc 21 propoſ. quaſi lemma ad 23 propoſ. vniuerſaliorem, vt indicabimus ad cit. 23. Repone hic eoſdem numeros à nobis vſurpatos ad defin. 20. Sint 12, 8, 4, & 12, 6, 4, & bini ſumantur in proportione perturbata, id eſt, iuxta explicata ad definitionem 20, ſint vt 12 ad 8, ſic 6 ad 4, & vt 8 ad 4, ſic 12 ad 6. quemadmodum ex æquali (iuxta prædicta in antec. propoſ. 20) eſt primus numerus 12 maior tertio 4, ſic & erit quartus 12 maior ſexto 4.

Inuerte numeros ſic: 4, 8, 12; 4, 6, 12. Vt primus 4 eſt minor tertio 12, ſic quartus 4 minor eſt ſexto 12. Parique modo de æqualibus.

Propoſ. XXII. Theor. XXII.

Si fuerint quotcunq; magnitudines, & aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ, & in eadem proportione ſumantur, & ex æquali in eadem proportione erunt.



Sint quotcumque magnitudines A, B, C; & aliæ ipſis numero æquales D,E,F,quę binę & in eadem proportione ſumantur, vt quidem A ad B, ita D ad E, vt verò B ad C,ſic E ad F. Dico quod ex æquali in eadem ſint proportione. Hoc eſt,dico vt eſt A ad C, ita eſſe D ad F. Sumantur enim ipſarum A, D æquè multiplices G, H; ipſarum B, E aliæ vtcumque K, L; item ipſarum C, F aliæ vtcumq; M,N. Et cum ſit, vt A ad B, ita B ad E, acceptæq; ſint ipſarum A, D æquè multiplices
a prop.4. 6. G, H; ipſarum B, E aliæ vtcumq; æque multiplices K, L, [a] erit vt G ad K, ita H ad L. Eàdem de cauſa erit vt K ad M, ita L ad N. Cùm ergo tres magnitudines ſint G, K, M, & aliæ ipſis æquales numero H, L, N, quæ binæ,& in eàdem
b prop. 20. 5. proportione ſumuntur, [b] ex æquali ſi G ſuperat

M, &

M, & H ſuperabit N; ſi æqualis, æqualis; ſi minor, minor. Et ſunt GH ipſarũ A, D æquè multiplices; M, N ipſarum C, F: [c] erit ergo vt A ad C, ita D ad F. Si ergo quotcumque, &c. Quod oportuit demonſtrare. c def. 5.

SCHOLIA.

I

IN hac 22 demonſtrat vniuerſalius id, quod demonſtrauit quaſi in lemmate in propoſ. 20. Scilicet non ſolum de ternis magnitudinibus, & de proportione æqualitatis, vel maioritatis, vel minoritatis extremorum, ſed de quotcumq; magnitudinibus, & de eàdem earum quacumq; proportione, ex æqualite, iuxta def. 18.

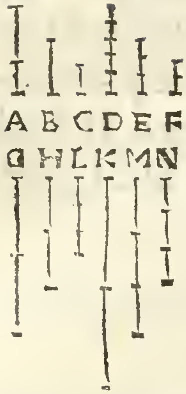
II

HIc demonſtratur geometricè veritas ſignificata per diſinitionem 18. Reuiſe ad eam definitionem noſtrã oſtenſionem in numeris. *Demonſtratio definitionis 18.*

Propoſ. XXIII. Theor. XXIII.

Si fuerint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, quæ binæ, & in eàdem proportione ſumantur, fueritque earum perturbata proportio; & ex æquali in eadem proportione erunt.

SInt tres magnitudines A, B, C, & aliæ ipſis æquales numero binæ in eadem propor-



tione ſumptæ D,E, F; ſit autem earum perturbata proportio vt A ad B, ſic E ad F; vt verò B ad C, ſic D ad E. Dico eſſe vt A ad C, ita D ad F. Sumantur ipſarum A,B, D æquè multiplices G, H, K; ipſarum C,E, F, aliæ vtcumque L, M, N. Et quia G, H ipſarum A,B ſunt æquè mul-

a prop. 15. 5. tiplices, *a* partes autem eodem modo multiplicium eandem habent proportionem, erit vt A ad B, ſic G ad H. Eàdem de cauſa erit vt E ad F; ſic M ad N; cumq; ſit vt A ad B, ita E ad F, *b*

b prop. 11. 5. erit quoq; vt C ad H, ita M ad N. Rurſus quia eſt vt B ad C, ita D ad E, ſumptæq; ſunt ipſarum B, D æquè multiplices H, K, ipſarum verò C,E aliæ vtcumq; L, M; *c* erit vt H ad L, ita K ad M.

c prop. 4. 5. Oſtenſum eſt autem eſſe vt G ad H, ita M ad N. Cùm ergo tres magnitudines G,HL proportionales ſint, & aliæ ipſis numero ęquales K,M,N, binæ in eadem proportione ſumptæ, ſitque earum perturbata proportio; ex *d* æquali ſi G ſu-

d prop. 21. 5. perat L, & K ſuperabit N; & ſi æqualis, æqualis; ſi minor, minor; ſuntq; G, K ipſarum A, D æque multiplices; L, N verò ipſarum C, F. *e* Eſt

e def. 5. 5. ergo, vt A ad C, ita D ad F. Si ergo ſint tres, &c. Quod oportuit demonſtrare.

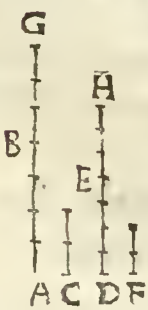
Scho-

SCHOLION.

IN hac 23 demonſtrat vniuerſalius id, quod demonſtraui, quaſi in lemmate in propoſ. 21, ſcilicet ternarum magnitudinum in proportione perturbata extremas inter ſe habere non ſolum proportionem æqualitatis, vel maioritatis, vel minoritatis, ſed eſſe in eadem etiam quacumque proportione, ex vi illationis ab æqualitate.

Propoſ. XXIV. Theor. XXIV.

Si prima ad ſecundam eandem habuerit proportionem, quam tertia ad quartam habeat autem & quinta ad ſecundam eandem, quam ſexta ad quartam, habebit & compoſita ex prima, & quinta ad ſecundam eandem proportionem, quam tertia, & ſexta ad quartam.



HAbeat prima AB ad ſecūdam C eandem proportionem, quam tertia DE ad quartam F; habeat verò & quinta BG ad ſecundam C eandem proportionem, quam ſexta EH ad quartam F. Dico compoſitam ex prima, & quinta AG ad ſecun-

cundam C eandẽ habere proportionem, quam habet compoſita ex tertia, & ſexta DH ad quartam F. Cùm enim ſit vt BG ad C, ita EH ad F, [a] erit conuertendo vt C ad BG, ita F ad EH. Et quia eſt vt AB ad C, ita DE ad F, vt verò C ad BG, ita F ad EH. [b] Ex æquali ergo eſt vt AB ad BG, ita DE ad EH. [c] Et cùm diuiſæ magnitudines proportionales ſint, erunt & compoſitę proportionales. Vt ergo AG ad GB, ita DH ad HE. Eſt verò vt GB ad C, ita EH ad F, [d] ex æquali ergo eſt vt AG ad C, ita DH ad F. Si ergo prima ad ſecundam, &c. Quod oportuit demõſtrare.

a *Lemma propoſ.* 4. 5.
b *propoſ.* 22. 5.
c *propoſ.* 18. 5.
d *propoſ.* 22. 5.

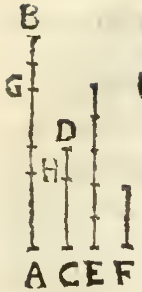
SCHOLION.

IN hac 24 demõſtrat vniuerſaliter in omni proportione id, quod demonſtrauit in theor. 2. de proportione multiplici. Reuiſe, & applica hanc 24 propoſitionem in numeris, quos habes ad 2 propoſitionem ibi omnia patent, nec hic neceſſe eſt iterare.

Propoſ. XXV. Theor. XXV.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, maxima, & minima duabus reliquis maiores erunt.

Sint



SInt quatuor magnitudines proportionales AB, CD, E,F, vt quidem AB ad CD, ita E ad F. Sit maxima AB, minima F. Dico AB,& F, quàm CD, E maiores eſſe. [a] Ponatur ipſi E æqualis AG, ipſi F æqualis CH. Cùm ergo ſit vt AB ad CD; ita E ad F; ſit autem ipſi E æqualis AG, F verò CH, erit vt AB ad CD, ita AG ad CH. Et quia eſt vt tota AB ad totam CD, ita ablata AG ad ablatã CH, [b] erit & reliqua G B ad reliquam H D vt tota AB ad totam CD: maior eſt autem AB, quàm CD, maior ergo etiam eſt GB, quàm HD. Et cùm AG æqualis ſit ipſi E,& CH ipſi F, erunt AG, & F æquales ipſis CH, & E. Et cùm, [c] quando ęqualia inæqualibus adduntur, tota fiant inæqualia, ergo ſi (G B, H D inæqualibns exiſtentibus,& maiori GB) addantur ipſi G B ipſæ A G, & F; ipſi verò HD ipſæ C H, & E, colligentur AB, & F maiores, quàm CD, & E. Si ergo quatuor, &c. Quod oportuit demonſtrare.

a prop. 3. 1.

b propoſ. 19. 1.

c ax. 4.

SCHOLIA.

I

SIt vt 6 ad 3, ita 4 ad 2; maximus 6, & minimus 2 inter ſe additi conflant ſummam 8, quæ maior eſt ſumma 7 conflatà ex reliquis 3, & 4. Vide inferius hìc 3 ſchol.

II

II

REctè notat Clauius debere omnes eſſe eiuſdem generis, verbi gratia quatuor lineas, quatuor plana, &c. quatuor numer. Alioquin non conſtaretur iuſta ſumma ex duabus magnitudinibus diuerſorum generum, quæ verificaret hanc 25 propoſitionem. Similiter ſi ſint tres magnitudines continuè proportionales maxima, & minima erunt maiores dupla mediæ proportionalis. Quod geometricè habet Cōmandinus, & tamquam corollarium deducitur, ex hac 25; & patet in numeris 1, 2, 4. extremi enim 1, & 4 dant ſummam 5 quæ maior eſt quam 4 dupla medij 2.

III

IN dupla ſint, vt 6, & 3, ſic 4, 2. vel 1, 2, 4. Ex 16, & 17 propoſitionibus ſexti didiciſti in hu. Ærar. 2 Tomo, ſub extremis 6, & 2; vel ſub 1 & 4 rectangula eſſe æqualia rectangulis vel ex medijs 3, & 4, vel quadrato ex media 2. At differunt componere inter ſe extrema, & inter ſe media, à ductu extremi in extremum, & mediorum in ſe. &c.

COROLLARIVM

Ad propoſ. aliquas lib. 7. Elem. ex hactenus expoſitis in hoc lib. 5.

EX numerarijs expoſitionibus huius libri 5. apud nos habes intelligentiam propoſitionum 12, 13, 14, 22 libri ſeptimi, & ſcholiorum ad eandem propoſ. 22 eiuſdem lib. 7, vbi quæ hic geometricè etiam arithmeticè demonſtrantur, ſed hic à nobis facilius per vulgatarum notarum Logiſticarū ſimplicem expoſitionem.

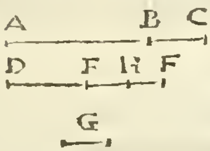
Se-

Sequentes propoſitiones non ſunt Euclidis, ſed à Federico Commandino ex Pappo Alexandrino collectæ.

Propoſ. XXVI. Theor. XXVI.

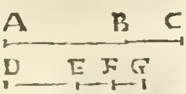
Si prima ad ſecundam maiorem habuerit proportionem, quàm tertia ad quartam, habebit conuertendo ſecunda ad primam minorem, quam quarta ad tertiam.

HAbeat AB ad BC maiorem proportionem, quàm DE ad EF. Dico CB ad BA minorem habere, quàm FE ad ED. Sit vt AB ad BC, ita DE ad aliam G: ergo DE ad G maiorẽ habet proportionem, quàm DE ad EF: a minor ergo erit G, quàm EF. Ponatur ipſi G æqualis EH. Quia igitur vt AB ad BC, ita eſt DE ad EH b erit conuertendo, vt CB ad BA, ita HE ad ED. c Sed HE ad ED minorẽ habet proportionem, quàm FE ad ED: ergo & CB ad AB minorem habet proportionem, quàm FE ad ED. Quod oportuit demonſtrare.



a prop. 8. 5.
b Lemma propo. 4. 5.
c propoſ. 8. 5.

Quod ſi AB ad BC minorem habuerit proportionem, quàm DE ad EF; habebit conuertendo CB ad BA maiorem, quàm FE ad ED. Sit vt AB ad BC, ita DE ad aliam EG, d quæ maior erit, quàm EF: conuertendo e ergo erit vt CB ad BA, ita GE ad ED. At GE ad ED maiorem habet proportionem, quàm FE ad ED, ergo CB ad AB maiorem habebit, quàm FE ad ED.



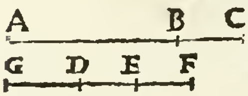
d propoſ. 8. 5.
e Lemma propoſ. 4. 5.
f propoſ. 8. 5.

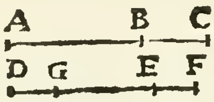
Propoſ. XXVII. Theor. XXVII.

Si prima ad ſecundam maiorem habuerit proportionem, quàm tertia ad quartam, habebit, permutando, prima ad tertiam maiorem, quàm ſecunda ad quartam.

HAbeat A B ad B C maiorem proportionem, quàm DE ad EF. Dico AB ad DE maiorē habere, quàm BC ad EF. Vt enim AB ad BC, ita ſit alia GE ad EF, *a* quę maior erit, quàm DE. *b* Eſt ergo, permutando, vt AB ad GE, ita BC ad EF. *c* Habet autem AB ad DE maiorem proportionem, quàm AB ad GE, hoc eſt, quàm B C ad EF; ergo A B ad D E maiorem proportionem habebit, quàm BC ad EF. Quod oportuit demonſtrare.

a propoſ. 8. 5.
b propoſ. 16. 5.
c propoſ. 8. 5.





Eàdem ratione, ſi A B ad BC minorem habeat proportionem, quàm DE ad EF, ſequetur, permutando, AB ad DE minorem habere, quàm BC ad EF. Sit enim vt AB ad BC, ita alia GE ad EF, *d* quæ minor erit, quàm DE. *e* Sed AB ad DE minorem habet proportionem, quàm AB ad GE, hoc eſt, quàm BC ad EF. Habebit igitur AB DE ad minorē proportionem, quàm BC ad EF.

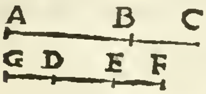
d propoſ. 8. 5.
e propoſ. 8. 5.

Propoſ. XXVIII. Theor. XXVIII.

Si prima ad ſecundam maiorem proportionem habeat, quàm tertia ad quartam, etiam,

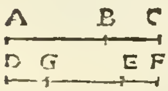
com-

componendo, prima, & ſecunda ad ſecundam maiorem proportionē habebunt, quàm tertia, & quarta ad quartam.



HAbeat AB ad BC maiorem proportionem quàm DE ad EF. Dico & AC ad CB maiorem habere quàm DF ad FE. Sit vt AB ad BC, ita alia GE ad EF; *a* erit GE maior, quam DE. Quia igitur eſt, vt AB ad BC; ita GE ad EF; *b* erit, componendo, vt AC ad CB, ita GF ad FE. *c* Sed GF ad FE maiorem proportionem habet, quàm DF ad FE; ergo & AC ad CB maiorem habet proportionem, quàm DF ad FE. Quod oportuit demonſtrare.

a *propoſ.* 8. 5.
b *propoſ.* 18. 5.
c *propoſ.* 8. 5.

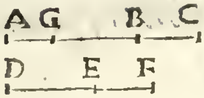


Quod ſi AB ad BC minorem proportionem habeat, quàm DE ad EF, *d* habebit etiam componendo, AC ad CB minorem, quàm DF ad EF. Quia enim AB ad BC minorem proportionem habet, quàm DE ad EF; ſit vt AB ad BC, ita alia GE ad EF, *e* erit ea minor, quàm DE. Ergo vt AC ad CB, ita erit GF ad FE; ſed GF ad FE minorē habet proportionem, quàm DF ad FE; ergo & AC ad CB minorem habebit, quàm DF ad FE.

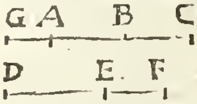
d *propoſ.* 18. 5.
e *propoſ.* 8. 5.

Propoſ. XXIX. Theor. XXIX.

Si prima, & ſecunda ad ſecundam maiorem habeat proportionem, quàm tertia, & quarta ad quartam, habebit &, diuidendo, prima ad ſecundam maiorem proportionem, quàm tertia ad quartam.



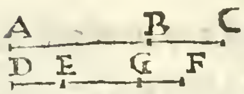
HAbeat AC ad CB maiorem proportionem, quàm DF ad FE. Dico & AB ad BC maiorem habere, quàm DE ad EF. Vt enim DF ad
a propoſ. 8. 5. FE, ita ſit alia GC ad CB; *a* eritque GC minor, quàm AC &, diuidendo, erit GB ad BC, vt DE ad EF. *b* Sed AB ad
b propoſ. 8. 5. BC maiorem proportionem habet, quàm GB ad BC; ergo & AB ad BC maiorem habebit, quàm DE ad EF. Si vero AC ad CB minorem habeat proportionem, quàm DF ad FE, habebit &, diuidendo, AB ad BC minorem, quàm DE ad EF. Si enim ſit vt DF ad FE, ita alia G-

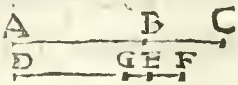


c propoſ. 8. 5. C ad CB, *c* erit GC, quàm AC, maior, *a* eritque, diuidendo, GB ad BC, vt DE ad EF. Habet autem AB ad BC mi-
d propoſ. 17. 5. norem proportionem, quàm GB ad BC; habebit ergo & AB ad BC minorem, quàm DE ad EF.

Propoſ. XXX. Theor. XXX.

Si prima, & ſecunda ad ſecundam maiorem proportionem habeat, quàm tertia, & quarta ad quartam; per conuerſionem rationis prima, & ſecunda ad primam minorem habebit, quàm tertia, & quarta ad tertiam.



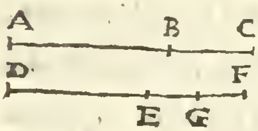


HAbeat AC ad BC maiorem proportionem, quàm DF ad FE. Dico CA ad AB minorem habere, quàm FD ad DE. Sit enim vt AC ad CB, ſic
a propoſ. 8. 5. DF ad aliã FG, *a* quæ minor erit, quàm
b coroll. 19 5. FE. *b* Quare, per conuerſionem rationis, vt CA ad AB, ita erit FD ad DG. *c* Sed FD ad DG minorem proportionem
c propoſ. 8. 5. habet, quàm FD ad DE; ergo & CA ad AB minorem habebit, quàm FD ad DE. Quod ſi AC ad CB minorem propor-

portionem habeat, quàm DF ad FE, habebit per conuerſionem rationis, CA ad AB maiorem, quàm FD ad DE; erit enim vt AC ad CB, ita DF ad maiorem, quàm FE. Reliqua manifeſta ſunt.

Propoſ. XXXI. Theor XXXI.

Si prima ad tertiam maiorem proportionẽ habeat, quàm ſecunda ad quartam, habebit etiam prima ad tertiam, maiorem, quàm prima, & ſecunda ad tertiam, & quartam.



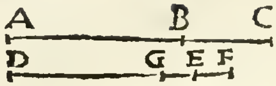
HAbeat AB ad DE maiorem proportionem, quàm BC ad EF. Dico & AB ad DE maiorem habere, quam AC ad DF. Sit enim vt AB ad DE, ita BC ad aliam EG, *a* quæ minor erit, quàm EF. *b* Ergo tota AC ad totam DG eſt vt AB ad DE. *c* Sed AC ad DG maiorem proportionẽ habet, quàm ad DF; ergo AB ad DE maiorem habebit, quàm AC ad DF. Et manifeſtum eſt totam AC ad totam DF minorem habere, quàm AB ad DE; & ſi minor ſit proportio partis, totius maior erit.

a *propoſ.* 8. 5.
b *propoſ.* 12. 5.
c *propoſ.* 8. 5.

Propoſ. XXXII. Theor. XXXII.

Si tota ad totam maiorem habuerit proportionem, quàm ablata ad ablatam; habebit & reliqua ad reliquam maiorem, quàm tota ad totam.

HAbeat AC ad DF maiorem proportionem, quàm AB

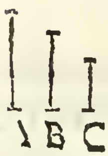


AB ad DE. Dico & reliquã BC ad reliquam EF maiorem habere, quàm AC ad DF. Sit enim vt AC ad DF, ita AB ad DG; a ergo & reliqua BC ad reliquam GF eſt, vt AC ad DE. Sed b BC ad EF maiorem proportionem habet, quàm ad FG; ergò & BC ad EF maiorem habebit, quàm AC ad DF. Si vero AC ad DF minorem proportionem habeat, quàm AB ad DE, & reliqua BC ad reliquam EF minorem habebit, quàm AC ad DE; quod eodem, quo ſupra, modo oſtendetur.

a propoſ. 19. 5.
b propoſ. 8. 5.

Propoſ. XXXIII. Theor. XXXIII.

Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis numero æquales, habeatque prima priorum ad ſecundam maiorem proportionem, quàm prima poſteriorum ad ſecundam, ſecunda verò priorum ad tertiam maiorem habeat, quàm ſecunda poſteriorum ad tertiam: etiam, ex æquali, prima priorum ad tertiam maiorem habebit, quam prima poſteriorum ad tertiam.





HAbeat A ad B maiorem proportionem, quàm D ad E, & B ad C maiorẽ, quàm E ad F. Dico, ex ęquali A ad C maiorem habere, quàm D ad F. Cùm enim A ad B maiorem proportionem habeat, quàm D ad E, a habebit, permutando, A ad D maiorem, quàm B ad E. Et eàdem ratione B ad E maiorem, quàm C ad F. Ergo A ad D maiorem habet, quàm C ad F; &, permutando, A ad C maio-

a propoſ. 27. 5.

rem

rem habebit, quam D ad F. Quod oportebat demonſtrare.

Quod ſi prima priorum ad ſecundam minorem habeat proportionem, quàm prima poſteriorum ad ſecundam, ſecunda verò priorum ad tertiam minorem habeat, quàm ſecunda poſteriorum ad tertiam; ſimiliter demonſtrabitur etiam, ex æquali, primam priorum ad tertiam minorem proportionem habere, quàm primã poſteriorũ ad tertiam.

§ III.

SCHOLIA.

Antecedentes propoſ. elementares à 26 ad 33 in hoc lib., à neotericis additæ. Quæ ſupponunt coroll. apud nos in lib. 6 elem. Vſus, & exempla anticipationis etiam in Theorematibus. Noſtra methodus confirmata.

1 *Dditæ reliquæ propoſit. à 25 Eucl. ad fin. huius lib. 5 vtuntur principio, quod ſupponunt ante librum 6, & à Clauio tamquam per ſe notum ponitur in fine definitionum huius libri 5. eſt autem huiuſmodi.* Quam proportionem habet magnitudo aliqua ad aliam, eandem habebit quæuis magnitudo propoſita ad aliquam aliam; & eandem habebit quæpiam alia magnitudo ad quamuis magnitudinem propoſitam. *Quæ vero poſitio an rectè ſupponatur per ſe nota non eſt meum hic cenſere.*

2 *Affirmo tantum à magnis illis Geometris, qui propoſitiones illas pertinẽtes ad hunc lib. 5, ac perutiles addiderant, rectè ſuppoſitum id principium tamquam corollarium ex* 12 *propoſ. lib* 6. *Nihil enim aliud eſt id principiũ, ſeu propoſitio, quàm,* datis tribus magnitudinibus, quartam proportionalẽ poſſe dari.

Quod

Etiam in theorema eſt vſus eſt anticipationis aliquã-do.

Quod deinde, loco lemmatis, poſsit videri in lib. 6 poſtquàm in eo ventum fuerit ex ordine ad 12 propoſitionem. Eſt enim vſitatum aliquãdo apud Philoſophos Geometras non ſolum paſsim in praxibus, (vt oſtendimus in 1 Tom. ad propoſitiones 11, & 23 §. 4, & 2) ſed etiã aliquãdo in theorematibus vti aliqua anticipatione. Sic Proclus ad propoſ. 24. lib. 1, vtitur ſuppoſitis 27, 32, 37 poſterioribus propoſitionibus. Sic Clauius ad l. 3 in diſput. contra Peletarium vtitur anticipatione aliquorum, quæ requirunt cognitionem, & expoſitionem ſaltẽ definitionis 4 li. 5 de ijs, quæ in Geom. philoſophia habent, vel non habent inter ſe proportionem. Idem etiam ad definitiones 5, & 7 libri huius 5 dum circa æquemultiplicia demonſtrat aliqua, vtitur aliquibus propoſitionibus libri ſexti, quæ requirunt demonſtrationes propoſitionum aliquarum ex hoc lib. 5, poſt eas definitiones, quas demonſtrat. Sic etiam Cõmandinus, & ſi qui alij addiderunt has propoſitiones propoſitionibus Euclidis, ſupponunt propoſ. 12 lib. 6 paulo poſt videndam tamquam lemma poſtpoſitum; nec interim cenſuerunt priuandum hunc librum quintum perutili auctario ad eum ſpectante.

Exempla.

Iis exẽplis & nos, ſed tamẽ cũ demonſtrationibus numerarijs in prõptu.

3 *Quemadmodum & nos non cenſuimus priuandos Tyrones præmatura, ac iucunda cognitione rerum ex lib. 6 deductarum, vt libentius ſcientias Mathematicas proſequerentur. Præſertim cùm, ſi quid nos ſemel, ac iterum aliquando ſupponamus ex hoc lib. 5, id ſtatim pateat in numeris à nobis appoſitis pro definitionum, & propoſitionum expoſitionibus; ea verò quæ prædicti Auctores ſupponunt è lib. 6, ſupponunt alias, atq; alias anteriores propoſitiones eiuſdem lib. ſexti.*

Commoda noſtræ methodi.

4 *Interim noſtra methodus hic etiam id habet commodi, vt cùm iam in 1, & 2 parte Tomi ſecũdi præceſſerit apud nos libri ſexti, atque in eo propoſitionis 12 cognitio, nihil ſupponatur, & ritè, ac planè demonſtratiuè ſciri poſsint etiam propoſitiones de proportionibus hic additæ lib. 5 Elementario.*

Sine ſuppoſit. patet in num. pp. antec.

Quarum quidem additarũ propoſitionum veritates experiri licebit tibi, mi Tyro, in numeris iuxta exempla, quæ habes à nobis in antecedẽtibus. Et tamq; etiã hoc à numeris commodi, vt per eos oſtenſæ veritates additarum propoſitionũ non egeant ſuppoſitione illius principij, ſeu corollarij ex 12 propoſ. lib. 6. per numeros enim ſine eo ſuppoſito ſtatim patebunt.

Elem.

ELEMENTVM

QVARTVM ex noſtra, TERTIVM ex veteri METHODO.

Quinti Tomi materiam, & campos patentiſſimos geometricos, qui ex hoc 3. elemento aperiuntur vide indicatos in fine noſtrorum horum Scholiorum ad hunc 3 librum. *Quinti Tomi materia.*

DEFINITIONES.

I. ÆQuales circuli ſunt, quorum diametri ſunt æquales; vel quorum quæ ex centris ſunt æquales.

II. Recta linea circulum tangere dicitur, quæ contingens circulum, & producta ipſum non ſecat. *In figura propoſ. 16 linea AE tangit circulum ABC. In 18, & 19 DE tangit circulum ABC.*

III. Circuli ſe tangere dicuntur, qui ſeipſos cõtingentes, ſe ipſos non ſecant. *Circuli ſe contingunt aut interius, vt Propoſ. 6 circuli ABC, DEC; aut exterius, vt Propoſ. 12 circuli BAC, DAE.*

IV. In circulo æqualiter à centro diſtare dicuntur rectę lineæ, cũ à centro ad ipſas perpendiculares ductæ æquales fuerint. *Vt Propoſ. 14. lineæ AB,*

CD à centro E æqualiter diſtant quod EF, EG ſint æquales.

V. Magis diſtare dicitur, in quam maior perpẽdicularis cadit.

SCHOLION.

IN definitionibus 4, & 5 rectè ſumuntur diſtantiæ à perpendiculari, quia ea ſola certa menſura eſt. Reuiſe § 4 ad propoſit. 19 in primo Tomo.

DEFINITIONES.

VI. Portio circuli eſt figura, quæ rectà lineà, & circuli circumferentià continetur. *Vt in prima propoſ. ſunt portiones ACB, AEB.*

VII. Portionis angulus eſt, qui rectà lineà, & circuli circumferentià continetur. *Vt in prima propoſ. ſunt anguli CAB, EAB, rectà AB, & peripherijs CA, EA contẽti.*

VIII. In portione angulus eſt, cum in circumferẽtia portionis acceptum punctum fuerit, & ab ipſo ad terminos rectæ lineæ, quæ eſt baſis portionis, iunguntur rectæ, angulus inquam his rectis contentus. *Vt in 26 propoſ. angulus EDF eſt in portione EDF.*

IX Quando verò lineæ angulum continentes, aſſumunt peripheriam, in illa inſiſtere angulus dicitur. *Vt in propoſ. 27 angulus EDF inſiſtit peripheriæ EF.*

X. Sector circuli eſt, quando angulus ad centrum circuli conſtiterit, figura contenta rectis lineis angulum comprehendentibus, & peripherià ab ipſis aſſumptà. *Vt in propoſ. 27 ſector dicitur figura EHF.*

XI Si-

XI. Similes circuli portiones ſunt, quæ capiunt æquales angulos, aut in quibus anguli æquales conſiſtunt.

§ I.

SCHOLION I.

Expoſitiones, & rationes 11 definitionis.

1 *IN definitione 11 innuitur quæ nam appellentur, & ſignificentur ſimiles circulorum portiones, atq; etiam, vt notat Clauius, qui nam ſint ſimiles circumferentiarum arcus. Fiet verò ex defintione propoſitio, ſi deinde demonſtrentur portiones circulorum, vel circumferentiarum, quæ capiant æquales angulos, &c. eſſe inter ſe ſimiles, ideſt habere eandem proportionem ſingulos ad ſuos circulos, vel peripherias.*

2 *Huic 11 definitioni lucem aliquam affert definitio 1 initio 2 Tom. Quemadmodū enim ſimiles figuræ rectilineæ ſunt, quæ ſingules habent angulos æquales, & latera circa æquales angulos proportionalia, ideſt in quibus æquiangulis vt vnius figuræ latus ſe habet ad alterum, & ad reliqua latera eiuſdem figuræ, ſic & alterius figuræ vnum latus, circa angulum æqualem angulo alterius figuræ, ſe habet ad alterum, & ad reliqua latera eiuſdem figuræ. Pari ratione in ſimilibus ſegmentis, vel circumferentiarum portionibus capientibus angulos æquales, vt in vno circulo, vel circumferentia ſe habet ſegmentum circuli, ſiue arcus circumferentiæ ad totum circulum, ſiue ad totam circumferentiam, ſic, & in altero circulo ſegmentum, vel arcus, in quo æqualis eſt angulus angulo alterius, habent eandem proportionem ad reliquum circuli, vel circumferentiæ. Ver. gra. vt alterius circuli, vel circumferentiæ ſegmentum, in quo eſt angulus, tertia pars eſt circuli, vel circumferentiæ, ſic in altero circulo ſegmentum, vel circumferentia, in quibus eſt æqualis angulus, eſt tertia pars ſui circuli, vel circumferentiæ.*

Similitudo 1 definit. lib. 6. cū hac 11.

In quo ſit ſimilitudo ſegmentorum.

Cur ſimilitudo ſegmentorum ſecum trahit æqualitatem angulorum in ſegmentis.

3 *Hæc autem ſimilitudo ſecum trahit æqualitatem angulorum, qui ſimilibus circulis inſiſtunt. Nam ſi duorum inæqualium circulorum arcus ſimiles ſint, ideſt, in exemplo, ita ſit arcus maioris circuli pars tertia peripheriæ, ſicut arcus minoris circuli eſt tertia pars peripheriæ, etiam angulus ad centrum inſiſtens tertiæ parti maioris peripheriæ, tertia erit pars quatuor rectorum, qui conſtitui poſſunt ad centrum maioris circuli, ſicut & angulus ad centrum inſiſtens tertiæ parti minoris peripheriæ tertia erit pars quatuor rectorum, qui conſtitui poſſunt ad centrum minoris circuli; ergo angulus vterq; ad centrum maioris, & minoris circuli ſunt tertia pars quatuor rectorum, ac proinde ſunt inter ſe æquales. Conſonat hæc doctrina cum corollar. 2 ex propoſ. 33 libri 6 translatâ à nobis poſt propoſ. 27 lib. hui. 3, propter rationes ibi allatas. Corollarium eſt:* vt angulus in centro ad 4 rectos, ſic arcus ſubtenſus ad totam circumferentiam.

Aequalitatem angulorũ ad centrũ conſequitur æqualitas angulorum in ſegmẽtis.

4 *Aequalitatem verò angulorum ad centra inſiſtentium ſimilibus arcubus conſequitur etiam æqualitas angulorum in ſegmẽtis. Atq; hæc omnia etiam demonſtrantur in propoſ. 26, 27, hu. li. 3.*

Prudenter definitio 11 eſt deſũpta ab ãgulorũ æqualitate.

Prudẽs verò Geometra in hac 11 definitione cum videret, præſertim Tyronibus, non admodum facile, atq; in promptu eſſe arcuum ſimilitudinem agnoſcere, ſignum atq; indicium obtulit ab angulorum æqualitate in ſegmentis, & arcubus ſimilibus. Facile autem eſt ex 23, & 25 propoſ. lib. 1, & ex noſtris praxibus ad eas propoſitiones, inueſtigare an angulus angulo ſit æqualis. Compertis autem inæqualibus angulis in ſegmentis, pronuntiãdum eſt ea non eſſe ſimilia, ſicut ex æqualibus angulis indicantur ſimilia.

Aliter definire ſimilia ſegmenta.

Ex quibus etiam poſſet à nobis hæc definitio, aliter, ac fortaſſe facilius ad intelligentiam, ſic proponi: Similia ſegmenta, & ſimiles arcus ſunt, quibus inſiſtunt anguli æquales ad centrum. *Sic enim, datis ſegmentis, & arcubus, & inuentis centris eorum, per 25 propoſit. huius libri tertij, ſi anguli ad eorum centra æquales inueniantur, pronuntiandum erit ea ſegmenta, & eos arcus eſſe ſimiles.*

Atq; hæc ad expoſitionem, & rationem 11 definitionis.

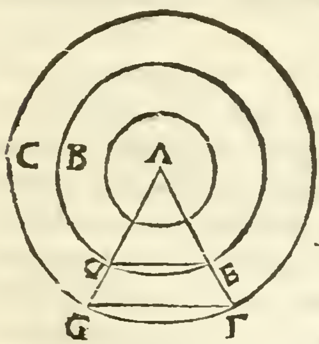
§ 2.

§ II.

SCHOLION II.

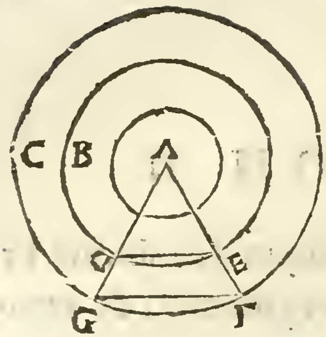
Demonſtratio veritatis aſſertę in definitione 11 de angulis æqualibus in ſegmentis, & arcubus ſimilibus.

QVod verò attinet ad probationem aſſertionis in hac definitione, quòd ſcilicet in ſimilibus ſegmentis, vel arcubus anguli ſint æquales, facillima, & breuiſſima demonſtratione à nobis expedietur, fauente nobis noſtrà methodo, in qua præceſſere ad 4,& 9 propoſ. lib.6. aliqua, quæ vim afferent noſtro huic negotio geometrico non ſolum de ſegmentis, ſed in primis de arcubus ſimilibus, ad vſus varios.



Reponatur hìc figura ex §. 6 ad 2. propoſ. lib.6, in qua ſint ſegmenta ſimilia tam ED, & ΓG (ſub angulo ad centrum minore duobus rectis, ſiue citimo,& intimo ΓAG) quàm DBE, GCΓ (ſub angulo maiore duobus rectis, ſiue extimo, iuxta paradoxum explicatum à nobis in § 2. ad defin. de angulo, in parte prima Tomi 1 huius Aerarij. Vtere imaginatione, atq; animo cõcipe (nè figuras ſine neceſsitate multiplicemus) ab extremis E, D, & ab Γ, G ductas in angulum duas rectas ad punctum aliquod arcuum inter ED, ΓG, vel ad inter GCΓ, DBE, dico in ijs ſegmentis, & arcubus angulos eſſe æquales. Quod ſint æquales in arcubus ED, ΓG patet per demonſtrationẽ in § 10 ad prop.9, lib.6. Ad eius .n. demonſtrationis formam,& figuram, ſi conſtructio, & applicatio fiat in appoſita hìc figura, concludetur

& hic



& hìc æqualitas angulorum in ſimilibus ED ΓG. Quod verò in ſimilibus DBE, GCΓ ſint æquales, patet è ſcholÿs noſtris poſt § 37 *ad* 4 *propoſ. lib.*6, *vbi ſine anticipatione oſtendimus angulos ad peripherias eſſe æquales, quia ſunt dimidÿ anguli ad centrum &c. inde huc applica figuræ appoſitæ.*

In ſimilibus ergo ſegmentis anguli ſunt æquales, ac verè definitio hæc 11 *id aſſerit.*

SCHOLION.

V*Ide & confirmatoria definit.*11 *in* §8 *ad* 31 *huius, inferius.*

§ III.

Corollaria, & vſus varij definit. 11 indicati.

Præcipua Aſtronomicæ operationes nituntur hac 11 *defin.*

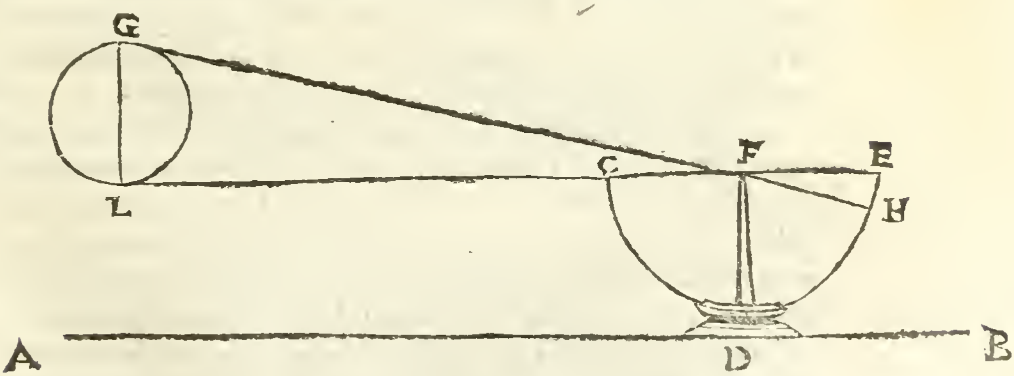
C*Orollaria, quæ hinc deduci poſſunt magni momenti pro rebus præſertim aſtronomicis vide inferius apud nos ad propoſ.* 27 *hu. lib.* 3. *Hìc interim ex ÿs, quæ docuimus in expoſitione huius* 11 *defin. ante demonſtrationem, habes ſimilibus arcubus æquales angulos inſiſtere, qualis hìc vnus, ac idem eſt* ΓAG *inſiſtens ſimilibus* ΓG, ED. *Qua cognita veritate nituntur penè omnes, ſaltem præcipuæ operationes Aſtronomicæ, atq; etiam pleræq; geometricæ. Dimenſiones enim arcuum, atq; altitudinum cæleſtium circa Planetas, & ſtellas, atque etiam peripheriæ circuli concentrici centro terreni orbis, niti videntur hac definitione* 11, *dum Aſtronomici, & Gnomonici operatores fingunt ſe eſſe in centro terræ cum ſuis quadrantibus, Aſtrolabÿs, ac ſimilibus alÿs Dioptricis inſtrumentis, & ab eiuſdem anguli lateribus, ex centro Mundi ad ambitum Terræ, vel Cælorum productis, ſecari ſimiles arcus peripheriarum minorum, ac maiorum.*

§ IV.

PROBLEMA,

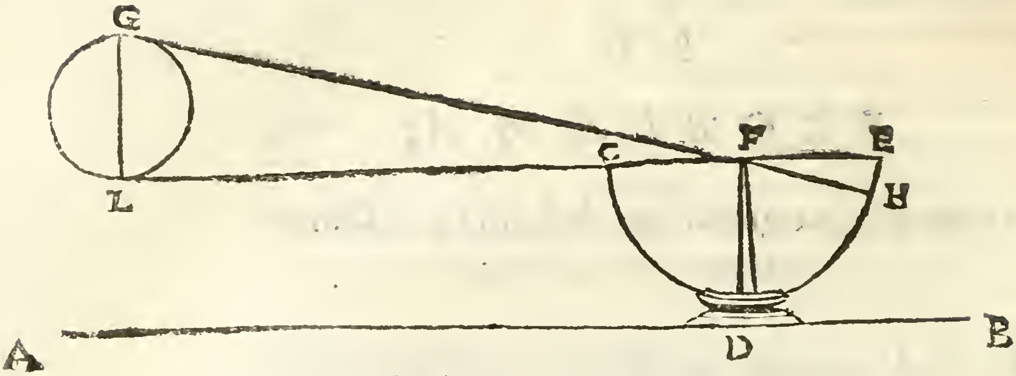
Et vſus Coſmographicus definit. 11 in dimenſione terreni ambitus.

LVbet hic condimenti loco vſum Coſmographicum hu. definit. 11 apponere in exemplo dimetiendi diſtantiam inter duo loca, quæ ſub eodem meridiano inter ſe diſtent, ac præterea dimetiendi totius globi terreni ambitum per ſcaphia quidem, ſed aliter, quàm ab Eratoſthene olim, cuius ingenioſiſſimam operationem habes in 1 Tomo huius Aerarij ad propoſ. 29. § 1. Nos, vt ibi Eratoſthenes, non egemus demonſtrationibus, & anguſtijs vel Solis in ſolſtitio, vel Vrbis ſub Tropico, ſed ſolâ horâ meridianâ cuiuslibet diei, atq; in locis ſub quorumcumq; parallelorum, modò ſub eodem meridiano.



1 Reponatur hic fig. ſcaphij ex § 28 ad 4 prop. in 1 par. 2 Tomi Aerar. ac ſit pro ſcaphio circulus in eo maximus, ſeu meridianus deſignatus, & in gradus de more diuiſus CDE, & in cuiuſcūq; libuerit nitidæ diei eo momēto, in quo vmbræ à gnomone proiectæ extrema cu-

ſpis



ſpis attingit lineã meridianã) ritè deſcriptam cum cautionibus à nobis traditis in Apiar. 8) collocatum ſit ſcaphium ſub Solis radijs, ita vt notari poſsit quantitas arcus, velut EH ſecti ab vmbroſa linea è vertice F proiectà. Eiuſdem dici eodem meridiano momento in altera Vrbe ſita ſub eodem meridiano notarit alius arcum in altero ſcaphio ſectum ab vmbra. Tum accepta per miſſas literas cognitione vtriuſq; notati arcus in ſcaphijs, & minore ſubducto à maiore, notetur differentia. Scilicet ea quot minuta, vel gradus continuerit, dabit terreſtria milliaria correſpondentia minutis, vel gradibus orbitæ ſolaris. Qua pro re vide nos in Apiar. 2, vbi terrarũ orbem per turres, vel malos nauticos metimur. Igitur milliaria in eà differentia contenta erunt diſtantia duorum locorum ſub eodem meridiano, in quibus meridianæ factæ ſunt obſeruationes.

II. At verò pro dimenſione peripheriæ orbem terrarum contingentis, & concentricè ambientis, prædicta differentia arcuum in ſcaphijs quotupla fuerit pars in gradibus, vel minutis totius orbitæ ſolaris, ideſt graduum 360, erit & in milliarijs totupla pars totius orbis terram ambientis. Finge differentiam arcuum in ſcaphio fuiſſe grad. 1, cui aſſirmant recentiorum aliqui correſpondere in mari, vel terris milliaria 53. Igitur ex regula proportionũ, vt gradus 1 ad gradus 360; ſic milliaria 53 ad quartum numerum, qui erit 19080, ambitus peripheriæ terreſtris hic pro exemplo, non pro veritate quæſitus. Modum enim hic tantùm docemus, qui euidentiam rectæ operationis, ac demonſtrationis habet ab hac 11 deſinit. Fingitur enim ſine vllà ſenſibili differentia (vide rationem, & demon-

monſtrationem in initio Apiarij 9) eſſe ſcaphium CDE infra centrũ terræ, & F locatum in ipſo terræ centro, & intelliguntur FE, FH in directum extra ſcaphium protractæ vſq; ad ſectiones peripheriæ terreſtris. Angulus ergo ad F ſub productis FE, FH eſt ad commune centrum & peripheriæ in ſcaphio, & peripheriæ terreſtris extra ſcaphium; ergo ex hac 11 definitione arcus EH, (quem finge eſſe differentiam inuentam in ſcaphio. &c.) & arcus correſpondens in terræ ambitu ſub productis FE, FH (qui diametraliter opponitur, & æqualis eſt arcui diſtantiæ inter duo loca ſub eodem meridiano) ſunt ſimiles; ideſt vt EH ad totum ſuum ambitum (qui fingitur pro Solis orbita, cui eſt cõcentricus) ſic arcus peripheriæ terreſtris ad totam terræ peripheriam: ex qua ſimilitudine in antecedenti exemplo calculum protulimus.

§ V.
SCHOLION.
Methodi noſtræ opportunitas, & neceſſitas.

EX antecedentibus vides opportunitatem, & neceſſitatem noſtræ methodi. Nam 1 non poteſt explicari hæc definitio ſine proportionum cognitione, quam habes apud nos in 1, & 2 parte anteced. 2 Tomi.

2 Non poteſt hæc 11 defin. facta iam propoſitio confirmari ſine lemmate de angulo ad circumferẽtiam dimidio anguli ad centrũ, pro quo lemmate nos non egemus propoſitione vlla poſteriore in lib. 3, ſed ex 32 lib. 1, & ex §. 6 ad eam, & è ſchol. poſt § 37 ad prop. 4, lib. 6 id lemma excuſsimus.

3 Angulorum æqualitas in ſegmentis ſub angulo ad centrum ſupponit iam probata à nobis ad 9 propoſ. lib. 6, §. 10.

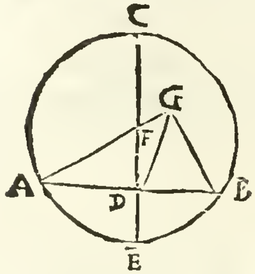
4 Per ſimilitudinem cum ſimilibus figuris rectilineis non poterat illuſtrari hæc 11 definitio, niſi ex noſtra methodo, per quam præceſsit 1 definitio (ante 6 elementum ex veteri methodo) in prima parte 2 Tomi.

5 Problema de ſcaphio hìc præmiſſum, ſine cognitione proportionum, & regulæ aureæ non licuit ſoluere. De quibus nos iam in 1, & 2 parte 2 Tomi. &c.

Propoſ.I. Probl.I.

Dati circuli centrum inuenire.

ESto datus circulus ABC, cuius centrum inuenire oporteat. Ducatur quædam recta linea AB vtcũque, [a] biſeceturq́ue in D; atq́;per D ipſi AB ad [b] angulos rectos erigatur DC, [c] quæ producatur in E, & [d] biſecetur CE in F. Dico F centrũ eſſe circuli ABC. Si non; ſit, ſi fieri poteſt, G, ducanturq; GA, GD, GB, & cum AD, DB æquales ſint, communis DG, [e] erunt duæ AD, DG duabus GD, DB æquales, altera alteri; [f] & baſis GA æqualis baſi GB; ſunt enim ex centro G: ergo & anguli ADG, GDB æquales erunt. Cum autem recta ſuper rectam conſiſtens angulos deinceps æquales fecerit, rectus erit vterq́; angulorum: rectus ergo eſt GDB; ſed & FDB rectus eſt; eſt ergo angulus FDB æqualis angulo GDB, maior minori, quod fieri nequit. Non ergo G centrum eſt. Similiter oſtendemus quod præter F nullum aliud. F ergo centrum eſt. Quod inuenire oportuit.



a *prop.* 10. 1.
b *prop.* 11. 1.
c *poſt.* 2.
d *prop.* 10. 1.
e *propoſ.* 8. 1.
f *propoſ.* 8. 1.

Corol-

COROLLARIVM.

EX his manifeſtum eſt, ſi in circulo recta quædam rectam quandam bifariam, & ad angulos rectos ſecet, in ſecante centrum circuli eſſe.

SCHOLION I.

Hoc Eucl. Problema eſt Poriſma:

HOc primum problema huius libri tertij elementaris eſt proprie poriſma. Reuiſ. in tom. 1. § 1 ad corollarium ex 15 propoſit. & hic inferius in ſchol. 2. ad hanc.

§ I.

PROBLEMA.

Duorum circulorum ſe mutuo ſecantium centra inuenire.

EAdem operâ, & operatione cum Euclide duorum circulorũ ſe mutuo ſecantium centra in vna, eademque linea exiſtentia inuenientur. Finge in figura Euclidis circulum ABC ab altero circulo ſecari per puncta AB. Vna, eademq; CE biſarians ad rectos rectam AB iungentem puncta mutuarum ſectionum A, B, & producta extra partes E in alteram imaginatum circulum, continebit in ſe alterum etiam centrum, & in biſariatione diametri inuenietur.

COROLLARIVM I.

ADde corollario Euclidis & hoc noſtrum alterum. Centrum circuli eſt in recta, quæ breuiſsima eſt omnium, quæ duci poſſunt à puncto biſariationis D. Ratio eſt à demonſtratione, quam habes in § 3 ad propoſit. 19. in to. 1. Hinc —

§ II.

COROLLARIVM II.

Natura in grauium motibus vtitur hac 1 prop. Ariſtoteles elucidatus.

PAtet etiam naturam uti modo Euclidiano in motionibus grauium, & leuium deorſum, ac ſurſum, quæ vel recedunt à centro, vel quærunt centrum mundi per eam lineam, in qua verè eſt (quæque linea directionis à centro, vel ad centrum appellatur) hoc eſt per breuiſsimam (per quam ſemper non impedita natura operatur) ac facientem angulos rectos cum tangente circularem ſuperfitiem terræ. Ex qua hic doctrina intelligas textũ 33 libri 3 de cælo apud Ariſtotelem.

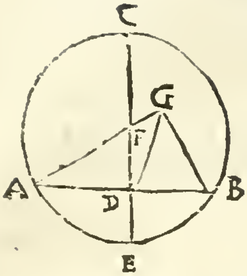
§ III.

PROBLEMA I.

Centrum in vacuo puteì ore inuenire.

EAdem operà, & modo, quo didiciſti circuli centrum inuenire, didiciſti & peripheriæ centrum, ſi lineam circularem ſi-

ne



ne plano accipias. Vnde paradoxum, & praxis deducitur inueniẽdi centri peripheriæ circularis etiam in vacuo, ver. gr. in ore circulari alicuius putei, cui operiendo ſit opus verb. gr. planum ligneum circulare aptum conſtruere. Puta in figura Euclidis putei os eſſe peripheriam ABC: ſumptis duabus haſtis, alteràq; applicatà vbi AB, & alterà ad biſariationem rectangulam conſtitutà ope normæ in D, dimidium punctum inter partes C, E ſecantis os putei dat centrum, à quo ſemidiameter habetur deſignãdi plani circularis pro apto putei operculo. Alterum modum inueniendi centrum in vacuo putealis oris vide inferius ad propoſit. 8 huius.

§ IV.

PROBLEMA II.

Alijs modis inuenire circuli centrum.

ALiter etiam dati circuli centrum inuenies, ſi præter AB (in figura Euclidis) alteram etiam rectam applices in eodem circulo ABC, ab alterutro terminorum A, vel B, eamq; ſecundam applicatam ſimiliter bifaries ad rectes, vt factum eſt in AB; recta enim ſecundam applicatam ſic biſarians ſecabit rectam CE in puncto, vbi eſt centrum circuli. Vide exemplum, & vſum in figura prima Euclidis in propoſit. 5 lib. 4 element. Ratio huius operationis, ac praxis educitur ab hac 1 propoſitione. Nam ex hac centrum circuli eſt in vtraque biſariante applicatam; vnicum autem eſt eiuſdem circuli centrum, ergo neceſſè eſt eſſe in vno, eodemq; puncto mutuæ ſectionis. &c. Vide & aliter centrum inuenire in ſchol. ad 18. Vide & ad 25 hu. Hinc

§ V.

COROLLARIVM, & problema III.

Centrum grauitatis inuenire, ad mirifica, &c.

VSum, praxim, modum organicum habes inueniendi etiam centrũ grauitatis in figuris, vel in grauibus planis, aut etiam in lineis circulariter curuis. Suſpẽditur enim ex aliqua extrema parte planum datæ figuræ ita, vt liberè dependeat, deinde perpendiculum demittitur è puncto ſuſpenſionis, & ſignatur linea vbi chorda, ſeu filum radit planam ſuperfitiẽ. Rurſus ex alia parte extrema ſuſpenditur planum, & e puncto ſuſpenſionis demiſſum perpendiculi filum vbi ſecat priorem lineam in plano ſignatam, ibi eſt centrum grauitatis in eius figuræ plano. In figura Euclidis finge planum circulare ſuſpenſum fuiſſe primo ex A, & inde à filo perpendiculi ſignatam fuiſſe AG; ſecundo ſuſpẽſum etiam eſſe è C, vnde perpendiculi filum CF ſecat AG, in puncto F, ibi eſt centrum grauitatis. Quod aliquando propter diſsimilaritatem, & inæqualitatem partium in planis phyſicis, eſt in loco diuerſo à centro figuræ. Aliud enim eſt eſſe punctum, à quo æquiponderant omnes partes (quod eſt eſſe centrum grauitatis) aliud eſſe, à quo æquidiſtant omnes extremæ partes figuræ, quod eſt eſſe centrum figuræ, ſiue terminorum figurantium, &c. Demonſtratio modi prædicti inueniendi centrum grauitatis eſt ex modo geometrico inueniendi centrum circuli, quem docuimus in anteced. §§ 2. & 4. Cum enim grauia cẽtro grauitatis per breuiſsimam ferantur ad centrum terræ, ergo ſi centrum eſt in (in figura Eucl.) CE, & in AG ſignatis à linea directionis, ne dicamus centrum grauitatis in graui ABC eſſe non vnum, ſed duplex, & in duobus diuerſis punctis duarum linearum (contra lemma quod eſt inferius ad 33 hu.) neceſſe eſt eſſe in communi puncto F ſe ſecantium CE, AG. &c. Cuius inuenti centri admirabiles, ac plurimi ſunt vſus, præcipuè in machinatiua philoſophia, plurimaq; ab eo deducuntur admiranda para-

Quo differant inter ſe centrum grauitatis, & figuræ.

Ratio praxis in inuẽtione cẽtri grauitatis.

paradoxa. Quorum aliqua vide apud nos in Apiar. 4, prog. 1. In figuris vero centri grauitatis vſus ampliſsimus geometricus eſt ad recondita, præſertim Stereometriæ, facillimè conſtruēda, cognoſcenda, &c. Vt habes apud noſtrum Guldinum, & apud nos ſæpe, præſertim in hoc tertio huius Ærarij Tomo.

§ VI.

PROBLEMA IV.

Aliter 3, & 4 circuli centrum inuenire.

H*Abes alium, ac tertium à nobis modum geometricum, & organicum, & demonſtratiuum, quo vel anguli recti in ſemicirculo conſtructi, vel normæ beneficio inuenias dati circuli centrum. Quem vide apud nos in tom. 1. hui. Ærar. § 14 ad 32. propoſit.*

Vide & 4. modum inueniendi centri in, & ad propoſ. 19 huius inferius.

§ VII.

COROLLARIVM IV.

Ad Archimedem de Æquipond.

Q*Vemadmodum hic docetur inuentio centri in linea bifariāte applicatam in circulo; ſic Archimedes propoſ. 14. primi Æquipond. demonſtrat centrum grauitatis cuiuſq; trianguli eſſe in linea ab vno angulorum ducta, & bifariante baſim oppoſitam. Ex quo inuenitur id centrum per mutuam ſectionē duarum ab angulis oppoſitas baſes bifariantium; iuxta anteced. §§ 4, & 5. Archimedi ſuffragationem geometricè habe à nobis in § 41 ad propoſ. 4 lib. 6 in 1 parte 2 Tomi demonſtrauimus,*

uimus enim rectas ab angulis emiſſas, & biſariantes oppoſita latera, ſecare ſe in communi puncto. Quod deinde Archimedes oſtendit eſſe centrum grauitatis.

§ VIII.
Moralia circa inuentionem centri in circulo.

IN § 15 *ad prop. 32 li. 1, habes ab inuētione cētri in circulo moralia, & practica, dum aſſirmat Ariſt. non eſſe niſi viri boni medium virtutis inuenire, ſicut medium circuli ſolus philoſophus Geometricus ex hac 1 propoſ. inuenit. Quibus adde ad praxen moralem & ſequentia. Quemadmodum non niſi per decuſſationes (quæ ſimulacra ſunt crucis) rectarum inuenitur centrum circuli; ſic & medium virtutis non inuenitur niſi per aduerſa, & cruciantia ſenſitiuum appetitum, qui hominem abſtrahit in extrema vel excedentia, vel deficientia, extra rectæ rationis morale id punctum, quod eſt in eo:* ne quid nimis. *Igitur duarum quaſi linearum decuſſatione, atq; cruciatu,* ſuſtine, & abſtine, *ſi animus hominis contineatur in officio, vt proſpera modeſtè, aduerſa fortiter ferat, centrum virtutis in humanæ vitæ circulo inueniet, eritq; fælix quatenus inter homines licet; perfectè fælix futurus poſt hanc vitam delatus per lineam rectæ in vita directionis ad verum vniuerſi centrum, quod eſt Deus, id ſcilicet* Bonum, quod omnia appetunt, *iuxta exordium moralium Nicomachiorum apud Philoſophum Peripateticum, &c.*

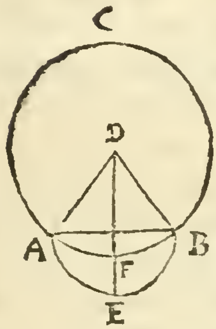
SCHOLION II.

E *Tertio veterum Scholiorum apud Commandinum ad hanc 1 propoſit.* Hoc primum, inter problemata, & theoremata medium eſt; quatenus enim quærere, etiam aliquo modo facere proponit; quatenus verò non in factionem, ſed in inuentionem vbi id, proponit contemplari. *Quærit, & inuenit centrum. &c. pertinet ad genus propoſitionum, quæ Poriſmata dicuntur. Vide ad coroll. propoſ. 15 lib. 1.*

Pro-

Propoſ. II. Theor. I.

Si in circuli peripheria duo puncta accipiantur, recta illa coniungens intra circulum cadet.



ESto circulus ABC, & in eius peripheria accipiãtur quæcunq; duo puncta A, B. Dico rectam, quæ ex A in B ducitur intra circulum cadere. Si non: cadat, ſi fieri poteſt, extra, vt AEB, & accipiatur centrum circuli ABC, quod ſit D, junganturque DA, DB, & producatur DF in E. Quia DA[a] æqualis eſt ipſi DB; [b] erit & angulus DAE angulo DBE æqualis; cumque trianguli DAE vnum latus AE productum ſit in B, [c] erit angulus DEB maior angulo DAE: æquales ſunt autem anguli DAE, DBE, maior ergò eſt DEB angulus, quam DBE; [d] maior autem angulus maius latus ſubtendit; maius ergo eſt DB latus, quam DE. [e] At DB ipſi DF æquale eſt; maius ergo eſt DF, quam DE, minor maiore, quod fieri nequit: Non ergo quæ ex A in B ducitur extra circulum cadit. Similiter oſtẽdemus quod nec in ipſam peripheriam; cadet ergo extra. Si ergo in circulo, &c. Quod oportuit demonſtrare.

a defin. 15.
b propoſ. 5.1.
c propoſ. 16.1.
d propoſ. 19.
e defin. 15.

O Scho-

SCHOLION I.

Aliter, ac facillimè 2 propoſ. demonſtrare, ac de contactu peripheriæ in puncto rectæ. &c.

R*Ectè Clauius hanc propoſitionem etiam affirmatiuè demonſtrat, & corollarium ex eà deducit de circulo tangente lineam in vnico tantum puncto. Cui par eſt corollar. Euclidis inferius è 16 prop. hu. Aliter nos etiam, & breuiter hanc eandem 2 propoſ. demonſtramus, præmiſſis, & ſuppoſitis duobus, quorum cognitionem, ac demonſtrationem iam habes in 2. To. huius Ærarij ad propoſ. 17, § 10, & ad 32 in Schol. poſt § 18, ſcilicet:* ab eodem puncto ad eandem rectam lineam vnica tantum perpendicularis deduci poteſt. *&:* Linea circulum tangens, eſt perpendicularis ad diametrum, &c. *Igitur ſi velit aduerſarius tangi circulum à linea in duobus, vel pluribus punctis, ſinge à centro circuli ductas eſſe duas ſemidiametros ad duo illa puncta contactus: vtraq; erit perpendicularis ad tangentem, per 2 ſuppoſitum; ergo ab eodem centro duci poſſunt ad eandem rectam plures perpendiculares, contra primum ſuppoſitum. Tactus igitur circularis peripheriæ eſt in vno tantum lineæ puncto.*

§ I.
THEOREMA.

De ſphera planum tangente in puncto, ex hac 2 propoſ.

T*Heodoſius Tripolita lib. 1. Sphæricorum propoſ. 3 demonſtrat etiam planum à ſphæra non tangi niſi in vnico puncto. Eius demonſtratio deduci poteſt ex hac 2 propoſit. Eucl. & ex eius corollar. apud Clauium, atq; etiam ex demonſtratione noſtra indicata in antec. 1 ſchol. Cum enim & planum conſtet*

quo-

quodammodo ex infinitis deſignabilibus rectis lineis (fluxus enim rectæ lineæ planã producit ſuperficiem, & circuli gyratio circa diametrum producit ſphæram) ſicut ſphæra conflata concipitur ex infinitis circulis; propterea id, quod in antecedenti ſchol. demonſtratum eſt de contactu vnius circuli ad vnam rectam, idem valet de reliquis circulis ſphæræ, & reliquis lineis plani tangentibus in eodem puncto. &c.

Vide & aliam demonſtrationem geometricam de contactibus circuli, & ſphæræ in puncto, in Schol. ad propoſ 18 hu. inferius.

SCHOLION II.

Phyſica demonſtratio de contactu circuli, vel ſphæræ in puncto.

VT etiam phyſicè veritatem demonſtres de contactu circuli, vel ſphæræ in vnico puncto lineæ rectæ, vel plani, relege quæ apud nos habes in To. 1 hu. Ærar. ad defin. 15 § 3, & 4, vbi & loca Ariſtotelis explicantur circa contactum circuli in plano, & exponuntur de circulo paradoxa huc facientia; circulus. n. & ſphæra ſunt quaſi vnicus, ſeu perpetuus angulus peripheriæ à recto, & plano recedentis vtrinque, &c. quare non niſi in indiuiſibili congruit cum plano. &c.

§ II.

Vſus contactús in puncto ad Ariſtotelis intelligentiam contra indiuiſibilia, & pro miraculo geometrico de aſymptotis.

VSus huius 2 propoſ. & corollar. ac præcedentium in noſtris hiſce Scholijs inſignes, ac multiplices ſunt. Indico aliquos. Ariſtotiles in aureo libello de inſecabilibus lineis, ſiue quod linea non conſtat ex indiuiſibilibus, demonſtrat quod, ſi conſtaret ex punctis, circulus tangens vbi duo aliqua puncta ſe con-

tingunt in lineà, iuxtà aduerſarium, tangeret in duobus punctis lineam, contrà demonſtrata ex hac 2 propoſ. Eucl. Nos verò in Ap. 3. progym. 1, propoſ. 1, & 2 vtimur hic demonſtratis ad demonſtrandum facile pro tyronibus miraculum illud geometricum (quod ab alijs in conicis, vel ex conicis difficilioribus ambagibus demonſtratur) de lineis inter ſe aſymptotis tam rectà ad rectam, quàm rectà ad hyperbolicam. Ex citatis locis Apiariorum expediet Doctori, & Auditori Geometricis proferre, & cognoſcere ea exempla animum tyronum iucundà rerum inopinatarum cognitione ad amorem Mathematicarum ſcientiarum excitantia.

§ III.

SCHOLION III.

Contactus in puncto intelligendi in abſtractione Geometricà.

CIrca prædicta de contactu circuli, vel ſphæræ in puncto, exercenda eſt abſtractio Geometrica, de qua nos in capite vltimo Prolegomenωn, in 10. 1. hu. Aer. Nam & lineæ perfectè rectæ, & perfectè plana, & perfectè circularia ſunt in ideis, & formis geometricis in anima conceptis, in qua & contactus illi præciſi, ac perfecti formantur. De quibus Geometricus Philoſophus demonſtrat, & intelligendus eſt dum in ſignis externis verſatur. Quod ſi ab abſtractis ad concreta phyſica deſcendas, & veritates ideales, & in abſtracto demonſtratas velis materiæ, ſeu quantitati phyſicæ applicare, diſceptationibus erit locus inter phyſicos. non .n. in quantitate phyſica niſi imperfectè rotunda, vel plana ſunt, ac proinde contactus etiam ſunt in puncto phyſico, ideſt in quantitate minima quidem, ſed diuiſibili, non autem in puncto accepto in abſtractione geometrica, quando concipitur id, cuius nulla pars eſt, *& abſtractum à diuiſibili ſecundum longitudinem, latitudinem, profunditatem, ideoq; indiuiſibile. Quidquid igitur digladiuntur inter ſe phyſici circa contactus in phyſica quantitate, Philoſophus Geo-*

Digladiationes phyſicæ circa cõtactus quãtorum nihil officiunt geometricis veritatibꝰ.

Geometricus & pacatus, & animi ſecurus eſt inter geometricam illam ſuam abſtractionem, vbi demonſtrat de figuris conceptis perfectè circularibus, & planis perfectis contactis in puncto, ideſt in indiuiſibili; quod quidem non exiſtat actu in quantitate illa abſtracta figurarum geometricarũ, ſed animo tantùm deſignetur. Quantitatis enim abſtractus, & purus conceptus eſſentialiter inuoluit diuiſibilitatem, nec ex indiuiſibilibus abſtractis (hoc eſt punctis Mathematicis, quorum nulla pars eſt, & concipiuntur non quanta) fieri poteſt, aut conſtare quantitas, eiuſq; diuiſibilitas. Sed omiſsis diſceptatorijs, accedamus ad aliquid morale.

Quantitatis cõceptus ĩuoluit diuiſibilitatem.

Ex abſtractis indiuiſibilibus nõ poteſt conſtare etiã abſtructa quãtitas

§ IV.

Morales contactus. Vir bonus circularis, & ſphæricus.

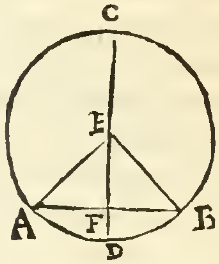
V*Ir bonus non ſolum eſt conſtantià quadratus, & cubicus, (vt ex Ariſtotele protulimus in antecedentibus in ſecun. tomo, & alibi) ſed etiam eſt, vt cecinit Venuſinus*, teres, atq; rotundus, *circularis, & ſphæricus non ſolum ob virtutem perfectam, ſed in primis quia, (vt circulus, & ſphæra) terrena non tangit niſi in puncto neceſsitatis, delitias, & ſuperfluam abundantiam abijciens, vndique affectu à terris ad cæleſtia eleuatus, verè* ἅγιος, *ideſt Sanctus. Ac opportunè Sanctorum ſolemne, & commune feſtum celebramus in hiſce Nouembris Kalẽdis dum hæc ſcribo.*

Pro-

Propoſ. III. Theor. II.

Si in circulo recta quædam linea per centrum ducta rectam non per centrum ductam biſecet, & ad angulos rectos ipſam ſecabit: Et ſi ad angulos rectos ipſam ſecet, biſariam quoque ſecabit.

ESto circulus ABC, & recta quædã CD per centrum rectam quandam AB non per centrum ductam biſecet in F. Dico quod & ad angulos rectos ipſam ſecet. Accipiatur enim cẽtrum E, ducanturque EA, EB.



Cumq; AF, FB æquales ſint, communis FE, erunt duæ AF, FE duabus FB, FE æquales, baſiſq; EA baſi EB: [a] ergo & angulus AFE angulo BFE æqualis erit. Cum autem recta ſuper rectam conſiſtens angulos deinceps æquales fecerit, [b] rectus erit vterq; æqualium angulorum: vterque ergo AFE, BFE rectus erit: ergo CD per centrum ducta biſecans AB non per centrum ductam, & ad angulos rectos ipſam ſecabit. Sed iam CD ad angulos rectos ſecet ipſam AB; dico & biſecare ipſam, hoc eſt, AF, FE æquales eſſe. iiſdem conſtructis, cum EA, EB æquales ſint, [c] erunt & anguli

a *propoſ.* 8.1.

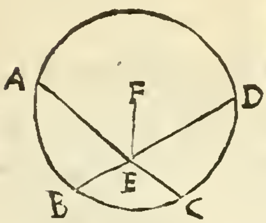
b *defin.* 10.1.

c *propoſ.* 5.1.

guli EAF, EBF æquales: eſt autem rectus AFE recto BFE æqualis: duo ergo triangula EAF, EFB duos angulos duobus angulis ęquales habētia, & vnum latus vni lateri, nempe commune EF, quod vni æqualium angulorum ſubtenditur, habebit & reliqua latera reliquis æqualia: æquales ergo ſunt AF, FB. Si ergo in circulo, &c. Quod oportuit demonſtrare. d propoſ. 26.1.

Propoſ. IV. Theor. III.

Si in circulo duæ rectæ lineæ ſe mutuò ſecent, non per centrum ductæ, ſe bifariam non ſecabunt.



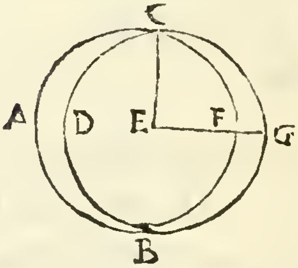
ESto circulus ABCD, in eoque duæ rectæ AC, BD non per centrum ductæ, ſe inuicem in E ſecent. Dico quod ſe bifariam non ſecent. Si fieri poteſt, ſe bifariam ſecent; ſintq; & AE, EC, & DE, BE æquales, & accipiatur centrum F, ducaturq; FE. Cùm ergo recta quædam FE per centrum ducta rectam quandam AC non per centrum ductam biſecet, ad rectos [a] angulos ipſam ſecabit: angulus ergo FEA rectus eſt. Ruiſus cùm recta FE rectam quandam BD non per a prop.3. 3.

cen-

b prop. 3. 3. centrum ductam biſecet, ad [b] angulos rectos ipſam ſecabit; rectus ergo eſt FEB. Oſtenſus autem eſt & FEA rectus: ergo FEA æqualis eſt FEB, minor maiori, quod fieri nequit: non ergo AC, BD ſe bifariam ſecant. Si ergo in circulo, &c. Quod oportuit demonſtrare.

Propoſitio V. Theor. IV.

Si duo circuli ſe inuicem ſecuerint, non erit ipſorum idem centrum.



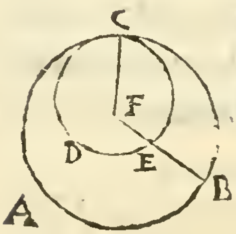
DVo circuli ABC, CDG ſe inuicem ſecent in B, & C; dico ipſorum non eſſe idem centrũ. Si eſt, eſto E, iungatur EC, & ducatur EFG vtcunq. Et quia E centrum eſt circuli ABC, [a] erit EC æqualis EF. Rurſus quia E centrum eſt circuli CDG, [b] erit & EC æqualis EG. Oſtenſa eſt autem EC æqualis EF. erit igitur EF æqualis EG, minor maiori. Quod fieri nequit. Non ergo E centrum eſt circulorũ ABC, CDG. Si ergo duo circuli, &c. Quod oportuit demonſtrare.

a defin. 15. 1.
b defin. 15. 1.

Pro-

Propoſ. VI. Theor. V.

Si duo circuli interius ſe contingant, non erit illorum idem centrum.



DVo circuli ABC, CDE ſe tangant interius in C. Dico illorum nõ eſſe idem centrum. Si eſt: Eſto F, iungaturque FC, & ducatur FEB vtcunque. Cùm ergo F centrum ſit circuli ABC, [a] erit FC æqualis FB. Et cum F centrum etiam ſit circuli CDE, [b] erit FC æqualis FE: demonſtrata eſt autem & FC æqualis FB: ergo FE æqualis eſt FB, minor maiori; quod fieri nequit. Non ergo F centrum eſt circulorum ABC, CDE. Si ergo duo circuli, &c. Quod demonſtrare oportuit.

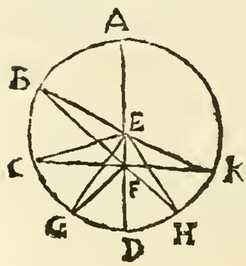
a *defin.* 19. 1.

b *defin.* 15. 1.

Propoſ. VII. Theor. VI.

Si in diametro circuli accipiatur punctum, quod centrum non ſit, ab eoq; in circulum cadant rectæ quædam, maxima erit in qua eſt centrum, minima reliqua: aliarum verò propinquior ei, quæ per centrum tranſit remotiore ſemper maior eſt. Duæ autem tantùm æquales à puncto in circulum cadent ad vtraſq; partes ipſius minimæ.

ESto circulus ABCD, diametrus eius AD, in qua ſumatur punctum quoduis F, quod centrum non ſit. Centrum autem ſit E. Cadant ab F ad circulum rectæ quędam FB, FC, FG. Dico maximam eſſe F A, minimam FD: aliarum FB maiorem, quàm FC; & FC maiorem, quàm FG. iungantur enim BE, CE, GE. Et quia omnis trianguli *a* duo latera reliquo maiora ſunt, erunt EB, EF maiores BF; eſt autem AE ipſi BE æqualis, ſunt ergo BE, EF ęquales ipſi AF; maior igitur eſt AF quàm BF. Rurſus cùm BE, CE æquales ſint, communis EF, erunt duæ BE, EF duabus CE, EF æquales: ſed angulus BEF *b* maior



a propoſ. 20. 1.

ior eſt angulo CEF: erit [c] igitur & baſis BF maior baſi CF. Eandem ob cauſam maior eſt CF, quam FG. Rurſus cùm GF, FE maiores ſint, quàm EG, & EG, ED æquales, erunt GF, FE maiores, quam ED; communis auferatur EF; [d] reliqua ergo GF reliqua FD maior erit. Eſt ergo FA maxima; minima DF; maior autem FB, quàm FC, & hæc maior, quàm FG. Dico ſecũdo, quod ex F duę tantum æquales ad circulum cadant vtrinq; à minima DF. [e] Conſtituatur enim ad E rectæ EF angulus FEH æqualis angulo GEF, ducaturq; FG. Cùm ergo GE, EH æquales ſint, communis EF, erunt duæ GE, EF duabus HE, EF æquales, anguluſq; GEF angulo HEF ęqualis: [f] igitur & baſis FG baſi FH erit æqualis. Dico tertio, quod ipſi FG nulla alia æqualis ex F ad circulum cadat. Si enim cadit, cadat FK. Cùm ergo vtraq; FK, FH ipſi FG ſit æqualis, [g] erit & FK ipſi FH æqualis: propinquior ergo ei, quæ eſt per centrum, æqualis eſt remotiori, quod fieri nequit. Vel ſic. Ducatur EK. Cùm ergo GE, EK æquales ſint, communis FE, item [h] baſis GF baſi FK ęqualis, [i] erit & angulus GEF angulo KEF æqualis: ſed CEF ęqualis eſt angulus HEF; ergo & HEF æqualis erit ipſi KEF, minor maiori, quod fieri nequit. Non ergo ab F plures vnà ipſi GF æquales ad circulũ ca-

b *ax. 9.*
c *propoſ. 24. 1.*
d *ax. 5.*
e *propoſ. 23. 1.*
f *propoſ. 4. 1.*
g *ax. 1.*
h *def. 15*
i *prop. 8. 1.*

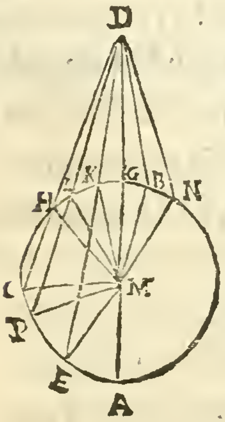
cadunt. Si ergo in diametro, &c. Quod oportuit demonſtrare.

Propoſ. VIII. Theor. VII.

Si extra circulum accipiatur punctum, ab eoque ad circulum ducantur rectæ quædam lineæ, quarum vna per centrum tranſeat, reliquæ vt libet. Earũ quidem, quæ in cauam peripheriam cadunt, maxima eſt quæ eſt per centrum: aliarum verò propinquior ei, quæ per centrum, remotiore ſemper maior eſt. At earum, quæ in conuexam peripheriam cadunt, minima eſt quæ inter punctum, & diametrum interijcitur; aliarum verò quæ propinquior minimæ ſemper remotiore minor eſt. Duæ autem tantum æquales à puncto in circulum cadunt ad vtraſq; partes minimæ.

ESto circulus A B C, extra quem accipiatur punctum D, ab ipſoq; ducantur rectę quędam ad circulum DA, DE, DP, DC, ducaturq; DA per centrum. Dico quod cadentium ad cauam peripheriam A E P C maxima ſit quæ per centrum tranſit, DA; minima, quæ inter punctum

ctum D, & diametrum AG interijcitur, quæ eſt DG; maior autem DE, quàm DP, & hæc maior, quàm DC. Earum verò, quæ in conuexam peripheriam HLKG cadunt, ſemper propinquior minimæ DG minor eſt remotiore, hoc



eſt, DK minor eſt, quàm DL, & hæc minor, quàm DH. Accipiatur centrum M, iunganturq; ME, MP, MC, MH, ML, KM. Et cum AM, EM *a* æquales ſint, communis addatur MD, eritq; AD æqualis vtriſq; EM, MD; ſed EM, MD *b* maiores ſunt, quàm ED: ergo & AD maior eſt quam ED. Rurſus ME, MP æquales ſunt; communis addatur MD; eruntq; EM, MD æquales ipſis PM, MD: ſed angulus EMD maior eſt angulo PMD; *c* ergo & baſis ED maior eſt baſi PD. Similiter oſtẽdemus PD maiorem eſſe CD. Maxima ergo eſt DA, maior DE quàm DP, & DP maior quàm DC. Cumq; MK, KD *d* maiores ſint quàm MD, & MG æqualis MK, *e* erit reliqua KD maior reliquá GD. Quare GD minor eſt quàm KD, eſt enim omnium minima. Et quia lineę MK, KD à terminis lateris MD intra triangulum MLD conſtitutę ſunt, *f* erũt illæ minores, quàm ML, LD: ſunt autem MK,

a *def.* 15.
b *propoſ.* 20. 1.
c *propoſ.* 24. 1.
d *propoſ.* 20. 1.
e *ax.* 5.
f *propoſ.* 21. 1.

ML

ML æquales: ergo reliqua DK minor eſt reliquà DL. Eodem modo oſtendemus DL minorem eſſe DH. Minima ergo eſt DG; minor autem DK quàm DL, & DL minor quàm DH. Deinde dico, quod à puncto D tantùm duæ æquales in circulum cadant ad vtraſq; partes minimæ. [g] Conſtituatur ad M lineæ MD angulo KMD æqualis DMB, ducaturque DB. Cùm ergo MK, MB æquales ſint, MD communis, erunt duæ KM, MD duabus BM, MD æquales, altera alteri; ſunt verò & anguli KMD, BMD ęquales, [h] erũt igitur & baſes DK, DB æquales. Dico tertio rectæ DK à puncto D ad circulum æqualem aliam non cadere. Si enim poteſt, cadat DN. Cum ergo DK ſit æqualis DN; & ipſi DK æqualis DB; erit [i] & DB ipſi DN æqualis propinquior minimæ remotiori, quod fieri non poſſe demonſtratum eſt.

g *propoſ.* 32.1.

h *propoſ.* 4.1.

i *ax.* 1.

Aliter.

DVcatur MN. Cùm igitur KM æqualis ſit MN, communis MD, & baſis DK æqualis baſi DM, [k] erit & angulus KMD angulo DMN æqualis: ſed KMD æqualis eſt angulo BMD; ergo & BMD ęqualis erit NMD, minor maiori; quod fieri nequit. Non ergo plures quàm

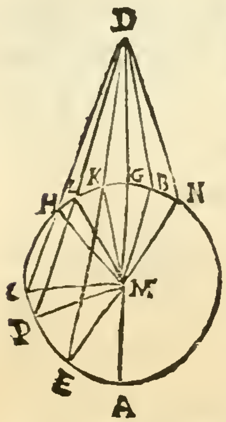
k *propoſ.* 88.1.

duæ

duæ à puncto D ad circulum ABC æquales ad vtraſque partes DG cadunt. Si ergo extra circulum, &c. Quod demonſtrare oportuit.

SCHOLION.

Vſus, & Praxis 8 propoſit. in inuentione per chordam ſemidiametri oris putealis.



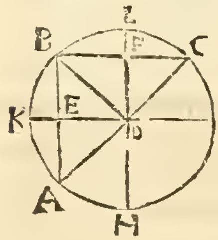
Ex hac 8 propoſitione deducitur, & demonſtratur praxis inueniendæ diametri, & ſimul centri oris aperti alicuius putei. In figura Euclidis finge os circulare aperti putei eſſe NHPA. chordulam affige in puncto quolibet peripheriæ velut in K, quæ chordula inſerta ſit in globulum aliquem perforatum, ac mobilem per eandem chordam. Tum chordá protenſá è K ad latus putei (velut ad P, vbi globulus tangat latus, ſiue peripheriam) moueatur ex P in E, A, & vltra A, ſemper globulo oram extremam radente, & per chordam meãte longius, ac longius à K, donec globulus, vt oram tangat, incipiat per chordam accedere verſus K; tunc enim primum chorda incipiet eſſe minor diametro. Itaque chordæ quantitas vbi deſijt creſcere, & incœpit decreſcere, erit menſura diametri quæſitæ in ore putei. Nam ex hac 8 propoſ. linearum intra peripheriã maxima eſt diameter. Eaq; dimidiata dat punctum centri, & ſemidiametrum, ad cuius interuallum ducatur peripheria pro circulo, quæ ſit æqualis ori putei.

Pro-

Propoſ. IX. Theor. VIII.

Si intra circulum accipiatur punctum, ab eoque ad circulum plures, quàm duæ æquales rectæ cadant, erit acceptum punctum centrum circuli.

ESto intra circulum ABC acceptũ punctum D, ab eoq; ad circulum ABC plures, quàm duæ rectæ æquales cadant, nempe DA, DB, DC. Dico D centrum eſſe circuli ABC. Iungãtur AB, BC, biſecenturq; in E, & F, & iunctæ ED, DF producantur in G, K, & H, L.



Cùm ergo AE æqualis ſit EB, communis ED, erunt duæ AE, ED duab. BE, ED ęquales; eſt [a] verò & baſis DA baſi DB æqualis, erit [b] igitur & angulus AED angulo BED ęqualis: [c] rectus ergo vterq; eſt: ſecat [d] ergo GK ipſam AB bifariã, & ad angulos rectos. Et quia, [e] quãdo in circulo recta rectam ſecat bifariam, & ad angulos rectos, in ſecante centrum eſt circuli, erit in GK centrum circuli ABC. Eadem ratione centrum erit in HL: & nullum aliud commune punctum habent rectæ GK, HL pręter D: ergo D centrum circuli ABC. Si ergo intra

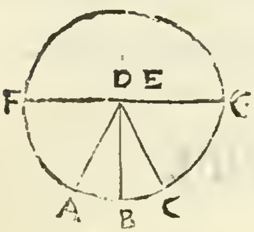
a *ex hypotheſi.*
b *propoſ.* 8. 1.
c *defin.* 10. 1.
d *propoſ.* 3. 3.
e *Corol. prop.* 3. 3

tra

tra circulum, &cet. Quod oportuit demonſtrare.

Aliter.

INtra circulum A B C ſumatur punctum D, ab eoque ad circulum plures quàm duæ rectæ æquales cadant DA, DB, DC. Dico D eſſe centrum circuli ABC. Si non eſt. Eſto E, & iuncta DE producatur in F & G. [a] Eſt autem FG diametrus circuli ABC. Cum ergo in diametro FG acceptum ſit punctum D, quod centrũ *a def. 17. 1.*



circuli nõ eſt, [b] erit DG maxima, maior autem DC, quàm DB, & DB maior quàm DA; ſed & æquales ſunt; quod fieri non poteſt. E ergo centrũ circuli ABC non eſt. Similiter oſtendemus quod præter D aliud nullum, D ergo centrum eſt circuli. *b prop. 7. 3.*

SCHOLION.

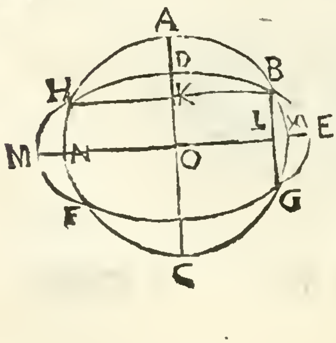
Vſus 9 Propoſ. in inuentione poli dati circuli iuxta inuentionem centri, ad ſtyli perpendicularem erectionem.

A*Dde propoſit. huic 9:* ſi extra circulũ accipiatur punctũ, ab eoq; ad peripheriam plures, quàm duæ æquales deducũtur, erit id puuctum polus circuli. *Relege quæ habes ad intelligentiam noſtræ huiuſce propoſit.§ 3. ad def. 16. in to. 1. h. Ær. Ex hac ergo 9. Eucl. eleuata à nobis etiã ad polum circuli, patet demonſtratio praxis, quam in Ap. 9, Prop. 4, cap. 4. num. 1. tradidimus; ac vniuerſaliter pro erectione, & examinatione ſtyli perpendiculariter erigendi, vel erecti. Vide, & adduc huc plura è § 5 ad prop. 11, & § 14 ad propoſ. 12, in to. 1. hu. Ær.*

Propoſ. X. Theor. VIIII.

Circulus circulum in pluribus, quàm duobus punctis non ſecat.

SI fieri poteſt, ſecet circulus ABC circulum DEF in pluribus punctis quàm duobus, vt in B, G, F, H, iunctæque BG, BH [a] biſecentur in K & L; atq; ex K, & L ipſis BG, BH ad [b] angulos rectos ductæ KC, LM, in A, & E producantur. Cũ ergo



a prop. 10. 1.

b prop. 11. 1.

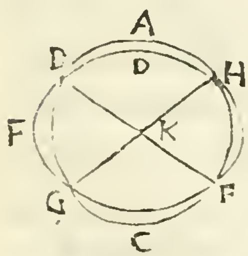
ergo in circulo ABC recta quædam AC rectā quandam BH bifariam,& ad angulos rectos ſecet, [c] erit in AC centrum circuli ABC. Rurſus cùm in eodem circulo ABC recta quædā NX rectam quandam BG bifariam, & ad angulos rectos ſecet, [d] erit in NX cētrum circuli ABC. Demonſtratum autem eſt quod & in AC: atqui in nullo alio puncto rectæ AC, NX concurrūt, quàm in O: eſt ergo O centrum circuli ABC. Similiter demonſtrabimus centrū circuli DEF in O eſſe. Duorum ergo circulorū ABC, DEF ſe inuicem ſecantium idem eſt centrū O: [e] quod fieri nequit. Non ergo circulus circulum &c.

c prop. 5. 3.

d prop. 3. 3.

e prop. 5. 3.

Aliter. circulus ABC circulum DEF in pluribus, quā duobus punctis ſecet, v tin B,G,H,F. Accipiatur circuli ABC cētrum K, iunganturq; KF, KG, KB Cum ergo intra circulum DEF acceptum ſit punctū K, ab eoq; ad circulū DEF cadant plures, quàm duæ rectæ æquales KB, KF, KG, [a] erit K centrum circuli DEF: ſed eſt etiam cētrum circuli ABC: duorum ergo circulorum ſe ſecātium idem eſt centrū: [b] quod fieri non poteſt. Non ergo circulus circulum in pluribus, quàm duobus punctis ſecat. Quod oportuit demonſtrare.



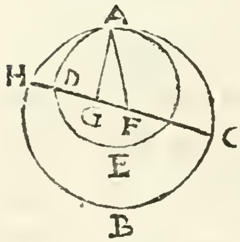
a prop. 9. 1.

b prop. 5. 3.

Propoſ. XI. Theor. X.

Si duo circuli ſe interius contingant, recta linea eorum centra coniungens, ſi producatur, cadet in contactum circulorum.

DVo circuli ABC, ADE interius ſe contingant in A. Accipiatur circuli quidē ABC centrum F, circuli verò ADE centrum G. Dico quod, quæ ex G in F ducitur ſi producatur, in cōtactum cadat. Si non, cadat aliò, vt FGDH, iunganturq; AF, AG. Cùm ergo AG,



a *propoſ.* 21.1. GF [a] maiores ſint, quàm FA, hoc eſt, quàm FH (æqualis enim eſt FA, ipſi FH, eſt enim vtraq; ex centro) auferatur communis FG: reliqua ergo AG maior erit reliquà GH: eſt autem AG ip-
b *defin.* 15.1. ſi GD [b] æqualis: erit ergo GD maior ipſa GH, minor maiore quod fieri non poteſt. Non ergo quæ ex F in G ducitur, extra contactum A cadet. Ergo in ipſum.

Aliter. Cadat, vt GFC, quæ in H producatur,
c *propoſ.* 20.1. iunganturq; AG, AF. Quia ergo AG, GF [c] ma-
d *defin.* 15. iores sūt, quàm AF, ſed AF [d] æqualis eſt CF, hoc eſt FH; communis auferatur FG; eritque AG,

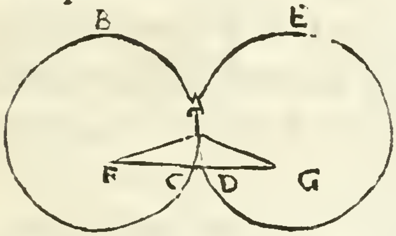
quam

quam reliqua GH maior : hoc eſt GD maior erit, quàm GH ; minor quàm maior, quod fieri non poteſt. Idem abſurdum demonſtrabimus ſi maioris cẽtrum ſit extra minorem circulum. Si ergo duo circuli,&c. Quod oportuit demonſtrare.

Propoſ. XII. Theor. XI.

Si duo circuli ſe ſe exterius contingant, recta ipſorum centra coniungens per contactum tranſibit.

DVo circuli ABC, ADE tangant ſe exterius in A. accipianturq́; circulorum centra, quæ ſint F, G. Dico quòd quæ F, G iungit, per cõtactum A tranſeat. Si non, tranſeat, ſi fieri poteſt, vt FCDG, & iungantur AF, AG. Cùm igitur F cẽtrum



ſit circuli ABC, [a] erit FA æqualis FC. Et cùm G ſit centrum circuli ADE, erit & GA ipſi GD æqualis. Oſtenſa eſt autem & FA æqualis FC. Sunt ergo FA, AG ipſis FC, DG æquales. Quare tota FG maior erit ipſis FA, AG : ſed & [b] minor eſt: quod fieri non poteſt. Non ergo quę ex

a *defin.* 15.

b *propoſ.* 20. 3.

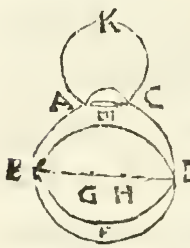
F in

F in G ducitur aliorsũ, quàm per A contactum tranſit. Si ergo duo circuli, &c. Quod oportuit demonſtrare.

Propoſ. XIII. Theor. XII.

Circulus circulũ in pluribus punctis vno non tangit, ſiue interius, ſiue exterius tangat.

SI fieri poteſt, tangat primo circulus ABDC circulũ EBFD interius in pluribus, quàm vno punctis, vt in B, D: & ſumatur circuli ABDC centrum G, circuli EBFD centrum H: ergo



a propoſ. 11. 3. recta centra G, H iungens [a] cadet in contactus B, D; cadat, & ſit BGHD. Cùm igitur G ſit centrum circuli ABDC, erit BG æqualis ipſi GD; maior igitur eſt BG, quàm HD; multo ergo maior BH, quàm HD. Rurſus cùm ſit H centrum circuli EBFD, æqualis erit BH ipſi HD: oſtenſa eſt autem multò illà maior, quod fieri nequit. Non igitur circulus circulum interius in pluribus, quàm vno puncto tangit. Dico quod neq; exterius. Si enim fieri poteſt, tangat circulus ACK circulum ABDC exterius in pluribus punctis vno, vt in A, & C, iunganturq; A, C. Cùm ergo in peripheria cir-

circulorum ABDC, ACK accepta ſint quæcunque puncta A, & C, [a] cadet recta illa coniungens intra vtrumq; circulum. Sed cadit quidem in circulum ABDC, extra verò circulum ACK. [b] Quod eſt abſurdum. Non ergo circulus circulum extra in pluribus punctis vno tangit. Oſtenſum eſt autem quod neq; interius. Circulus ergo, &c. Quod oportuit demonſtrare: a propoſ. 2. 2. b propoſ. 2. 3.

Propoſit XIV. Theor. XIII.

In circulo æquales rectæ lineæ æqualiter à centro diſtant. Et, quæ æqualiter à centro diſtant, æquales ſunt.



SVnto in circulo ABDC rectæ AB, CD ęquales. Dico eas æqualiter à centro diſtare. Eſto centrum E, à [a] quo ad rectas AB, CD perpendiculares ducantur EF, FG, & iungantur AE, EC. Cùm ergo recta EF per centrum ducta rectam quãdã AB non per centrum ductã, ad angulos rectos ſecet, [b] & bifariã eam ſecabit: æquales ergo ſunt AF, FB. Ergo AB dupla eſt ipſius AF. Ob eandem cauſam eſt CD dupla ipſius CG: [c] æquales ergo ſunt AF, CG: cũ igitur [d] & AE, EC æquales ſint, erunt & quadra- a propoſ. 12. 1. b propoſ. 3. 4. c ax. 7. d defin. 15. 1.

ta

f propoſ. 47.1. ta ipſarum AE, EC æqualia. Sunt autem ei quadrato *f*, quod ex AE, æqualia quæ ex AF, EF (eſt enim angulus ad F rectus) ei autem, quod ex EC æqualia ſunt quæ ex EG, GC (nam & angulus ad G rectus eſt.) Sunt ergo



quæ ex AF, EF æqualia illis, quæ ex CG, GE. Cùm ergo quod ex AF æquale ſit illi, quod ex GC (ſunt enim AF, CG æquales) erit & reliquũ, g def. 3. 1. quod ex FE, reliquo quod ex EG æquale: ſunt ergo EF, EG æquales. *g* In circulo autem æqualiter à centro abeſſe dicuntur rectę, quando perpendiculares ex centro ad ipſas ductæ æquales fuerint. Sed iam diſtent AB, CD ęqualiter à centro, hoc eſt, EF, EG ſint æquales. Dico AB, CD æquales eſſe. Iiſdem conſtructis, demonſtrabimus, vt prius, AB duplam eſſe ipſius AF, & CD h prop 47.1. ipſius CG. Cumq; AE, CE æquales ſint, erunt & earum quadrata æqualia. *h* Sunt verò ei, quod ex AE æqualia quæ ex EF, FA: & ei, quod ex CE, illa quæ ex EG, GC: ergo quæ ex EF, FA ſunt illis quæ ex EG, CC æqualia. Cùm autem ei, quod ex EG æquale ſit quod ex EF (ſunt enim EG, EF æquales) erit & reliquum, quod ex AF, reliquo, quod ex CG, æquale; ęquales ergo ſunt AF, CG. Eſt autem ipſius AF dupla AB, & ipſius CG dupla CD, æquales ergo ſunt AB, CD. In

ſcir-

circulo ergo æquales rectæ, &c. Quod oportuit demonſtrare.

SCHOLION, in quo-

-LEMMA *pro prop. 14,*

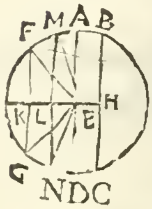
De quadratis æqualibus à lateribus æqualibus, & æqualium quadratorum lateribus æqualibus.

CVm igitur & AE, EC æquales ſint, erunt & quadrata ipſarum AE, EC æqualia. *Hoc, quod ſine controuerſia pro certo ſupponit, ac per ſe notum Euclides hic in prop. 14, demonſtrat Proclus in comment. 20, quod eſt ad prop. 46 lib. 1 Elem pariter cum conuerſo. Vt ſtemus pro Euclide, ſine alia demõſtratione patet lineas æquales æqualiter poſſe, id eſt æqualia producere quadrata. Ac multo magis ſi vtaris regula apud nos vniuerſaliſſima ac per ſe nota, quam cùm alibi, tum in primis in Epilogo planimetrico, & in Breuiario Stereometrico habes in fine primæ partis, & in ſecunda parte huius Tertij tomi, ſcilicet: ab æqualibus producentibus æqualia ſunt producta. Si ergo lineæ ſunt æquales, ac eæ perpendiculariter, & per æquales vias motæ ſunt, ſine dubio æqualia plana quadrata produxerunt. Sic & æqualia producta quadrata reſoluũtur in æqualia producentia, id eſt in æquales rectas motas per æquales vias. Vide cit. Epil. & Breuiar.*

Adde in numeris oſtenſionem. Quis enim dubitet æqualium radicum 2, & 2 æqualia eſſe quadrata 4, & 4? & æqualium quadratorum numerorum 4, & 4 æquales eſſe radices 2, & 2? Quapropter rectè Euclides, ſine alia demonſtratione ſupponit tamquã euidentiſſimum: quadrata æqualium AC, EC æqualia.

Propoſ. XV. Theor. XIV.

In circulo maxima eſt diametrus: aliarum verò ſemper quæ propinquior eſt centro remotiore maior eſt.



ESto circulus ABCD, cuius diametrus AD, centrum E; propinquior diametro BC, remotior ſit FG. Dico maximam eſſe AD, maiorem BC, quàm FG. [a] Ducantur enim à centro ad BC, FG perpendiculares EH, EK. Et quia BC propinquior eſt centro, remotior FG, [b] maior erit EK, quàm EH [c] Ponatur ipſi EH æqualis EL, & per L [d] ducatur ipſi EK ad angulos rectos LM; qua ducta in N, iungantur EM, EN, EF, EG. Cùm ergo EH ipſi EL ſit æqualis, [e] erit & BC ipſi MN æqualis. Rurſus cùm AE ipſi EM, ED verò ipſi EN ſit æqualis, erit & AD ipſis ME, NE æqualis: ſed [f] ME, NE ipſa MN maiores ſunt: erit ergo & AD maior quàm MN. Et quia duæ ME, EN duabus FE, EG æquales ſunt, angulus verò MEN maior angulo FEG; [g] erit & baſis MN maior baſi FG: ſed MN oſtenſa eſt æqualis BC; ergo & BC maior eſt quàm FG. Maxima ergo eſt diametrus; maior BC quàm FG. Si ergo in circulo, &c. Quod oportuit demonſtrare.

a propoſ. 12.1.
b defin. 5.2.
2 propoſ. c 1.
d propoſ. 11.1.
e propoſ. 14.3.
f propoſ. 20.1.
g propoſ. 24.1.

§1.

§ I.

Locus inſignis Ariſt. in Mechan. de remigibus hac 15 prop. illuſtratus.

Soluit demonſtratiuè hæc propoſitio 15 Elem. quæſtionem quartam mechanicarum apud Ariſtotilem, in qua quærit cur in naui remiges medij plus reliquis nauim impellant. Rationem autem affert quia remiges medij habent longiorem partem remi, ac magis diſtantem à ſcalmo, tanquam à renitente, ſiue ligamento, ſiue hypomoclio. Facilius autem potentia mouet pondus, quanto magis ab hypomoclio diſtiterit; quod oſtendit in antecedentibus, vbi de admirandis circuli; atq; hæc à nobis ſupponitur ſatis ab experientia comprobatum.

Cur medij remiges magis naui impellant.

At verò demonſtratio geometrica (nam ocularis, aut palmaris demenſio nihil ad Geometricum Philoſophum) qua firmetur aſſertum de longiore parte remi ab hypomoclio apud remiges medios, prodit ab hac 15 propoſ. Nam (in figura Euclidis) puta circulum FLCG eſſe nauem: hypomoclia in F, M, A, B, G, N, D, C, remorum partes ab hypomoclijs intra nauim eſſe ipſas FK, ML, AE, BH; GK, NL, DE, CH; quoniam quæ per centrum E ipſa AD longior eſt, quàm reliquæ, magis ac magis, quo recedunt magis vtrinque, iuxta hanc 15; erunt & dimidia ipſius AD, quæ per centrum, maiora dimidijs earum, quæ non per centrum eunt, magis ac magis, quo remotiora, &c. Ac proinde remex in E mouebit remi partem maiorem AE, quàm ML, vel BH, ac multo magis, quam FK; pariq; ratione ex altera parte de remigibus mouentibus partes remorum ad G, N, D, C. Quòd autem nō nemo videtur magnum philoſophum inſimulare hallucinationis, modeſtius erit vt nos benignè interpretemur Peripateticorum Magiſtrum, ac dicamus rectè illum rationem attuliſſe à primo genere vectis, quaſi mare ſit pondus mouendum, ſcalmus, & nauis pro hypomoclio. Nā tanquam hypomoclion ſcalmus ſuſtinere nititur niſum potentiæ in remo quaſi vecte, ſui altero extremo nitente mouere mare tanquam

Demonſtratio geometrica propoſitæ quæſtionis.

Pro Ariſtotele contra aliquos.

pondus; accidit verò vt fiat permutatio, & maris aqua renitatur, & ſcalmus cum naui moueatur cedendo niſui potentiæ in vecte. Ratio vero facilioris motionis à remigibus medijs valet etiam in vecte ſecundi generis, in quo quanto magis diſtat potentia à pondere intercepto, tanto facilius mouet. &c. Vide Ariſtotelem in cit. 4 quæſ.

§ II.

Vſus opticus propoſitionis huius 15.

A diaphano ſphærico magis, quam à cubico dilatatur angulus viſorius.

HAbes vſum opticum huius 15 propoſ. apud nos in Ap. 6, progym. 1. cap 2, vbi ex hac 15 demonſtrauimus à diaphano ſphærico magis, quàm à cubico dilatari angulum viſorium. Illuc viſe, & huc transfer ad condimentũ, & quaſi praxim huius 15 in re maximi momenti, præſertim pro ſenibus. &c.

§ III.

Moralia è 15 propoſ.

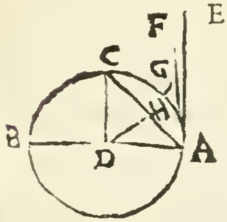
Maior moraliter qui Deo vniuerſi cẽtro propinquior; minor tanto, quãto ab eo remotior.

IN ſolo Deo centrum, & quies vera eſt humani animi; ac verè ille maximus, in quo Deus Opt. Max. & tanto quiſque maior quanto Deo propior, tanto minor, quanto ab eo remotior; quemadmodum in circulo maxima eſt diameter, in qua centrum, & quanto diametro vicinior recta eſt maior, tanto minor quanto à diametro remotior. Hæc verè pro animo ſolida niſi conflentur è geometricis, operam ludimus, mi Lector. A religioſo ſcriptore debita hæc ſunt moralia, & practica etiam in theorijs abſtractis. Vtiliſsima omnium abſtractio hæc eſt à figuris ad Deum.

Pro-

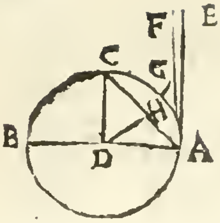
Propoſ. XVI. Theor. XV.

Quæ diametro ad angulos rectos ab extremitate ducitur, extra circulum cadit. Et in locum, qui inter rectam lineam, & peripheriam interijcitur, alia recta non cadit. Et ſemicirculi angulus omni acuto rectilineo maior eſt, reliquus autem minor.



ESto circulus ABC circa centrum D, & diametrum AB. Dico rectam lineam ab A ipſi AB ad angulos rectos ductam extra circulũ cadere. Si non, cadat, ſi fieri poteſt, intra, vt AC, & iungatur DC. Cùm ergo DA ſit æqualis DC, erit & angulus DAC angulo ACD æqualis: eſt autem DAC * rectus, ** ex hypotheſi.* rectus ergo erit & ACD: ſunt ergo DAC, ACD duobus rectis æquales, [a] quod fieri nequit: Non *a propoſ. 32.1.* ergo quę ab A puncto ipſi BA ad angulos rectos ducitur, intra circulum cadit. Similiter oſtendemus quod nec in peripheriam: ergo extra cadit, vt AE. Dico ſecundò, in locum inter AE, & peripheriam CHA interiectum aliam rectam non cadere. Si poteſt: cadat, vt FA, ducaturq́; ex D ipſi FA perpendicularis DG. Et cùm angulus AGD

b propoſ. 32.1.
c propoſ. 19.1.



GD rectus ſit, [b] minor recto DAG; [c] erit AD maior, quàm DG: eſt autem DA æqualis ipſi DH; maior ergo eſt DH, quàm DG, minor maiore; quod fieri nequit. Non ergo in locum rectà AE, & peripheriâ CHA interceptum alia recta cadit. Dico tertio angulum ſemicirculi rectà AB, & peripheriâ CHA contentum, omni acuto rectilineo maiorem eſſe; reliquum verò peripheriâ CHA, & rectà AE contentum, minorem. Si enim eſt aliquis angulus maior contento rectà BA, & peripheriâ CHA, minor verò contento peripheriâ CHA, & rectà AE, cadat inter peripheriam CHA, & rectam AE linea recta, quæ faciat angulum maiorem rectà BA, & peripheriâ CHA contentum (qui rectis lineis contineatur) minorem verò peripheria CHA, & rectà AE contentum: at non cadit. Non ergo erit angulus acutus rectis lineis contentus, qui maior ſit angulo rectà BA, & peripheriâ CHA contento; neque minor, CHA, & AE contento.

Corollarium.

EX his manifeſtum eſt rectam, quæ diametro ab extremitate ad angulos rectos ducitur,

cir-

circulum tangere, & rectam circulum in vno duntaxat puncto tangere: ſiquidem quæ circulo in duobus punctis occurrunt, d intra circulum cadere oſtenſum eſt. Quæ ergo diametro, &c. Quod oportuit demonſtrare. d propoſ. 2.3.

§ I.

Paradoxa, & admiranda 16 propoſitionis, & corollarij ex ea.

HÆc 16 huius libri propoſitio fæcundiſſima eſt paradoxorum, & corollariorum admirandorum, demonſtratiuè tamen confirmatorum; quorum explicationem dum ageometrici aliqui non aſſequuntur, aut ijs abutuntur, incidunt in paralogiſmos fœdiſsimos, & inanibus diſceptationibus vmbras diuerberant. Planè mirum eſt quemlibet angulum contactûs quantumuis maximum eſſe minorem rectilineo angulo acuto quantumuis minimo. Mirum eſt quantumuis maximum angulum contactûs à nulla recta diuidi poſſe. Mirum eſt angulum ſemicirculi quantumuis maximum nunquam æquari poſſe angulo recto, & quantumuis minimum angulum ſemicirculi eſſe ſemper maiorem quolibet acuto. Mirum angulum contactûs eſſe minimum, & tamen diuiſibilem in infinitum. Mirum eſt angulum ſemicirculi tranſire à maioritate vltra quemlibet acutum ad minoritatem citra, & intra rectum, & obtuſum, nec tamen ad ea duo extrema ire per medium, & per aliquam æqualitatem alicui aliquando rectilineo. *Mira anguli cōtactus, & ſemicirculi.*

Mirus eſt in corollario eiuſdem 16 propoſitionis contactus ille in puncto, nec tamen ex punctis conſtare quantitatē apud omnes Geometricos philoſophos, qui in plurimis paradoxis, ac præcipuè in incommenſurabilitatibus aliquarum linearum ſupponunt (ne paralogizentur) lineas non componi ex indiuiſibilibus. Ac plura alia admiranda paradoxa, quæ ex hac 16 deducuntur. Quorum aliqua vide apud Clau. ad hanc 16 ex Cardano, & alijs. § 2.

§ II.

PARADOXVM *ſingulare* =

= Ex angulo cōtractus, quo ſit vt angulus rectus ad acutum non habeat maiorem proportionem, quàm angulus ſemicirculi. &c. Nulla item proportio anguli acuti cum angulo ſemicirculi.

VNum hic non omittam planè ſingulare paradoxum, nec admodum vulgatum. Inſpice figuram Euclidis, & in ea tres angulos, acutum DAC, ſemicirculi angulum DAH, & rectum DAE. Vt acutus DAC eſt pars anguli ſemicirculi ADH, ſic & ADH eſt pars recti ADE. Itaque angulus acutus videtur habere proportionem inæqualitatis tam ad angulum ſemicirculi, quam ad angulum rectum, & anguli recti ad acutum videtur eſſe proportio maioris inæqualitatis, quàm anguli ſemicirculi ad eũdem angulum acutum; tamen res non ſic habet. Nam acutus non habet proportionem ad angulum ſemicirculi, quia quantumuis multiplicatus non poteſt æquare, vel ſuperare angulũ ſemicirculi, iuxta defin. 4 li. 5, acutus ſemper minor eſt angulo ſemicirculi; habet tamen proportionem cum recto, quia multiplicatus poteſt peruenire ad quantitatem recti. Ac præterea (quod eſt planè paradoxum, & quaſi contra propoſ. 8 lib. 5) angulus rectus maior, quàm angulus ſemicirculi, non habet ad acutum proportionem maiorem, ſiue maioris inæqualitatis, quam angulus ſemicirculi, quia maioritas, qua angulus rectus ſuperat maioritatem anguli ſemicirculi maioris acuto, eſt angulus contactus CHAE, qui quantumuis multiplicatus, eſt (ex hac 16) ſemper minor acuto, ideoq; non habet cum acuto proportionem. Vide pro nobis Petrum Nonium in Algebra; ex cuius animaduerſione in 8 propoſ. li. 5. Elem. prædicta etiam firmantur. Itaq; aliquando: datis duobus angulis inter ſe inæqualibus,

Paradoxũ contra 8 prop. li. 5.

maior

maior non habet maiorem proportionem ad tertium angulum vtroque dato minorem. *Paradoxum extra 8 prop. li. 5.*

§ III.

Pluriformes anguli contactùs, & aſymptotωn miracula, etiam duarum rectarum ſemper inter ſe accedentium, nec vnquam ſe contingentium, ab angulo contactùs.

Paradoxa, Corollaria, & vſus miros huius 16 propoſ. habes etiam apud nos in Apiario 3, præſertim in Progymn. 5, vbi angulorum paradoxa perſequimur. Ibidem vide varias formas angulorum contactùs. Cornicularis de quo hic, lunularis, ſiſtroides, mixtilinei, curuilinei. &c.

Inſignis verò apud nos vſus eſt pro theorematibus, & problematibus, ad miraculum illud geometricum de lineis inter ſe aſymptotis; in eod. Ap. 3, progym. 1. & 2. vbi aperuimus fontem aſymptotωn ab angulo contactus promanantem. Vide cit. Apiar. & inde Tyronibus affer, ò Geometricæ Doctor, iucunda, & admiranda Geometricæ Philoſophiæ, vt in eam abripiantur. Oſtende præſertim duas aſymptotos etiam rectas ducere à diametro ad rectam circulũ tangentem, quæ dum progrediuntur per ſectiones circulorum maiorum, ac maiorum iminuentium angulum contactus, nec vnquam tangentium extra punctum contactus in extremitate diametri, efficiunt vt rectæ ſemper productæ, & occurrentes, atq; accedentes ſemper magis ad tangentem, nunquam eam contingere poſſint. Vide figuram Ap. 3. prog. 1. propoſ. 2 ex qua facillima oſtenſio fit ex angulo conttactus rectarum inter ſe aſymptotωn.

Per angulos cõtactus duæ rectæ productæ aſymptoti, ideſt ſẽper accedentes, nũquam inter ſe tangẽtes.

§IV.

SCHOLION I.

Anguli contactus omni acuto minores etiam ad reliquas ſectiones conicas, præter circulũ.

Angulus contactus cur locus appelletur.

Angulus contactus indiuiſibilis.

V*T amplies hanc propoſitionem, & Tyrones traducas etiam ad conica, vide propoſitionem 32 lib. 1. conic. Apollonij, quæ hæc eſt*: Si per verticem ſectionis coni recta linea ordinatim applicatæ æquidiſtãs ducatur, ſectionem continget, & in locum, qui inter coni ſectionem, & rectam lineam interijcitur, altera recta linea non cadet. *Itaque præter circulum, etiam reliquæ conicæ ſectiones habent angulum contactus, qui minor eſt omni acuto angulo rectilineo. In verbis eius propoſitionis, & huius 16 ex græco fonte* τὸν τόπον, *&c. interpretes rectè vertunt* locum *ſpatium anguli contactùs, vt innuant, opinor, magni Geometrici Philoſophi Euclides, & Apollonius angulum contactus, licet minimo quouis rectilineo minorem, eſſe tamen quantitatem, eamq; diuiſibilem in infinitũ, ſi non per rectas, & rectilineos angulos, ſaltem per curuas maiorum, ac maiorum circulorum peripherias tranſeuntes per idem punctum contactus, & per angulos contactùs ſemper minores.*

§V.

SCHOLION II.

Ex verbis propoſitionis 16 patent cauſæ paradoxorum anguli contactùs.

N*Otandæ ſunt rationes aliquæ partium propoſitionis 16, in qua, Primo dicitur* in locum inter peripheriam, & lineam

neam tangentem alia recta non cadet, *quia ex Eutocio ad cit. 32 prop. li. 1. Apollon.* duæ rectæ lineæ in eodem puncto contingentes eſſe non poſſunt, *in vnam eandemque ſcilicet coincident, ac vt altera inferior ſit à priore tangente diſtincta, ſecet neceſſe eſt circulum in altero puncto,* ſiquidem (*inquit in corollar. huius Eucl.*) quæ circulo in duobus punctis occurrunt, intra circulum cadere oſtenſum eſt *in prop. 2. hu. Ac nota verba Euclidis:* alia recta, *quaſi dicat: loquor de recta; nam de curua circulari non eſt dubium, per deſcriptiones ſcilicet maiorum circulorum, &c. vt prædictum eſt in fine* § 4 *antecedentis.* *Cur vnica tantum tangens circulũ linea.*

Secundo affirmando angulum ſemicirculi eſſe ſemper omni recto minorem, angulum contactùs minorem omni acuto, indicat inter angulos illos mixtos, & inter rectilineos non intercedere proportionem, iuxtà definit. 4 lib. 5. ſi enim eorum angulorum alter multiplicatus non poteſt æquare alterum, multo minus poterit excedere. quæ regula eſt apud Geometras cognoſcendi an proportio ſit inter duas quantitates. *Cur inter mixtos, & rectilineos angulos non ſit proportio.*

§ VI.

SCHOLION III.

Cauillationes aliquæ contra angulum cõtactùs proponuntur.

E*X quibus notatis, & intellectis verbis propoſitionis, facillimo negotio ſoluuntur quæcunque paralogiſticè obijciunt aliqui contrà hanc demonſtrationem. Peletarium quidem ſatis egregiè Clauius confutauit. Vieta pro nobis, ſeu potius contra nos, & antiquos Geometras, Reſponſorum lib. 8. cap. 13, ſuo de more perobſcurè. nos, eius verbis omiſsis, nobis ex eo ſic opponemus.*

1 *Anguli ex Euclide vel recti, vel acuti, vel obtuſi ſunt. Angulus ſemicirculi nec obtuſus, nec acutus eſt, ergo rectus; & reliquus angulus cornicularis contactùs erit imaginarius.*

2 *Quantitas anguli ſpectatur ex arcu circulari ſubtenſo; nullus arcus metitur cornicularem, ergo non eſt angulus.*

3 *Videtur Vieta innuere cum Peletario propoſitionem 1 lib. 10, iuxta quam, ſi ex acuto angulo rectilineo auferatur maius, quàm dimidium, ac rurſus à reliqua parte maius, quàm dimidium, ſicque continuè ex reſiduis partibus maius, quàm dimidium, tandem relinquetur minor angulus rectilineus, quàm angulus contactûs. Ergo non eſt minor quolibet minimo rectilineo.*

4 *Omnes anguli ſemicirculi ſunt æquales, quia vt omnes circuli, ſic omnes ſemicirculi ſunt ſimiles; ſimilitudo verò figurarum, iuxta primam definitionem ſexti, ſpectatur inprimis ex æqualitate angulorum. Si ſunt omnes anguli ſemicirculorum æquales, ergo & reliqui ad complementum recti, id eſt anguli contactûs omnes & ipſi ſunt æquales; ergo non ſunt quantitas, quia non imminuuntur in maioribus ſemicirculis, nec augentur in minoribus; quantitatis verò eſt augeri, & minui. Reliquæ aliæ aliquæ obiectiones tãtum innuentur inferius in* § 9.

§ VII.

SCHOLION V.

Cauillationibus contra angulum contactûs reſpondetur.

Anguli ſiunt etiã e concurſu nõ rectarũ linearũ.

R*Eſpondeo ad* 1. *Euclides in definit.* 9, 10, 11, 12 *lib.* 1. *definit tantum angulos rectilineos; at ſub definitione 8 tanquam ſub genere comprehendit etiã angulos curuilineos, & mixtilineos. Nam etiam curuarum, & rectarum linearum in plano ſe mutuo tangentium, & non in directum iacentium alterius ad alteram eſt inclinatio, ac proinde angulus: ſic recta tangens, & circularis ad punctum contactûs conficiunt angulum mixtilineum. Quinimmo in definitione* 7 *ante hunc* 3 *lib. habes definitionem expreſſam mixti anguli portionis circuli.*

Ad 2. *Arcus ſubtenſus metitur angulum rectilineum: inde nihil*

contra mixtum contactus. Quemadmodum negare non potes angulum ſemicirculi eſſe quantitatem, licet eam non metiare arcu ſubtenſo, vt rectilinei anguli quantitatem. &c.

Ad 3. Ea propoſitio 1 lib. 10 intelligenda eſt de quantitatum comparatione, quæ habeant inter ſe proportionem, ideſt, iuxta defin. 4. lib 5, quæ multiplicatæ poſsint ſe inuicem ſuperare. Angulus contactus, & acutus rectilineus, ex hac 16, nec ſe poſſunt æquare, nedum ſuperare. Vide & ſcholion Clauij ad 1 prop. li. 10.

Anguli acutus, & contactus non habent inter ſe proportionem.

Ad 4. Euclides def. 1. lib. 6 definit ſimiles figuras rectilineas non ſolum per æqualitatem angulorum, ſed etiam per latera proportionalia circa angulos. Quæ definitio non aptatur figuris curuilineis, vel mixtis. In circulis inæqualibus biſectis, licet ſit proportio ſemiperipheriæ minoris ad minorem circulum eadem, quæ ſemiperipheriæ maioris ad maiorem, tamen angulus ſemicirculi maioris maior eſt angulo ſemicirculi minoris, quia minus ſpatij ad rectum angulum ſupereſt addendum angulo ſemicirculi maioris, quam angulo minoris. Præterea ex defin. 11. li. huius 3, ſimilitudo in circulorum portionibus ſumenda eſt non ex æqualitate angulorum mixtorum (quos portionum angulos definit in defin. 7) ſed ex æqualitate angulorum rectilineorum in ipſis portionibus; &c. Itaq; nihil ad mixtos angulos, aut contra nos facit. Ac quemadmodum, iuxta hic prædicta, maiores, ac minores ſunt maiorum, ac minorum ſemicirculorum anguli, ſic & contactus. &c.

Anguli cõtactus non omnes æquales.

§ VIII.

SCHOLION V.

Praua aliquorũ illatio ex angulo cõtactûs, quod quantitas conſtet ex indiuiſibilibus, repulſatur. Ad rem recolitur abſtractio geometrica.

1 *EX antedictis ſoluuntur etiam cauillationes eorum, qui ex angulo contactûs arguunt quantitatem conſtare ex indi-*

uiſibi-

niſibilibus. Quid enim? Angulus contactus eſt minor minimo acuto rectilineo, ergo eſt indiuiſibilis, ergo quot anguli contactus, tot indiuiſibilia actu, ex quibus quantitas, &c. Reſpon. negando conſequentiam. non enim quidquid eſt minus minimo eſt indiuiſibile; nam comparatiuè poteſt eſſe minimum, non abſolutè; velut angulus contactùs comparatus cum alterius generis angulo, nempe acuto rectilineo eſt, ex demonſtratis in hac 16 propoſ. minor quidem minimo in infinitum acuto, tamen in ſe ſpectatus, in ea etiam minoritate reſpectu anguli acuti rectilinei, comprehendit ſpatium (eſt τόπος, græcè Euclides) & quantitatem diuiſibilem per circulorum maiorum minores angulos contactus, ſi non per minores rectilineos angulos acutos. A ſui enim generis angulis angulus quilibet ritè diuiditur; à rectilineo rectilineus, à curuilineo curuilineus, à mixto contactùs mixtus contactùs. non ergo anguli cornicularis contingentiæ indiuiſibilitas per rectilineũ arguit abſolutam indiuiſibilitatem. &c.

Non quidquid eſt minus alio minimo, eſt etiã indiuiſibile.

Angulus contactus eſt diuiſibiles per alios ſui generis.

2 Denique memento ſemper, mi Tyro, quantitatis geometricæ, non phyſicæ, ideſt in puriſsima illa mentis abſtractione, in qua veritates geometricæ regnant. Ac licet fortaſſe in craſsitie quantitatis phyſicæ locus aliquis eſſet rectæ lineæ inter tangentem, & curuam circuli ſuperficiem diuidendo angulo contactùs, non officit Geometræ acumina ſua non hebetanti inertià quantitatis phyſicæ, ſed extuenti in puro lumine abſtractionis, in qua per rectam diuidi non poſſe angulum contactùs iam demonſtratum eſt.

§IX.
SCHOLION VI.

Reliquæ aliquæ leuitates contra angulum contactùs exuflatæ.

Nõ quia ſunt minores recto anguli ſemicirculi, ideo & æquales inter ſe.

1 Reliqua aliqua ſolum propoſita ſuam abſurditatem, & ſolutionem arguunt. Velut: Omnes anguli ſemicirculi ſunt minores recto, ergo omnes ſunt æquales inter ſe, ac

ac proinde anguli contactus nec additione quorumlibet ſemicirculorum creſcunt, nec ſubtractione decreſcunt, ideoque non ſunt quantitas, quæ incrementa, & decrementa ſubit. Patent aſſumptionum, & illationum paralogia, & concluſionum etiam in hpyſico ſenſu falſitas; quas argue ex antepoſitis in hiſce ſcholijs ad hāc 16. Quibus etiam ſoluendis vide nos in Apiar. 3 prog. 5 toto. *Sic nec anguli cōtactus licet minores acuto.*

2 *Ioſepho Scaligero ex angulo contactûs, & Vietæ ex angulo ſemicirculi (demonſtratis hìc, altero quod ſit minor omni acuto, altero quod ſit maior omni acuto) reprehendentibus Archimedis ratiocinationem in quadratura circuli, habes iam reſponſiones à nobis ad 4 è definitionibus libri 5. Ex ignorantia enim, vel non perceptà eà definitione malè inſimulant Archimedem (ingeniorum phœnicem) ignorantiæ logicæ, ac geometricæ.* *Iniquè Archimedes reprehēſus ex ignorantia defin. 4. li. 5.*

§ X.

SCHOLION VII.

Ex prædictis ad 16 prop. hu. lux paradoxis aliquibus angulorum in Apiarijs philoſophiæ Mathematicæ.

Poſt prædicta expoſita intelliges, opinor, alia paradoxa è noſtris Apiarijs, quaſi corollaria inopinata; ſcilicet.

1 *Angulus recto maior, nec ſuperans rectum vel minimà quantitate anguli acuti.*

2 *Angulus recto æqualis, qui compoſitus eſt ex angulo, qui minor eſt recto, & ex angulo, qui minor eſt omni acuto.*

3 *In angulis extrema cōueniunt, media, licet cōpoſita ex extremis, non conueniunt cum extremis.*

4 *Extrema ſine medijs iuxta ſe poſita, vt tranſitus fiat ab extremo ad extremum ſine medio.*

5 *Infiniti anguli contactûs ſimul ſumpti non poſſunt æquare quantitatem minimi anguli rectilinei. Vide expoſitiones, figuras, &*

demon-

demonſtrationes prædictorum paradoxorum ex angulo contactus in citato prog. 5 toto Apiarij tertij, vt, ſi publicus es Doctor, auditoribus iucundam parias admirationem, & hanc 16 prop. ornes.

§ XI.

SCHOLION VIII.

Pro noſtra Methodo.

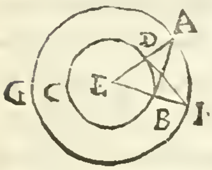
Ex antecedentibus habes vnde videas, amice Lector (quemadmodum & alibi in anteced. vidiſti) quàm rectè inſtituerimus methodum noſtram geometricam, in qua præponimus tertio librum ſextum cum definitionibus quinti. Nam non ſatis rectè poſſunt explicari ea, quæ ad angulum contactùs pertinent in hoc li. 3. & ſolui obiecta ſine cognitione, & expoſitione definitionis 4 libri quinti, ex qua deducitur ratio cur angulus acutus rectilineus quantumuis imminutus non poſſit æquare angulum contingentiæ; quia ſcilicet inter duo illa genera angulorum non eſt proportio. Clauius ipſe dum reſpondet Peletario cogitur anticipare aliqua nondum explicata, & ex 4 (quæ 5 apud eum eſt) definitione libri quinti. In quam anticipationem nos non incidimus in noſtra methodo, quæ habet eam 4 definitionem expoſitam ante 3 hunc librum.

Comparationes etiam maioris, vel minoris inæqualitatis proportionum inter angulum acutum, rectum, & ſemicirculi, de quibus ad hanc 16, in § 2, requirunt ante ſe libros 5. & 6. &c.

Pro-

Propoſ. XVII. Probl. II.

A dato puncto rectam lineam ducere, quæ datum circulum tangat.



Esto punctum datum A, circulus datus BCD Oporteat autem ex puncto A rectam ducere, quę circulum BCD tangat. Accipiatur centrum circuli E, ducaturque AE, & centro E, interuallo EA deſcribatur circulus AFG, & ex D rectæ EA ad *a* angulos rectos ducatur DF, iunganturque EBF, AB. Dico à puncto A rectam AB ductam eſſe, quæ circulum BCD tangat. Cùm enim E centrum ſit circulorum BCD, AFG, *b* erunt tam EA, EF, quàm ED, EB æquales: duæ ergo AE, EB duabus FE, ED æquales ſunt, habentque angulum E communem: *c* erit igitur baſis DF baſi AB æqualis, & triangulum DEF, triangulo EBA æquale, reliquiq; anguli reliquis: eſt igitur ipſi EDF æqualis EBA: at EDF rectus eſt, erit igitur & EBA rectus. Eſt verò EB ex centro: *d* quæ autem diametro circuli ad rectos ducitur recta linea tangit circulum: tangit ergo AB circulum. A dato ergo puncto, &c. Quod oportuit demonſtrare.

a *propoſ.* 11.1.

b *defin.* 15.1.

c *propoſ.* 4.1.

d *Corol. prop.* 16. 3.

SCHOLIA.

I.
Ouiformis figuræ deſcriptio.

Ex hac 17 propoſ. & ad hanc ſcholijs (traductis ad contactum curuæ circulis, &c.) habes praxim demonſtratam deſcribendæ ouiformis figuræ in Apiar. 3. prog. 10, Propoſ. 13. Eius figuræ vſus in varijs artibus eſt. Iucunda aliqua praxi per arcus circulorum maiorum tangentiū minores leuatur, ſi quod ſubrepat, tædium Tyronibus.

II.
Opes geometricæ, ac praxis ditandis, & exercendis contactibus rectarum ad circulos, indicatæ.

Vide ad eos contactus ditandos Marinum Ghetaldum in ſupplemento Apollonij probl. 3, & Io. Baptiſtam Benedictum in Epiſtol. ad Petrum Pizzamanum: Magis verò propriè ſpectant ad hanc 17 Euclid. (quæ eſt de recta tangente) ea, quæ habet Cardanus de recta ad contactum duorum circulorum, &c. ac ſunt in Schol. Clauij. Ex quibus Authoribus habet Geometricus Doctor vnde praxibus iucundis condiat hanc 17 ſuis Auditoribus.

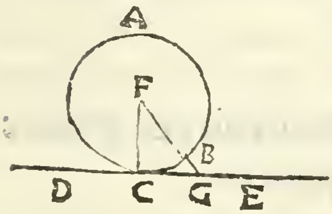
III.
Tangentem ad circulum, aliter. &c.

Aliter nos, ac facillimè vnica circini diductione tangentem ducimus ad circuli punctum in peripheria. To. 1. hu. Ær. ad prop. 32, in Schol. ſub § 18; *cum vſu propoſ.* 31 *hu. ſed ſine anticipatione. Viſe illuc.*

Pro-

Propoſ. XVIII. Theor. XVI.

Si circulum tangat linea quædam recta, à centro autem ad tactum recta ducatur, erit illa ad tangentem perpendicularis.



TAngat recta quædam DE circulũ ABC in C; ſumaturque centrum F, atque ab F ad C ducatur FC. Dico FC ad DE perpendicularem eſſe. Si non, ducatur ab F ad DE perpendicularis FG. Cùm ergo angulus FGC rectus ſit, [a] erit GCF acutus: [b] cùmq; maiori angulo maius latus ſubtendatur, erit linea FC maior, quàm FG. Eſt verò FC [c] æqualis ipſi FB; maior eſt ergo FB, quàm FG, minor maiore, quod eſt abſurdum: non ergo FG ad DE perpendicularis eſt. Similiter oſtendemus præter FC nullam aliam: FC ergo ad DE eſt perpendicularis. Si ergo circulum tangat, &c. Quod oportuit demonſtrare.

a propoſ. 32.1.
b propoſ. 19.1.
c def. 15

SCHOLIA.

I.

HÆc 18 propoſitio videtur patère ex corollario propoſ. 16. Si enim ducta ad extremum diametri ad angulos rectos tangens eſt; ergo ducta à centro, ideſt ſemidiameter, ad tangentem, & ad punctum contactùs, eſt & ipſa perpendicularis, hoc eſt ad angulos rectos, &c.

II.

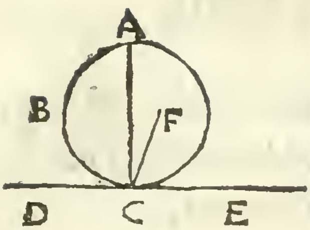
Confirmatio geometrica de circuli, & ſphæræ contactibus in puncto.

HInc, iuxta dicta ad 2. huius, patet demonſtratio de circulo, & ſphærà tangentibus lineam, & planũ in vno tantum puncto. Si enim in duobus, vel pluribus; ductæ à centro ad puncta contactùs eſſent, ex hac 18, perpendiculares; & à puncto eodem, ideſt centro, plures duci poſſent perpendiculares, & conſtitui triangula habentia tres internos angulos maiores 2 rectis. Quæ sũt abſurda, vt habes à nobis in 1. To. & in hoc 2. hu. Aerarij.

Propoſ. XIX. Theor. XVII.

Si recta linea circulum tangat, & à tactu tangenti recta quædam ad angulos rectos ducatur, erit in illa centrum circuli.

Tan-



TAngat circulum ABC recta DE in C, & ex C ipſi DE ad angulos rectos ducatur CA. Dico in CA eſſe centrum circuli. Si non: ſit, ſi fieri poteſt, F, iungaturq́; CF. Cùm ergo circulum ABC tangat recta DE, & à centro ad tactũ ducta ſit FC, [a] erit FC ad DE perpendicularis: angulus ergo FCE rectus eſt: eſt verò & ACE rectus: æqualis ergo eſt angulus FCE angulo ACE, minor maiori; quod eſt abſurdum. F ergo centrum circuli ABC nõ eſt. Similiter oſtendemus nullum aliud eſſe, præter id quod in AC. Si ergo recta linea, &c. Quod demonſtrare oportuit.

a propoſ. 18.3.

SCHOLION.

Praxis alia inueniendi centri in circulo.

H*Abes ex hac* 19 *modũ, & praxim aliam inueniendi centri in dato circulo, præter modos ad primam huius; cum vſibus* 17 *propoſ. & Schol. ad eam. Biſariata perpendicularis ducta ad punctum contactùs dat centrum circuli.*

Pro-

Propoſ. XX. Theor. XVIII.

In circulo angulus ad centrum duplus eſt anguli ad peripheriam, quando eandem peripheriam pro baſi habent.



ESto in circulo ABC angulus ad centrum BEC, ad peripheriam BAC, ſitq; vtriuſq; baſis peripheria BC. Dico angulum BEC duplum eſſe anguli BAC: a *defin.* 15.1. iuncta enim AE producatur in F. Cùm [a] ergo EA æqualis ſit ipſi EB, erit & angulus EAB æqualis angulo EBA. Sunt ergo EAB, EBA dupli b *propoſ.* 32.1. ipſius EAB: eſt [b] autem BEF æqualis duobus EAB, EBA. Eſt ergo BEF duplus ipſius EAB. Ob eandem cauſam eſt angulus FEC duplus anguli EAC: totus ergo BEC totius BAC duplus eſt. Sit alter angulus BDC, iunctaque DE producatur in G; & ſimiliter demonſtrabimus angulum GEC duplum eſſe anguli EDC: quorum GEB duplus eſt ipſius EDB; reliquus ergo BEC duplus erit reliqui BDC. Si ergo in circulo, &c. Quod oportuit demonſtrare.

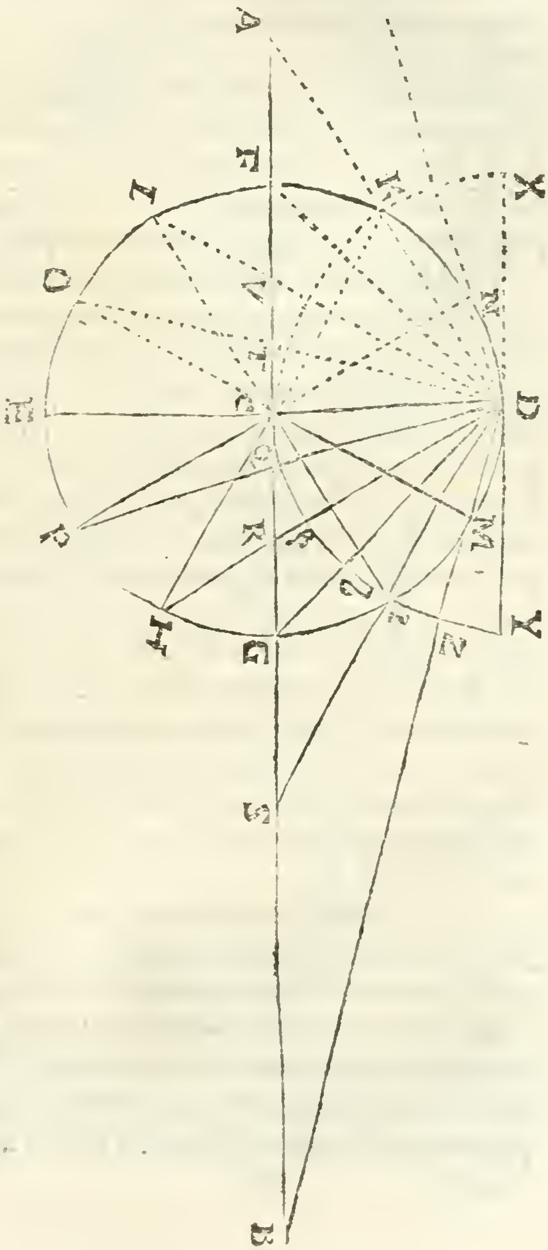
§ I.

Vſus prop. 20 hu. in demonſtratione praxis, qua vnicà circini diductione horariũ conſtruitur.

VSus ſingularis huius 20 prop. apud nos eſt (præſertim in cap. 5 prog. 1, Ap. 9) in deſcriptione horarij horizontalis vnica circini diductione, qua puncta inueniũtur in linea Aequinoctiali AB, per quæ deducũtur lineæ horariæ cuiuſcunq; generis.

Hic & in appoſ. fig. & in modo operãdi lubet expreſsiora, quàm in cit. cap. 5, apponere, in quibus apertiſsima apparet demonſtratio ex hac 20 tã ſingularis, ac perutilis operationis.

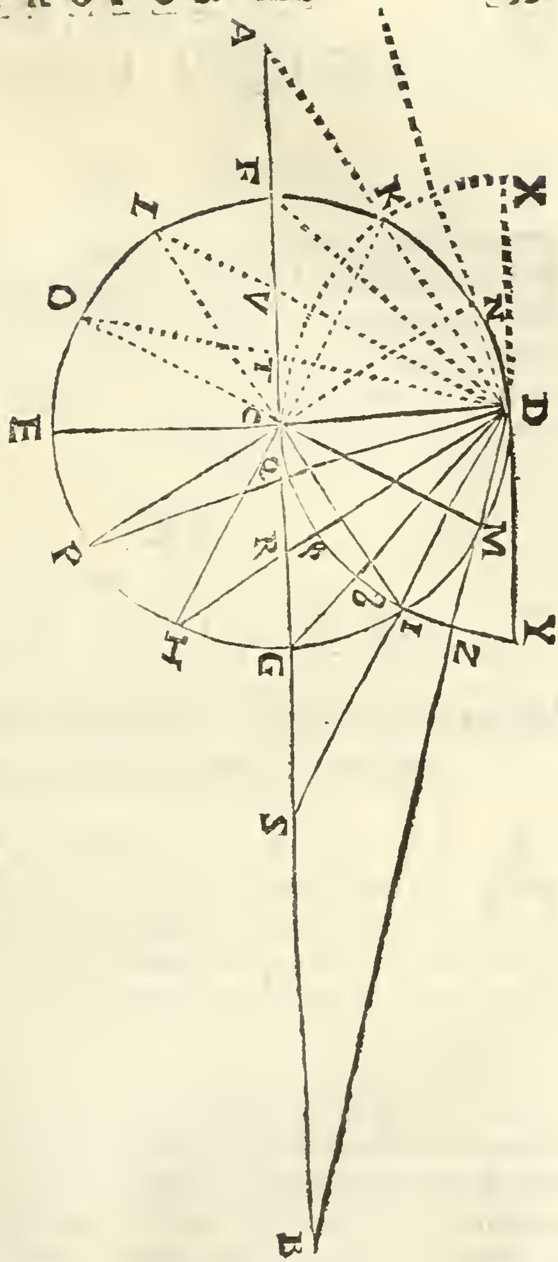
Ducta ſit pro Aequinoctiali recta AB, quam ad re-



rectos in C ſecet altera DE. Sumptà circini diductione lubità, velut ad interuallum CD, deſcribatur circa centrum C circulus DEFG. & immotà eàdem circini diductione, ab extremo diametri, velut ab E, fiant ſectiones in H, ex H in I, rursùs ex E in L, ex L in K. item è G in M, ex M in N, rursùs è G in P, è P in O. eritq; diuiſus circulus in 12 partes æquales. Mox ex D per puncta ſectæ peripheriæ M, I, G, H, P, O, L, K, N aptatà regulà (pro quà hìc ad expreſsionem, & theoricen, ductæ ſunt rectæ) vide vbi ea ſecet rectam AB, velut in Q, R, G, S, B, & ex altera parte in T, V, F, A, & vltra A. Ea enim puncta ſunt, per quæ erunt lineæ horariæ traducendæ in obliquis ſphæris à centro horarij, iuxta ea, quæ præſcribuntur, ac demonſtrantur in cit. Apiar. 9. Prog. 4. c. 1, 2, 5.

2 Quod autem inuenta ea puncta in lineà AB per vnicam circini diductionem reuolutam in peripheria DFEG, ſint puncta legitima terminantia horarum ſpatia, demonſtratur ex hac 20 prop. Ductis enim ad centrum C lineis rectis à punctis ſectionum in peripheria, quoniam ſinguli quadrantes circuli diuiduntur in 90 gradus, erunt ſingulæ tertiæ EP, PH, HG, GI, IM graduum 30, ſpatium verò vnius horæ eſt graduum 15, nempe vna ſexta pars quadrantis, ac vna 24 totius circuli. Cùm igitur ad centrum C anguli ſinguli ſint dupli ſingulorum ad D, quoniam ſpatium anguli, verb. gr. ECP, ſubtenſi a tertia EP, quadrãtis EG, eſt grad. 30, ergo ſpatium ſuper eàdem baſi EP anguli EDP ad circunferentiam, erit dimidium, ideſt graduum 15, ideſt vnius horæ, ac proinde rectæ AB pars CQ, intercepta inter angulum EDP, erit ſpatiũ vnius horæ. Parique modo de reliquis partibus QR, RG, GS, SB, quæ intercipiuntur inter lineas, quæ faciunt angulos ad D ſemper dimidios angulorum ad centrum C, &c. Eodemque modo ad partes etiam vltra A.

3 Ac vt euidentius etiam ad theoricen tibi conſtet, mi Tyro, ſpatia, licet inæqualia, in rectà AB eſſe ex proiecturis æqualium arcuum comprehendentium quindenos gradus, ex D (immotà eàdem circini diductione) duc ſemiperipheriam XCY tangentem in C rectam AB, fient à rectis DB, DS, DG, DR, DQ in arcu quadrantis CY ſectiones æqualium ſex arcuum CQ, Qβ, Bδ, δι, IZ, ZY, quorum ſinguli comprehendunt 15 gradus, vtq; arcus æquales optice



ticè proÿciũtur ex D in ſpatia inæqualia ſubiecta CQ, QR RG, GS, SB, arcus tamen extremus ZY, propter DY parallelam ipſi AB, it in infinitum vltra B. Pariq; ratione fit in arcubus ſex æqualibus quadrãtis CKX ꝓiectis in inæqualia ſpatia rectæ CA, & vltra A. Quare ſemiperipheriã Æquinoctialis XKCδY vides proiectam in rectã B vltra A, & inæqualiter ꝓ pũctis horarũ ritè diuiſam tã ex 12 æqualibus arculus ſemipheriæ XKCδY, quàm ex duplo maiorib⁹, ac æqualibus 12 arcubus totius circuli DFEG, ſectis vnicà circini diductione, quà vnicà non licet ſecare ſemiperipheriam XKCδY in 12 arcus æquales.

SCHOLION I.

Pro noſtra Methodo.

E*X hactenus expoſitis in antecedenti* § 1 *ad hanc* 20 *propoſ. patet noſtram methodum rectè inſtitutam, in qua interponimus cognitionem aliquam ſphæræ armillaris, vt Tyrones intelligant hæc, & alia in hoc* 3 *libro à nobis applicata vſibus aliquarum propoſitionum. Atque hic quidem gnomonicus explicatus, & demonſtratus ex hac* 20 *legitimus eſt.*

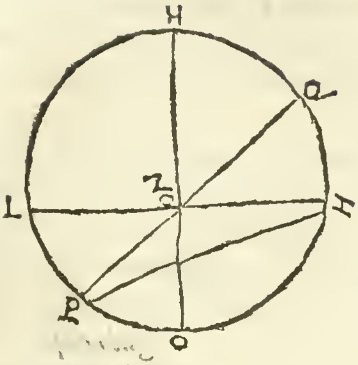
§ II.

SCHOLION II.

Aſtronomici obſeruatoris aſtronomicus paralogiſmus ex abuſu huius 20 prop.

A*N vero legitimè vſus ſit non nemo hac* 20 *propoſitione alij iudicarint. In critico circa id iudicio ſatis erit verba ipſa proponere, ne quiſquam ſuſpicetur nos imponere notam ignorantiæ elementariæ homini (licet in religione ſectario) magni nominis in Aſtronomicis obſeruationib. Is in praxi demonſtranda pro inquiſitione apogæi, & eccentricitatis ſolaris, ſic ſcribit:* ſit in figura orbis ille ad terram eccentricus, quem ſol annuo itinere, æqualiq; ductu deſignat THLO, cuius centrum Z. Terra verò, ſiue centrum vniuerſi moretur iuxta E, ducaturque per hæc duo linea HZEO. *Paulo poſt addit pro conſtructione:* ducatur linea LT per centrum terræ cadens priori HO ad angulos rectos. *Paullo poſt:* ab Q ducatur linea per E in P, quæ ſit QEP, connectaturq; P per lineam PT. *Hactenus conſtructio. Deinde addit:* Dimidium arcus RT efficit angulum QPT, ſiue

EPT,



EPT, ſiquidem is eſt iuxta circunferentiam circuli duplus illi, qui ad centrum, vt conſtat ex elimentis geometricis. *Quæſiui inter menda Typographica: prædictorum verborum nullam correctionem inueni. Nos igitur quaſi typographiam mendoſam emendemus, iuxta directionem huius 20 propoſ. Euclidis. 1. Angulus QET non eſt ad centrum circuli HLOT per conſtructionem eccentrici, cuius centrum eſt Z, & E extra centrum, propterea angulus ad P licet ad circunſerentiam, non eſt legitime comparatus cum angulo QET quaſi cum angulo ad centrum circuli HLOT, ideoq; nihil ad hæc propoſitio hæc 20 II. Non qui* eſt iuxta circunferentiam circuli duplus eſt illi, qui ad centrum, *ſed prorſus contraria ratione docet, ac demonſtrat hæc 20 propoſ. Eucl. angulum ad centrum eſſe duplum anguli ad circunferentiam. Diſce malo alieno, mi Tyro, & caue ſine alis ritè geometricè formatis, & firmatis te ad altiora ſuſtolias, ne ſedè corruas, & male fundatæ ſubſtractiones te obruant.*

§ III.

Vſus propoſ. 20 in paradoxis opticis.

ACcipe etiam vſum, & praxim noſtram iucundam opticã figuræ ipſi Euclidis applicatam, ſcilicet modum certum, & facilem videndi obiectum idem duplo minus in varÿs punctis etiam accedendo, ac recedendo. Quæ ſunt paradoxa. Nam varia puncta videntur variatura quantitatem apparentem obiecti, & acceſſus aucturus, receſſus imminuturus apparenter obiectum; iuxta optica principia: Remotiora, quia apparent ſub angulo minori, videntur minora; viciniora, quia ſub maiore angulo,

 maio-

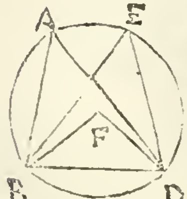
Remotiora, & viciniora apparentia eiuſdem quantitatis.

maiora. &c. *Inſpice tamen figuram Eucl. in hac* 20 *propoſitione, ac finge obiectum, quod opponitur oculo, eſſe quantitatis BC eleuatum ita, vt oculus, & obiectum ſint in eodem plano. ſit oculus in E, ſpectetq́; obiectum ſub angulo BEC. Vt obiectum idem BC appareat tibi duplo minus etiam in varijs punctis acceſsùs, & receſsùs, fige baculum perpendiculariter in terram ſub E, & baculo funem affige. Ad quantitatem diſtantiæ EF recede in directum vſque ad A, manu chordam vſque ad A tendens. In A obiectum BC apparebit duplo minus, quia ſub angulo duplo minore, quam angulus ad centrum E, videbitur. Deinde eàdem ſemper chordæ quantitate EA tenſà ito in orbem vtrimq́; recedendo ab A, velut in D, vbi, licet accedas obliquè ad partes C obiecti BC, tamen videbitur eiuſdem quantitatis, cuius videbatur in A, ac pariter in quocunque ſitu orbiculari aſpexeris BC nuſquam auctius, vel imminutius apparebit, quia ſemper apparet ſub angulo ad circunferentiam duplo minore, quàm angulus ad centrum. Contraria etiam ratione, immoto oculo, verbigratia in A, & obiecto chordæ affixo, & circumducto, etiam ſi accedat oculo, non apparebit tamen auctius, &c.*



Propoſ. XXI. Theor. XIX.

In circulo qui in eadem portione ſunt anguli, æquales ſunt.



SInt in portione BAED circuli ABCD anguli BAD, BED. Dico illos æquales eſſe. Accipiatur cẽtrum F, ducanturq, BF, FD. Et quia angulus BFD ad centrum eſt, angu-

lus

lus BAD ad peripheriam, habentq; baſim eandem peripheriam BCD, [a] erit angulus BFD duplus anguli BAD. Ob eandem cauſam erit angulus BFD duplus anguli BED. Sunt ergo BAD, BED æquales. In circulo ergo, &c. Quod oportuit demonſtrare. *a propoſ. 20.3.*

SCHOLION I.

Ex defin. 11 ante hunc lib. & ex noſtris ad eam ſcholijs confirmatorijs, non ſolum in eodem (vt in hac 21 propoſit. demonſtratur) ſed etiam in ſimilibus circulorum portionibus anguli ſunt æquales. Quæ eſt conuerſa noſtræ demonſtrationis ad eam definitionem.

§ I.

VSVS propoſ. 21 —

— In inſtrumento ad arcus quantumuis maximos ducendos, ſine centro, pro varijs operationibus Aſtrolabicis, Gnomonicis, &c.

Habes vſum, & praxim ex hac 21 demonſtratam circa id inſtrumentum, cuius figuram poſuimus in § 9 ad defin. 15, in 1 To. hu. Aera. quo inſtrumento ſignantur arcus cuiuslibet circuli quantumuis maximi, cuius centrum, & ſemidiameter ſint immenſæ diſtātiæ, pro aliquibus operationibus Aſtronomicis, vel Gnomonicis, & c. de quibus dictum eſt initio citati § 9. Nititur enim id inſtrumentum, & eius operatio demonſtratione, quòd arcus eo inſtrumento ductus ſit circularis, quia continet in omni-

omnibus ſui punctis eundem angulum immotum, ac firmatum ab inſtrumenti regulis, &c. Reuiſe illuc.

§ II.

Vſus propoſ. 21 in Geom. practicà.

V*Sus in geometrià practicà apud nos, pro inacceſſis diſtantijs tribus ſimul dimetiendis, eſt in Apiar. 12, progym. 1. propoſ. 7. Vide, & hìc applica, & Tyrones eà operatione inſtrue, o Doctor geometra, vt iucundè obtineant hanc 21 propoſ.*

§ III.

Vſus propoſ. 21 in optico paradoxo.

V*Sum, & applicationem opticam iucundam huius 22 propoſitionis habes apud Euclidem Opticorum theor. 45. Vnde potius, tanquam à ſupremo, atq; antiquiſſimo fonte, quam à poſterioribus Opticis Philoſophis haurire libuit, vt ipſemet Euclides ſibi ſit hic ornamento, & condimento.*

Igitur theor. 45 eſt.

Theorema Opticum. Eſt aliquis locus, vbi aſpectabili manente, oculo verò tranſlato, aſpectabile ſemper æquale videtur.



SIt enim ſpectata magnitudo BG, oculus autem C à quo procedant radij CB, CG, & circa triangulum BCG deſcribatur circuli ſectio BDCG; transferaturq; oculus à puncto C in

in punctum D, ex quo ducantur radij DB, DG; æqualis eſt igitur angulus BCG angulo GDB, cùm ſint in eodem ſegmento circuli. Quæ autem ſub æqualibus angulis conſpiciuntur æqualia apparent. Quare magnitudo BG eiuſdem quantitatis perpetuò apparet oculo per BDCG circumferentiam vectato.

SCHOLION II.

Memento prop ſitiones has duas 20, & 21 eſſe in Schol. 2 poſt § 16 ad 4 propoſ. in 1 par. Tom 2 iam deductas, & ex 32 pri. demonſtratas. Quare cognitio earum (quæ vſibus pluribus prodeſt) potuit inferri Tyronibus etiam ante li. 3, cuius propoſitionibus antecedentibus non egent.

§ IV.

Moralia ad 21 propoſ.

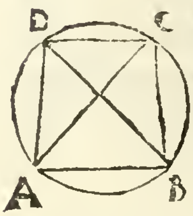
Morale ſolatium accipe ab hac geometrica 21. Si quando accidat in cœtibus politicis (præſertim ijs, qui inſtituti ſunt legibus non humanis, ſed diuinis, iuxta quas iura aliqua etiam naturalia in diſtributiua iuſtitia, ob diuini Numinis reuerentiam, remittuntur) ſummam æqualitatem (quæ iuxta Plinij ſententiam in Panegyr. ad Traianum, ſumma inæqualitas eſt) ſeruari à parum prudenter publicam rem adminiſtrantibus; ij, quibus fit iniuria contra iuſtitiam diſtributiuam, meminerint ſe eſſe cum cæteris quaſi in eodem ſegmento eiuſdem familiæ, ſeq; geometricè, licet fortaſſe non benè moratè, tractari, iuxta hic demonſtrata de eodem ſegmento, in quo anguli omnes, quaſi homines ſunt in victu, pœnis, præmijs (ſi quæ tamen ſint) æquales; cùm tamen in ſegmento cœli ſupremi vel ipſimet Angeli (ſi non anguli) ſint inæquales, ac diſtincti hierarchijs, &c.

Solatiũ morale à Geometrica Philoſophia in iniuſtitia diſtributiua.

Pro-

Propoſ. XXII. Theor. XX.

Quadrilaterorum in circulo deſcriptorum anguli, qui ex aduerſo, duobus rectis æquales ſunt.



SIt in circulo ABCD quadrilaterum ABCD. Dico angulos ex aduerſo eſſe æquales duobus rectis. Ducantur AC, BD. [a] Quia ergo omnis trianguli tres anguli duobus rectis ſunt æquales, erunt & trianguli ABC tres CAB, ABC, BCA duobus rectis æquales. Eſt autem CAB [b] æqualis BDC angulo (ſunt enim in eadem portione BADC) & ACB ipſi ADB (ſunt enim in portione ADCB): totus ergo ADC duobus BAC, ACB æqualis eſt. Communis addatur ABC duobus BAC, ACB ſimul, & vni ADC ſeorſim, eruntque ABC, BAC, ACB duobus ABC, ADC æquales. [c] Sed ABC, BAC, ACB æquales ſunt duobus rectis, erunt ergo & ABC, ADC æquales duobus rectis. Similiter oſtẽdemus & BAD, DCB æquales eſſe duobus rectis. Quadrilaterorum ergo, &c. Quod oportuit demonſtrare.

a propoſ. 32.1.

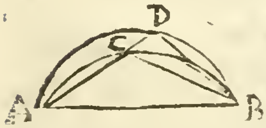
b propoſ. 21.1.

c propoſ. 23.1.

Pro-

Propoſ. XXIII. Theor. XXI.

Super eadem recta linea duæ circulorum portiones ſimiles, & inæquales ad eaſdem partes non conſtituentur.



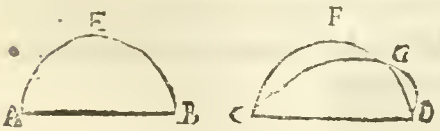
SI fieri poteſt, conſtituantur ſuper eadem recta AB duę circulorum portiones ſimiles, & inæquales ad eaſdem partes, ACB, ADB; ductaq; ACD iungantur CB, BD. Cùm ergo portio ACB ſimilis ſit portioni ADB, *a* ſimiles autem portiones æquales angulos capiant, erunt anguli ACB, ADB, æquales, externus & internus oppoſitus, *b* quod fieri nequit. Non ergo ſuper eadem, &c. Quod oportuit demonſtrare.

a *defin.* 11.3.

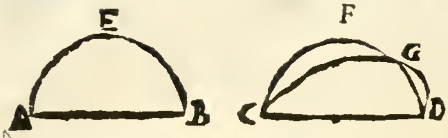
b *propoſ.* 16.1.

Propoſ. XXIV Theor. XXII.

Super æqualibus rectis lineis ſimiles circulorum portiones, æquales ſunt.



SInt ſuper ęqualibus rectis AB, CD ſimiles circulorum portiones AEB, CFD. Dico illas eſſe æquales. Congruente enim portione AEB por-



tioni CFD, poſitoq; A puncto ſuper C, & rectà AB ſuper CD, congruet & B ipſi D, quod AB, CD æquales ſint. Congruente autem recta AB rectæ CD, congruet & portio AEB portioni CFD. Quod ſi recta quidem AB congruat rectæ CD, portio verò AEB portioni CFD non congruat, ſed aliò cadat, vt CGD, ſecabit circulus circulum in pluribus, quàm duobus locis, vt in C,G,D,[a] quod fieri nequit. Non ergo congruẽte recta AB rectæ CD, non congruet portio AEB portioni CFD. Congruet ergo,[b] adeoq; æqualis illi erit. Si ergo ſuper, &c. Quod oportuit demonſtrare.

a *propoſ.* 10.3.

b *defin.* 8.1.

SCHOLION.

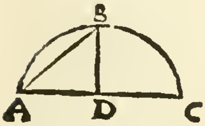
Vſus Geometrici prop. 24 circa curuilinea.

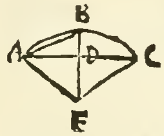
Habes 24 propoſitionis vſum iucundum, & facilem, quem Tyronibus oſtendas, vertendi curuilinea aliqua in rectilinea, & rectilinea in mixtilinea, Apiar. 1. prælib. 3. propoſitione 1, vbi triangulum æquilaterum vertimus in figuram mixtilineam falcatam, & 16 prop. 6, vbi curuilineum ſub tota circuli peripheriâ ſemifractâ quadramus.

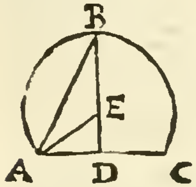
Pro-

Propoſ. XXV. Probl. III.

Data portione circuli, deſcribere circulum cuius eſt portio.

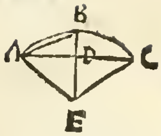
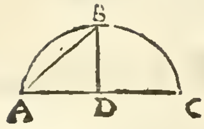




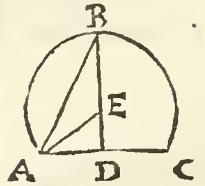


SIt data circuli portio ABC, oporteatque deſcribere circulum, cuius ABC ſit portio. [a] Biſecetur AC in D, & ex D [b] ducatur ipſi AC ad angulos rectos DB, iungaturq; AB. Angulus ergo ADB angulo BAD aut eſt maior, aut æqualis, aut minor. Sit primo maior, [c] conſtituaturque ad A rectæ AB angulus BAE æqualis angulo ABD, producaturque DB ad E, & iungatur EC. Cùm itaque angulus ABE ſit æqualis angulo BAE, [d] erit & EB æqualis ipſi AE, & cùm AD æqualis ſit ipſi DC, ſi communis DE addatur, erunt duæ AD, DE duabus CD, DE æquales, altera alteri; & angulus ADE angulo CDE æqualis; eſt enim vterque rectus; [e] ergo & baſis AE baſi CE æqualis erit. Sed ipſi AE demonſtrata eſt BE æqualis; erit ergo & BE æqualis ipſi CE: tres ergo AE, EB, EC æquales ſunt: [f] circulus ergo centro E, & interuallo vna ipſarum AE, EB, EC deſcriptus,

a *propoſ.* 10.1.
b *propoſ.* 11.1.
c *propoſ.* 23.1.
d *propoſ.* 6.1.
e *propoſ.* 4.1.
f *propoſ.* 9.3.

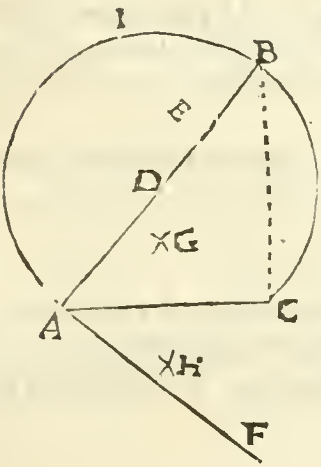
tranſibit etiam per reliqua portionis pūcta, & circulus deſcriptus



erit. Circuli ergo portione data, deſcriptus, eſt circulus, cuius eſt portio; & cùm centrū extra portionē cadat, manifeſtum eſt portionem minorem eſſe ſemicirculo. Similiter ſi
g ex ſtructura, ex prop. 6.1. ABD angulus fuerit æqualis angulo BAD, *g* erit AD æqualis vtrique BD, DC; ergo tres DA, DB, DC æquales ſunt, & D centrum circuli, portioque ſemicirculus. Si verò angulus ABD minor
h propoſ. 23.1. fuerit angulo BAD, *h* conſtituatur ad A rectæ BA angulus BAE æqualis angulo ABD, cadetque centrum in DB lineam intra portionem ABC, & erit portio ABC ſemicirculo maior. Si ergo ducatur EC, oſtendetur, vt in prima figura, tres BE, EA, EC eſſe æquales. Data ergo portione circuli, deſcriptus eſt circulus, cuius eſt portio; quod oportuit facere.

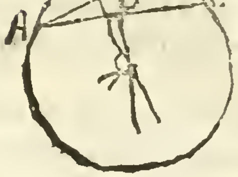
§ I.
LEMMA.

Vnius circuli vnicum tantum eſt centrum.



Circuli AIBC centrum ſit D Quod vnicũ eſſe affirmo. Sit, per aduerſarium, præter D, alterum centrum velut in E. Iungantur D,E rectà AB. Quoniã centrum eſt D, erunt AD, DB æquales, iuxta definitionem centri, & circuli. Rurſus quoniam, per aduerſarium, etiam E centrum eſt, erunt per eandem definitionem, AE, EB, æquales; at EB pars eſt ipſius AE. Nam EB pars eſt ipſius DB, DB eſt æqualis ipſi DA, ergo EB eſt pars ipſius DA, & DA eſt pars ipſius AE, ergo multo magis eiuſdem AE pars eſt ipſa EB. ſunt ergo AE, EB æquales, & inæquales; quod implicat. ergo centrum non eſt niſi vnicum D. Similiter de alijs punctis extra D.

Dati ſegmenti ABC centrum reperire.



Ductæ rectæ AB, AC, quæ non ſunt parallelæ, ſecẽtur bifariam in D,E, & ex D, E erigantur perpendiculares DF, EF, in quibus neceſſario exiſtit centrum circuli, per corollar. primæ huius, nimirum in communi concurſu F. Eodem modo deſcribitur circulus per quælibet

bet alia tria puncta A, B, C, vel etiam circa triangulum, dummodo puncta non exiſtant in vnâ lineâ rectâ. *Griembergerus in ſuo Euclide.*

SCHOLIA.

I.

Quod producta perpendiculares EF, DF concurrant, patet ex præmiſſo lĕmate. Cum. n. in vtraq; ſit centrum, & vnicū ſit eiuſdem circuli, neceſſario ſecāt ſe in communi centro.

II.

Vide inferius ad 31 huius alium modum facillimum inueniĕdi, & demonſtrandi hanc 25 per inuentionem quartæ proportionales.

III.

Habes ex hac 25 demonſtratas praxes deducendi circulum per tria puncta, ſi quando in ijs ſuppoſuimus hanc Euclid. propoſit. tanquam lemma poſtuidendum hic ſuo in loco. Velut habes in ad 16, 17, &c. lib. 6.

§ II.

Vſus varij propoſ. 25.

Per data tria puncta ducere arcū circuli, &c.

1 *Iucundandæ Tyronibus huic 25 propoſitioni faciet oſtenſio praxeon apud alios ſatis vulgatarum, præſertim apud Clauium in Schol. ad hanc 25, & ad 5 propoſ. li. 4, quibus per data tria puncta ducitur peripheria circuli. &c.*

2 *Pariter inſtrumenti vſus demonſtratus ex 21 huius (de quo inſtrumento in Schol. 2 ad eam propoſ. 21 in antec.) habet praxim pro hac 25 prop.*

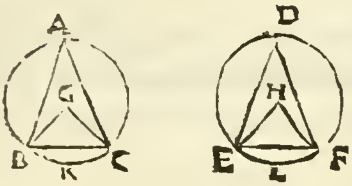
3 *Vſum etiam habes apud nos in Apiar. 5, prog. 1, cap. 4, vbi per puncta ducimus portiones circulorum pro deformationibus imaginum reformatarum in ſpeculis cylindricis. Vnde promas Tyronibus iucundantia hic Euclidem.*

4 *Præ-*

4 Præterea indicetur vſus etiam huius 25 pro arcubus horarũ in quadrante ducendis per tria puncta, duo extrema Tropicorum, & medium in Aequinoctiali. Vide eos, qui docent eorum horariorum deſcriptiones, iu primis Clauium in poſtremo lib. Gnomon.

Propoſ. XXVI. Theor. XXIII.

In æqualibus circulis æquales anguli æqualibus peripherijs inſiſtunt, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias inſiſtant.



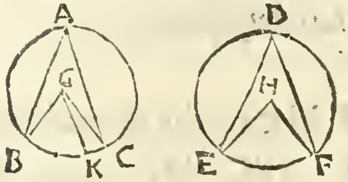
IN circulis æqualibus ABC, DEF æquales inſiſtant anguli ad centra BGC, EHF ad peripherias BAC, EDF. Dico peripherias BKC, ELF æquales eſſe. Iungantur BC, EF. Et quia circuli æquales ſunt, *a* erunt & quæ ex centris æquales. Duæ ergo BG, GC duabus EH, HF æquales ſunt: ſed & anguli G, H æquales ſunt: *b* ergo & baſes BC, EF æquales erunt. Et quia anguli ad A, D æquales ponuntur, *c* erunt portiones BAC, EDF ſimiles, & ſunt in æqualibus rectis BC, EF; *d* quæ autem circulorum portiones ſimiles in æqualibus ſunt rectis lineis, æquales ſunt: portiones, ergo BAC, EDF æquales ſunt. Sunt verò & toti circuli æquales, reliqua ergo peripheria BKC reliquæ ELF æqualis eſt. In ęqualibus ergo, &c. Quod demonſtrare oportuit.

a *defin.* 1.3.
b *propoſ.* 4.1.
c *propoſ.* 11.3.
d *propoſ.* 24.1.

Pro-

Propoſ. XXVII. Theor. XXIV.

In æqualibus circulis anguli, qui æqualibus inſiſtunt peripherijs, æquales ſunt, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias inſiſtant.



IN ęqualibus circulis ABC, DEF æqualibus peripherijs BC, EF inſiſtant anguli ad centra BGC, EHF, ad peripherias BAC, EDF. Dico tam angulos BGC, EHF, quàm BAC, EDF æquales eſſe. Si enim BGC, EHF æquales ſunt,
a propoſ. 20.1. [a] perſpicuum eſt & BAC, EDF æquales eſſe. Si
b propoſ. 23.1. non ſunt; erit vnus maior. Sit maior BGC: & [b] conſtituatur ad punctum G rectæ BG angulus
c propoſ. 26.3. BGK æqualis angulo EHF: [c] anguli autẽ æquales æqualibus peripherijs inſiſtunt, cum ſunt ad centra: peripheria ergo BK æqualis erit peripheriæ EF: ſed & EF æqualis eſt BC; ergo & ipſi BC æqualis erit BK, minor maiori; quod fieri non poteſt. Non ergo anguli BGC, EHF inæquales
d propoſ. 20.3 ſunt: æquales ergo. [d] Eſtque angulus ad A anguli BGC, & angulus ad D anguli EHF dimidius.
e ax. 7. 1. [e] Sunt ergo & anguli ad A, D æquales. In æqualibus ergo circulis, &c. Quod oportuit demonſt.

§ 1.

§I.

SCHOLION I.

Ampliationes propoſ. 26, 27.

ETiam in circulis non æqualibus æquales anguli ſimilibus peripherijs inſiſtunt, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias inſiſtant. *Et*: in non æqualibus circulis anguli, qui ſimilibus inſiſtunt peripherijs æquales ſunt ſiue ad centra, ſiue ad peripherias inſiſtant. *Quas duas noſtras propoſitiones ampliatorias duarum harum Euclidearũ 26, & 27, demonſtratas habes in Scholijs noſtris ad defini. 11 huius.*

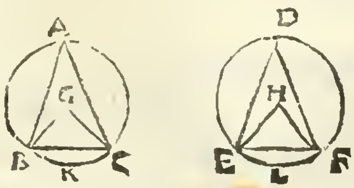
§II.

Alia apud nos Corollaria ex prop. 27 hu.

PRædictis adde & ſequentia apud nos corallaria, quæ aliqui alij aliter demonſtrant cum neceſſitate antecedentium propoſitionum huius li. 3, in primis 22 propoſ.

I.

Si à circulis detrahãtur ſimilia ſegmenta, reliqua etiam ſegmẽta erunt ſimilia. Sic & de arculus. *Reponatur hic fig. propoſ. 26. Detractis enim arcubus (quos finge eſſe circulorum inæqualium, & pro æqualibus eſſe ſimiles) BC, EF, quoniam remanent æquales anguli A, & D in reliquis ſegmentis, ergo per def. 11, & noſtra ad eam ſcholia, arcus BAC, EDC ſunt etiam ſimiles;* *Theorema I.*



& contra, detractis BAC, EDF, arcus CKB, ELF ſunt ſimiles; ac etiam quia anguli æquales ad centra G, H illis inſiſtunt.

II.

Theorema II. Si duo, vel plures circuli ſint concentrici, & ex communi centro ducantur quotlibet communes ſemidiametri, arcus inter eas intercepti erunt ſimiles. *Quæ propoſitio demõſtrata eſt à nobis & in* § 10 *ad* 9 *propoſ. lib.* 6, *& in ſcholijs noſtris ad* 11 *defin. hu. Eſtq́; hoc theorema magni momenti pro problematibus præcipuis in vniuerſa Aſtronomia.*

SCHOLION II.

Problema. *EX 27 element. propoſitione, & noſtra ampliatione habes demonſtrationem praxeos vſurpatæ ab Apollonio circa problema:* Dato angulo æqualem ad datam rectam angulum cõſtituere, *apud nos in* § 1, *&* 2 *ad prop.* 23 *lib.* 1 *illuc viſe, & appone ſini* § 2, *præter ibi citata Clauiana, etiam noſtra ad defin.* 11 *huius, ſchol.* 2. *Ex quibus, & hic ab Euclide poſitis conſtituitur dato angulo ad datæ punctum angulus æqualis, etiam per inæqualium ſegmentorum interualla. Aequalibus enim, aut ſaltem ſimilibus ſegmentis inſiſtentes anguli ſunt æquales A, & D in figuris, quas vide in cit.* § 1, *&* 2 *ad* 23. *pri.*

SCHOLION III.

EX eadem 27 habes demonſtrationem praxeos ducendarum parallelarum, quam dedimus in to. 1. *huius Aerarij ad propoſ.* 31, § 8. *Operationem, & figuram inibi vide. &c.*

§ III.

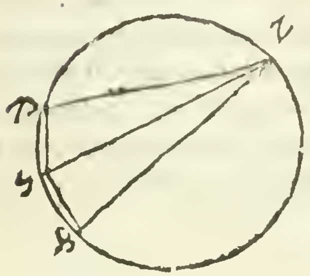
Vſus opticus propoſ. 27.

VSum propoſitionis hic 27 opticum, nec ſine paradoxo, habe ab Eucl. Optic. theor. 44, *vbi obiectum idem, licet ab oculo modò remotum, modò propius oculo admotum, tamen ſemper eiuſdem apparet quantitatis.*

Eſt

Eſt locus, vbi manente oculo, res ſpectata è loco in locum mutata, æqualis ſemper apparet.

Theorema Opticum.



SIt ſpectata magnitudo BG, oculus autē Z. à quo procedant radij BZ, GZ efficiētes triangulum BZG, circa quem deſcribatur circulus BGPZ. dico magnitudinem BG trāslatam in quemlibet locum circumferentiæ circuli, eiuſdem quantitatis ſemper apparere. Transferatur enim BG magnitudo in GP, & conectatur recta PZ. æqualis igitur eſt circumferentia BG, circumferētiæ GP, ob idq; æqualis eſt angulus GZB angulo GZP quæ autem ſub æqualibus angulis cernuntur æqualia apparent, æqualis ergo apparet GB ipſi GP.

§ IV.

Corollarium de angulo recto, qui inſiſtit quadranti, & — Praxis normæ examinandæ.

I.

QVaſi corollarij loco deducitur ex 27 angulum, qui inſiſtit quadranti, eſſe rectum. Nam ſi fingas in 2 fig. propoſitionis 27 Eucl. eſſe quadrantem EF, id eſt quartam partem peripheriæ totius circuli diuiſæ in quatuor æquales partes, etiam anguli ad centrum inſiſtentes erunt & ipſi quatuor inter ſe æquales, hoc eſt ſinguli ſingulis quadrantibus inſiſtentes. erunt re-

cti. nam ex ijs, quæ habes ad 15 propoſ. lib. 1. quatuor recti occupant totum ſpatium ad punctum centri; & , iuxta explicata ad axioma 10, omnes recti ſunt æquales. &c.

II.

Ex hoc corollario habes praxim examinandi normam. Nam ſi geminæ regulæ occupent ſecundum latera tam interiora, quam exteriora quadrãtem peripheriæ deſcripti circuli, & anguli normalis verticis, tam interior, quam exterior præcisè attingant cẽtrum circuli, habes geometricam euidentiam ex anteced. corollar. & ex 27 propoſitione angulum normæ examinatæ rectum eſſe.

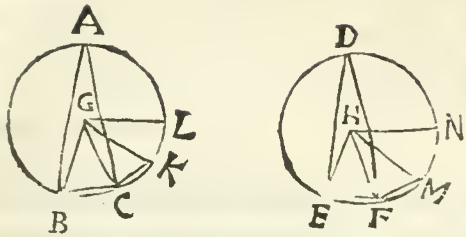
§ V.

SCHOLION IV.

Propoſitio 33 lib. 6 Elem. huc opportunè.

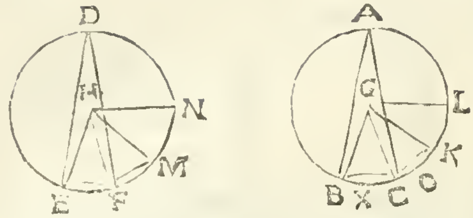
IVxta noſtram methodum, quæ ante lib. 3 habet è ſexto, & quinto iam cognitionem doctrinæ de proportionibus, huc facit propoſitio 33 lib. 6, quæ pertinet ad doctrinam de circulo, de quà in hoc 3 libro; & probatur ex hac 27, quaſi ampliatio ab æqualitate angulorum, & arcuum, quibus inſiſtunt, ad proportionem angulorũ iuxta proportionem arcuum. &c. Eſt ergo propoſ. è lib. 6 ſequens

Prop. 33. lib. 6. *In æqualibus circulis anguli eandem proportionem habent, quam peripheriæ, quibus inſiſtunt, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias conſtituti inſiſtant. Quin & ſectores, quippe ad centra conſtituti.*



IN ęqualibus circulis ABC, DEF ad cētra GH conſtituti ſint anguli BGC, EHF ad peripherias BAC, EDF. Dico eſſe, vt BC peripheria ad EF peripheriam, ita angulum BGC; ad angulum EHF; & BAC ad EDF: & inſuper BGC ſectorem ad EHF ſectorem. Ponãtur peripheriæ BC æquales quotcunque deinceps CK, KL: peripheriæ EF quotcunque æquales FM, MN, ducanturque GK, GL, HM, HN. Cum
ergo peripheriæ CB, CK, KL æquales ſint, *a* erunt & an- *a propoſ.*
guli BGC, CGK, KGL æquales; quam multiplex ergo eſt 27.3.
peripheria BL peripheriæ BC, tam multiplex eſt angulus BGL anguli BGC. Eadem de cauſa quam multiplex eſt peripheria NE peripheriæ EF, tam multiplex eſt angulus NHE anguli EHF. Si igitur peripheriæ BL, EN æquales ſunt, erunt & anguli BGL, EHN æquales, & ſi peripheria BL quam EN maior eſt, erit & angulus BGL maior angulo EHN; & ſi minor, minor. Cum igitur quatuor ſint magnitudines, duæ peripheriæ BC, EF, & duo anguli BGC, EHF; acceptæque ſint peripheriæ BC, & anguli BGC æque multiplices peripheria BL, & angulus BGL. Peripheriç vero EF & anguli EHF peripheria EN, & angulus EHN, demonſtratumq; ſit, ſi peripheria BL maior ſit peripheria EN, & angulum BGL angulo EHN maiorem eſſe, & ſi
æqualis æqualem; ſi minor, minorem: *b* Eſt ergo vt BC pe- b *defin.*
ripheria ad peripheriam EF, ita angulus BGC ad angulũ 5.5.
EHF. Sed vt BGC ad EHF; *c* ita eſt BAC angulus ad EDF c *propoſ.*
angulum, vterque enim vtriuſq; duplus eſt: ergo vt BC ad 15.5.
EF, ita eſt BGC ad EHF, & BAC ad EDF. In æqualibus ergo circulis, &c. Quod oportuit demonſtrare.

Di-

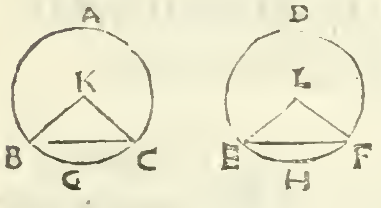


Dico præterea, vt
eſt BC peripheria ad
EF peipheriã, ita eſſe
GBC ſectorem ad H-
FE ſectorem. Ducan-
tur BC, CK; accipiã-
turque periferiarum
BC, CK, puncta XO,
& ducantur BX, XC, CO, OK. Cum ergo duæ BG, GC,
duabus CG, GK æquales ſint, anguloſque æquales conti-
d propoſ. neant, *d* erunt & baſes BC, CK æquales. igitur & triangu-
4.1. la BGC, GCK æqualia erunt; cumque peripheriæ BC, C-
K ſint æquales, erit & reliqua BAC peripheria reliquæ C-
e propoſ. AK æqualis; *e* ergo & angulus BXC angulo COK æqualis
27.3. erit; *f* portiones ergo BXC, COK ſimiles ſunt, & ſunt ſu-
f def. 11. per æqualibus rectis BC, CK: *g* circulorum autem portio-
3. *g propoſ.* nes ſuper æqualibus rectis conſtitutæ, æquales ſunt: por-
24.3. tiones igitur BXC, COK æquales ſunt. Sunt verò & trian-
gula BGC, GCK æqualia; totus ergo ſector BGC toti G-
KC eſt æqualis. Eadem de cauſa, erunt ſectores GKL, G-
KC æquales: tres igitur ſectores BGC, CGK, GLK æqua-
les ſunt. Eadem de cauſa erunt & tres HEF, HFM, HMN
æquales. Quam multiplex ergo eſt peripheria BL peri-
pheriæ CB, tam multiplex eſt ſector GBL ſectoris GBC.
Eadem de cauſa quam multiplex eſt peripheria EN pe-
ripheriæ EF, tam multiplex eſt ſector HEN ſectoris HEF.
Si ergo peripheria BL maior eſt peripheria EN, erit & ſe-
ctor BGL maior ſectore EHN, et ſi æqualis, æqualis, & ſi
minor, minor. Cum igitur quatuor ſint magnitudines, duę
peripheriæ BC, EF, & duo ſectores GBC, EHF; acceptæ-
que ſint peripheriæ BC, & ſectoris GBC æque multipli-
ces BL peripheria, & GBL ſector; peripheriæ verò EF,
& ſectoris HEF peripheria EN, & ſector HEN; demon-
ſtratumque ſit, ſi BL maior ſit quam EN, & ſectorem BGL
g defin. maiorem eſſe ſectore EHN; & ſi æqualis, æqualem, ſi mi-
5.5. nor minorem, *g* erit vt peripheria BC ad EF peripheriã,
ita

ita GBC ſector ad HEF ſectorem. Manifeſtum ergo eſt eſſe, vt eſt ſector ad ſectorem, ita angulum ad angulum.

Propoſ. XXVIII. Theor. XXV.

In æqualibus circulis æquales rectæ lineæ æquales peripherias auferunt, maiorem quidem maiori, minorem autem minori.



Sint in æqualibus circulis ABC, DEF æquales rectę BC, EF auferẽtes peripherias maiores BAC, EDF, minores BGC, EHF. Dico tam maiores peripherias, quam minores æquales eſſe. Sumantur enim circulorum centra K, L, & ducantur KB, KC; EL, LF; & ſunt circuli æquales, [a] ergo & quę ex centris æquales erunt: igitur duæ BK, KC duabus EL, LF æquales ſunt; ſed & baſes BC, EF æquale ſunt, [b] erunt ergo & anguli BKC, ELF æquales: [c] æquales autem anguli æqualibus peripherijs inſiſtunt cùm fuerint ad centra; ergo peripheriæ BGC, EHF æquales ſunt; ſed & toti circuli ſunt æquales; reliquæ ergo peripheriæ BAC, EDF æquales quoq; erunt. Si ergo in ęqualibus circulis, &c. Quod oportuit demonſtrare.

a *defin.* 1.3.
b *propoſ.* 8.1.
c *propoſ.* 26.3.

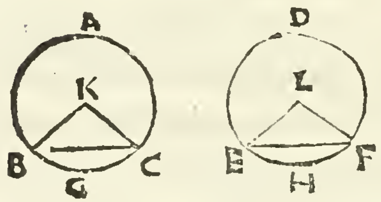
Scho-

SCHOLION.

Vide vſum huius 28 propoſ. in quadratione curuilinei apud nos in Apiar. 1, prælibam. 3, in demonſtratione ſecunda propoſitionis 6. Ac tyronibus exhibe.

Propoſ. XXIX. Theor. XXVI.

In æqualibus circulis æquales peripherias æquales rectæ lineæ ſubtendunt.



Accipiantur in ęqualibus circulis ABC, DEF æquales peripheriæ BGC, EHF, & ducantur rectæ BC, EF. Dico rectas BC, EF æquales eſſe. Sumantur enim circulorum centra K, L, & iungantur BK, KC; EL, LF. Cùm ergo peripheriæ BGC, EHF æquales ſint, [a] erunt & anguli BKC, ELF æquales: & cùm circuli æquales ſint, [b] erunt & quæ ex centris æquales. Duæ ergo BK; KC duabus EL, LF ęquales ſunt, continentq; æquales angulos; [c] ergo & baſes BC, EF æquales erunt. In æqualibus ergo circulis, &c. Quod oportuit demonſtrare.

a propoſ. 27. 3.

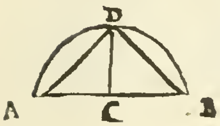
b defin. 1. 3.

c propoſ. 4. 1.

Pro-

Propoſ. XXX. Probl. IV.

Datam peripheriam bifariam ſecare.



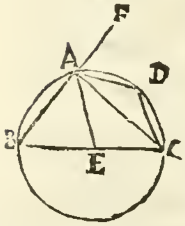
ESto data peripheria ADB, quam biſecare oporteat, ducatur AB, [a] biſeceturque in C; a propoſ. 10.1.
& à [b] puncto C ducatur ipſi AB ad angulos re- b propoſ. 11.1.
ctos CD, iunganturq; AD, DB. Et quia AC æqualis eſt CB, communis CD, erunt duæ AC, CD duabus BC, CD æquales, & angulus ACD angulo BCD æqualis; eſt enim vterque rectus; [c] erit ergo & baſis AD baſi DB æqualis; [d] c propoſ. 4.1.
æquales autem rectæ æquales peripherias auferunt, maiorem maiori, & minorem minori, eſt- d propoſ. 29.3.
que vtraq; peripheriarum AD, DB minor ſemicirculo; quare peripheria AD æqualis eſt peripheriæ DB: data ergo peripheria biſecta eſt. Quod oportuit facere.

SCHOLION.

AD praxim, præter eam, quam hic habet Euclides (in operatione pro ſolutione problematis in hac propoſ. 30) vtere praxibus, quas habes in 10.1 huius Aerary ad propoſit. 10 lib. 1.

Propoſ. XXXI. Theor. XXVII.

In circulo angulus, qui in ſemicirculo rectus eſt; qui in portione maiore minor; qui in minore maior recto eſt. Inſuper maioris portionis angulus maior recto, minoris recto minor eſt.



ESto circulus ABCD, diametrus BC, centrum E, & iungantur BA, AC, AD, DC. Dico angulum BAC in ſemicirculo rectum eſſe. ABC, qui eſt in portione maiore ſemicirculo, minorem; ADC, qui eſt in portione minore, maiorem recto. Ducatur AE, producaturque BA in F. Et quia BE, EA æquales ſunt, [a] erunt & anguli EAB, EBA æquales. Rurſus, quia EA, EC æquales ſunt, erunt & anguli ACE, CAE æquales: totus ergo BAC duobus ABC, ACB æqualis eſt. [b] Eſt verò & FAC externus duobus ABC, ACB æqualis: æquales ergo ſunt BAC, FAC; [c] ergo rectus vterq;. Quare angulus BAC in ſemicirculo BAC rectus eſt. [d] Et quia trianguli ABC duo anguli ABC, BAC duobus rectis minores ſunt, BAC autem rectus eſt, erit ABC minor recto; & eſt in portione A-

a propoſ. 5.1.
b propoſ. 32.1.
c defin. 10.1.
d propoſ. 17.1.

BC

BC maiori ſemicirculo. Rurſus quia ABCD in circulo quadrilaterum eſt; quadrilaterorum autem in circulo deſcriptorum, qui ex aduerſo anguli duobus rectis æquales ſunt; erunt ABC, ADC duobus rectis æquales; & eſt ABC minor recto; reliquus ergo ADC maior; & eſt in portione minore ſemicirculo. Dico prætérea maioris portionis angulum contentum peripheriâ ABC, & rectâ AC maiorem eſſe recto; minoris verò portionis peripheriâ ADC, & rectâ A, C contentum, minorem. Quod per ſe apparet. Cùm enim angulus rectis BA, AC contentus rectus ſit, erit, qui peripheriâ ABC, & rectâ AC continetur, maior recto. Et cùm angulus rectis AC, AF contentus, rectus ſit, erit rectâ AC, & peripheriâ ADC contentus, minor recto. Aliter demonſtratur BAC rectum eſſe. Angulus AEC duplus eſt anguli BAE, g æqualis enim eſt duobus internis & oppoſitis. Eſt verò & AEB duplus anguli EAC: anguli ergo AEB, AEC dupli ſunt anguli BAC; at AEB, AEC æquales ſunt duobus rectis: ergo BAC rectus eſt.

e propoſ. 22.3.

g propoſ. 32.1.

Corollarium.

Ex his manifeſtum eſt, ſi in triangulo vnus angulus duobus ſit æqualis, eum rectum eſſe,

quod etiam, qui eſt ei deinceps duobus rectis

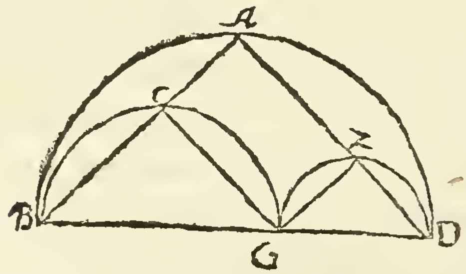
f defin. 10. 1. æqualis ſit: f cum autem anguli deinceps æquales fuerint, recti ſunt.

§ I.

Vſus opticus propoſ. 31.

Pars ea huius 31 propoſitionis, in qua demonſtratur angulus rectus in ſemicirculo applicationem, & vſum inſignem habet cum paradoxo apud Eucl. in Optic. theor. 50. Problema ſit: Datis duabus magnitudinibus inæqualibus vnam tertiam componentibus, quis loca inueniat, vnde ſpectatæ nunc ſingulæ, nunc ſimul iunctæ, ſemper tamen appareāt æquales magnitudines? Inueniet ea loca hæc 31 propoſitio, ac demonſtrabit. Audi, ſeu lege Euclidem

Problema Opticum.



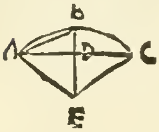
Sint duę magnitudines inæquales, maior quidem BG, minor verò GD, & circa vtrãque earum deſcribãtur ſemicirculi BCG, & GZD. circa etiam totã BD, compoſitam ex duabus BG, & GD, deſcribatur ſemicirculus BAD. angulus igitur, qui eſt in BAD ſemicirculo, æqualis eſt angulo, qui eſt in BCG ſemicirculo: vterq; enim rectus eſt (per 31. tertij Elem.) Æqualis ergo apparet BD ipſi BG. Similiter & BD ipſi GD ęqualis apparet oculis poſitis in punctis C, & Z duorum ſemicirculorum BCG, & GZD. &c.

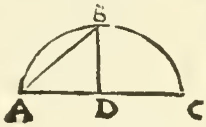
Scho-

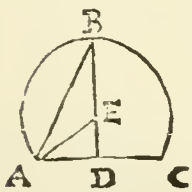
SCHOLION I.

Aliter exercere, & demonſtrare propoſ. 25 ex hac 31 li. 3.

PRopoſitionem 25 exercebis, & demonſtrabis facillimè ex hac priori parte huius 31 ſic. Biſarietur ad angulos rectos recta ſubtenſa datæ portioni circulari, & producatur recta biſariãs vſque ad arcum, & ex alterà parte indeſinitè protrahatur. Vide figuras Eucl. hic repoſitas, & finge ipſas biſariantes BD productas vltra E, & D. Ex iunctæ BA extremo A educatur perpendicularis. Vbi ea ſecabit lineam biſariãtem, ibi erit terminus alter diametri, quæ biſariata dat centrum, ex quo ducitur arcus complens in circulum datam portionem circularem. Demonſtratio eſt, quia deducta perpẽdiculariter ex A continet cum AB angulum rectum in ſemicirculo. &c. Applica plurib. quæ paucis indicamus.







§ II.

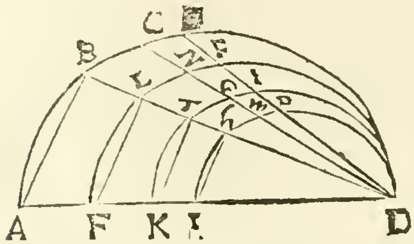
THEOREMA.

De lineis ductis à puncto contactùs ſemicirculorum, quæ omnes ſecantur in proportione ſectæ diametri.

DEmonſtratur ex hac 31 theorema Villalpandi, quo nos vniuerſalius propoſuimus in corollarijs ex Arania geometrizante

zante in Apiar. 1 prælib. 2, & id mox e ſeq. 32 ſoluimus. In quo theor. cùm agatur de lineis proportionalibus, tamen intelligetur à Tyronibus beneficio noſtræ methodi, quæ huic 3 lib. præmiſit ſextum, in quo copioſè nos de lineis proportionalibus. Theorema eſt. Facto ſemicirculo, & ſectà vt lubet diametro in varijs punctis, & per puncta ſectionum ductis circulis ſe contingentibus in altero diametri extremi; quotcunq; ductæ à puncto contactûs ad varia puncta ſemicirculi maximi, ſecantur omnes minores in proportione ſectæ diametri. Sic vides, ſecta diametro AD ſemicirculi ABCD in pūctis E, K, P, & per ea puncta ductis ſemicirculis ELD, KTD, PHD ſe in diametri AD extremo D cōtingentibus, rectas DB, DC, DO ſecari in punctis L, T, H, N, G, M, F, I, Q proportionaliter cum ſectionibus E, K, P diametri AD. Nam anguli in B, L, T, H, C, N, G, M, O, F, I, Q in ſemicirculis, omnes recti, & æquales externis interni, ac proinde ſunt parallelæ AB, EL, KT, PH, per 28 pri. & per 2 ſexti, baſi parallelæ ſecant latera AD, DB proportionaliter. Idemq; demonſtrabitur eodem modo ductis rectis ab A, E, K, P ad ſectiones rectarum CD, DO. Atq; etiam factis integris circulis, omnes à D vtrinq; ad diametrum ſecabuntur in eadem proportione cum diametro.

Pro noſtrà methodo.



§ III.

Corollaria & Problemata geometrica de ſectione rectarum in proportione datæ ſectæ.

I.

Theorema.

E*X theoremate antecedenti habes pro corollarijs. Primum:* Omnes rectæ ductæ à communi puncto contactûs plurium circulorum ſe contingentium ad extremam peri-

peripheriam, ſecantur in eadem proportione. *Scilicet in eadem proportione ſectionum diametri, quæ communis eſt circulis ſe contingentibus. Sectæ ergo ſunt DB, DC, DO in eadem inter ſe proportione.*

II.

Secundum indicauimus in Schol. poſt § 9 ad 10 ſexti: Datas rectas quotcunque (quarum tamen maxima ſit minor, quam ea, ad cuius ſimilitudinem ſecandæ ſunt) ſimul ſimiliter, ac altera ſecta eſt, ſecare. *Puta rectam ſectam in E, K, P, ad cuius ſimilitudinem ſecandæ ſunt tres DB, DC, DO; ſuper AD deſcribatur ſemicirculus ACD, & alij contingentes in D ſecantes in E, K, P. Tum rectæ datæ quæcunq; applicentur ex D in ſemicirculo ACD, & eæ à circulis contingentibus ſecabuntur ſimul omnes in proportione datæ, ac ſectæ AD.* *Problema.*

§ IV.

Vſus varij apud nos propoſitionis 31.

ERuditiones geometricas de problematibus localibus, è quorum genere eſt hoc de angulo recto in ſemicirculo, Ariſtotilis loca ex hoc explicata, praxes erigendæ perpendicularis, normæ examen, centri in circulo inuentionem aliter, quàm ex 1 prop. huius, tangentis rectæ ad circulum deductionem, & plura alia problemata, theoremata, praxes, vſus, &c. demonſtrata ex prima parte huius 31 propoſ. reuiſe apud nos in Tom. 1. huius Ærar. ad 32 prop. a § 6 ad ſeqq. Ibi eorum cognitionem attulimus Tyronibus, vbi pars hæc de angulo recto demonſtratur ex 32 primi, (ſine neceſſitate dilationis vſq; ad hanc libri tertij propoſitionẽ 31) ad plura demonſtratiuè cognoſcenda, quorum cognitione non fuere fraudandi Tyrones. Ibi ergo habes vnde huc transferas plura iucunda, & vtilia, quæ fœcunditatem oſtendant primæ partis huius 31 propoſ.

Quam etiam ornabis duobus theorematibus apud Eucl. in Opticis theor. 23, & 24. Quæ demonſtrantur ex vſu ang. recti in ſemicir-

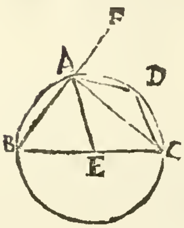
Paradoxum Opticum.

micirculo. Alterum eorum habet paradoxum: Oculo propius ad ſphæram accedente minus de ſphæra cernetur, quam oculo procul poſito: plus tamen cerni exiſtimabitur.

§V.

THEOREMA.

Datis duabus rectis lineis, inuenire, ac oſtendere potentiam maioris ſupra minorem.



A*iunt Theonis eſſe eam propoſitionem:* Potentiam maioris lineæ ſupra minorem oſtendere. *Quam nos expedimus hic ad hanc, & ope huius 31. Puta maiorem datarum eſſe BC; minorem alterutram BA, vel AC. Super maiore BC deſcribatur ſemicirculus, & in eo ab extremo alterutro applicetur, puta, ipſa AC iuncta AB erit latus quadrati, quo quadratum ex BC maius eſt quadrato ex AC. Patet ex 47 pri. eſt enim in triãgulo rectangulo (per hanc 31) lateris BC oppoſiti angulo recto quadratum æquale duobus quadratis ex BA, AC; ergo detracto quadrato ipſiuſ CA ex quadrato ipſius BC, reliquum quadratum ex AB eſt id, quo recta BC plus poteſt, quam minor AC.*

§VI.

Paradoxa de angulis ſegmentorum circuli. Extrema iuxta ſe poſita. Tranſitus ab extremo ad extremũ ſine medio, in angulis, & lineis.

Q*Vod ad alteram partem huius 31 propoſ. attinet, ea miris illuſtris eſt paradoxis, quorum non pauca habes apud nos*

in

in Apiar.3, progym.5, propoſ 9, & in Schol.

Vnde afferas ad hanc 31 ea, quæ poſſint Tyrones rapere in iucundam admirationem Geometricæ Philoſophiæ prodentis ea, quæ, licet demonſtrata, tamen habent inſtar monſtri ſubruentis prima quædam principia in phyſicis, & aliis aliquibus artibus. Quis enim putet fieri tranſitum ab extremo ad extremum ſine medio? extrema iuxta ſe immediatè poſita? Rectus angulus eſt medius inter extremum exceſsùs, ideſt anguli obtuſi, & inter extremum defectùs, ideſt anguli acuti, tamen ab angulo ſegmenti minoris ſemicirculo itur ad angulum ſemicirculi, vel ſegmenti maioris ſemicirculo, hoc eſt ab angulo, qui minor eſt recto ad angulum, qui maior eſt recto, ſine tranſitu per angulum æqualem recto; vt in figura Euclidis vides recto maiorem ſub curua BA, & recta AC immediatè poſitum cum angulo, qui minor eſt recto ſub curua DA, & recta AC, ſiue etiam pro ſemicirculi angulo ſub recta EA, & curua AD; iturq; à maiori BAC mixtilineo ad minora mixtilinea EAD, vel CAD, ſine vllo mixtilineo, qui æquetur, vel æquari poſſit recto.

In circulari etiam linea conuexum, & concauum ſimul ſunt, iturq; ab altero ad alterum ſine rectà intermedia lineà. Quod paradoxum notatur etiam in veteri Schol. græco ad 21 prop. hu. apud Commandinum. *Circularis lineæ inſigne paradoxũ.*

§ VII.

SCHOLION II.

De angulo ſemicirculi, quòd ſit æqualis recto hallucinationes aliquorum eluſtratæ.

Ex prædictis habes quid reſpondeas, & vnde arguas manifeſtæ fallaciæ Peletarium, Vietam, Ioſephum Scaligerum, & ſi qui alii ſunt ipſum etiam Archimedem reprehendentes, & nitentes probare angulum ſemicirculi æqualem recto. Vt angulus (inquiunt) omni obtuſo minor, & omni acuto maior æqualis eſt re-

ăto; ſic angulus ſemicirculi medius inter angulum maioris ſegmenti recto maiorem, & inter angulum minoris ſegmenti recto minorem, erit recto æqualis. Quæ obiectio, & illi aliæ ſimiles indignæ ſunt reſponſione apud eos, qui non ſuperficiariè circa ſcientiam de ſuperficiebus verſantes nullo negotio poſſunt oſtendere implicantias etiam in ijs, quæ patent ſenſui (quis enim non videat angulum ſemicirculi eſſe partem anguli recti ex diametro, & tangente?) & fallacias in iſtorum cauillationibus, dum acuti videri volunt, & pungere audent vel ipſum Archimedem, atq; expungere à geometricæ acutiſſimæ Philoſophiæ demonſtratis veritatibus ea, propter quæ ſui habet admirationem apud ingenua ingenia. Relege quæ habes ad 16 huius apud nos in antecedentibus, præſertim § 2, ac multo magis, ac apertius in § 5 ad definitionem 4 lib. 5; vbi patet ex definitione 4 libri 5, angulum ſemicirculi non habere proportionem cum angulo recto, ac ideo paralogiſticè comparari cum eo: & argumentationem paralogizantium valere de rectilineis, non de mixtilineis angulis cum rectilineis comparatis. &c.

§ VIII.

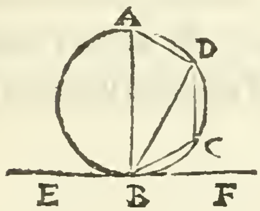
SCHOLION III.

Firmantia definitionem 11.

OMnes ſemicirculi ſunt ſimiles, ideſt habent proportionem æqualitatis ad reliquum, ac, ex hac 31, capiunt angulos æquales rectos. Portiones circulorum maiores, vel minores ſemicirculo ſunt ſimiles eæ (ideſt in eadem proportione ad reliquum ſui circuli) ſolùm, quæ capiunt angulos minores, vel maiores recto, inter ſe æquales; variãtur, & abeunt à ſimilitudine dum angulos variant ab æqualitate, &c. Vt rectè, ac doctè notatur etiam in Schol. græco veteri ad hanc 31 apud Commandinum.

Propoſ. XXXII. Theor. XXVIII.

Si circulum quædam recta tetigerit, & à tactu ducatur recta circulum ſecans, erunt anguli, quos ad tangentem facit, æquales illis, qui in alternis circuli portionibus conſiſtũt.

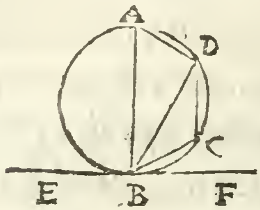


TAngat circulum ABCD recta quædam BF in B, à quo ducatur alia BD ſecans circulum. Dico angulos, quos BD cum tangente facit, æquales eſſe illis, qui ſunt in alternis circuli portionibus: hoc eſt, angulum FBD æqualem eſſe illi, qui eſt in portione DAB: angulum verò EBD illi, qui eſt in portione DCB. [a] Ducatur enim ex B ipſi EF ad angulos rectos BA, & accipiatur in peripheria BD quoduis pũctum C, & ducantur AD, DC, CB; & quia circulum tangit recta quædam EF in B, & à tactu B ducta eſt tangenti ad angulos rectos BA, [b] erit in BA centrum circuli: [c] angulus ergo ADB in ſemicirculo exiſtens, rectus eſt: reliqui ergo BAD, ABD vni recto æquales. Sed & ABF rectus eſt, æqualis ergo angulis BAD, ABD: communis ABD auferatur; ergo reliquus DBF erit æ-

a propoſ. 11. 1.
b propoſ. 19. 1.
c propoſ. 31. 3.

qualis reliquo BAD in alterna circuli portione exiſtenti. Et quia ABCD quadrilaterum eſt in circulo deſcriptum, *d* erunt anguli oppoſiti duobus rectis æquales: erunt ergo anguli DBF, DBE æquales angulis BAD, BCD; quorum BAD oſtenſus eſt æqualis DBF; erit ergo & reliquus DBE reliquo DCB in alterna circuli portione DEB exiſtens æqualis. Si ergo circulum recta quædam, &c. Quod oportuit demõſtrare.

d propoſ. 22.3.



§ I.

Vſus Aſtronomicus propoſitionis 32.

A Sole illuminatur plus quã hemiſphæriũ Lunæ, ac Terræ.

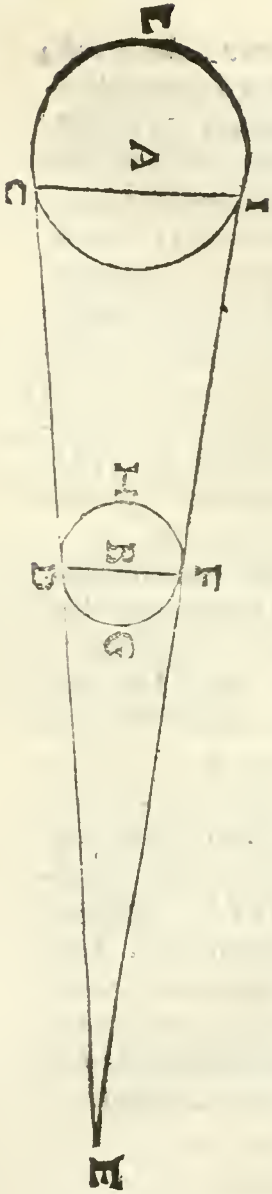
IN Aſtronomia vſus, & applicatio eſt huius 32 propoſ. vt oſtendatur à Sole illuminari pluſquam hemiſphærium Lunæ, ac Terræ.

Suppono aliquid è demonſtratis apud Aſtronomos, & hic etiam apud nos indicandis.

Primum. Solem Terra eſſe maiorem. Quod patet in Apiario 9. Prog. 3. Propoſ. 10. verſus finem numeri 1. margin. & Apiar. 2, Progym. 3. Propoſ. 7. Diameter enim Solis continet vndecim ſemidiametros terræ, &c.

Secundum. Vmbram Terræ à Sole illuminatæ conicam eſſe: quod conſequitur ex 1 ſuppoſito, vt patet in appoſita figura, in qua finge Solem A, terrã B: radij à Sole tangentes terram, & iungentes ſemidiametros (ſiue illis proximè parallelas IC, DF) quoniam inæquales IC, DF iungunt, erunt anguli DCI, CIF inclinati verſus

mino-



minorem diametrum FD, hoc eſt rectis minores, & radij rectà procedentes per D, F, ibunt in angulũ vmbroſum E, ſub vmbrà FD-E conicà à ſphærica terræ vmbroſà parte DFG.

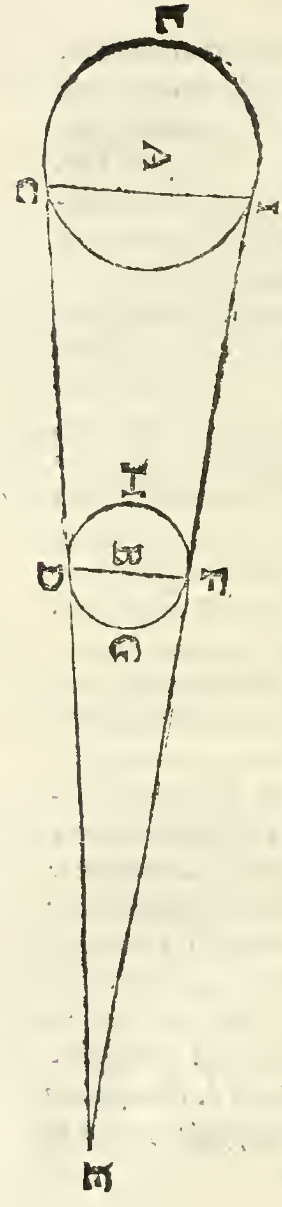
Tertium. Lunam pariter minorẽ eſſe Sole. Quod ex anteced. 2 ſuppoſito patet in eclypſibus lunaribus, in quibus Luna tota ſub vmbra conica terræ latet aliquantiſper, magis, ac minus pro vt in ſpatio vmbroſo inter GE magis, minuſue diſtat à terra B; ergo Lunæ ſemidiameter, quæ intercipitur inter ipſas F-E, DE magis, ac magis in angulum E inter ſe accedentes, & imminuentes ſemper magis latitudinem ſpatij inter FED, minor eſt diametro DF terræ B.

Quibus cognitis, ac poſitis, affirmo à ſole A illuſtrari pluſquã hemiſphærium terræ B. Nam, iuxta 1, & 2 ſuppoſita, radio in

F tan-

F tangente, ducta recta DF a puncto contatus facit angulum DFE recta minorem, & DFI recto maiorem; ergo DFE æqualem, per hanc 32, angulo, qui fieret in ſegmento FDH; DFI verò æqualem angulo in ſegmento FDG; ergo ſegmentum DFH, in quo angulus minor recto, maius eſt, per 31 huius, ſemicirculo, ſegmentũ DFG minus. &c.

Eàdem argumentatione ex hac 32 propoſ. elem. demonſtrare licet Solis A partem hemiſphærio minorem radios emittere in terræ partem FDH. Nam angulus ICD inclinationis eſt minor recto, ac æqualis illi, qui fieret in ſegmento CLI. Applica tu ex antecedentibus. Eàdẽ item argumentatione probabitur & Lunæ partem hemiſphærio maiorẽ à Sole illuſtrari. &c. Applica.

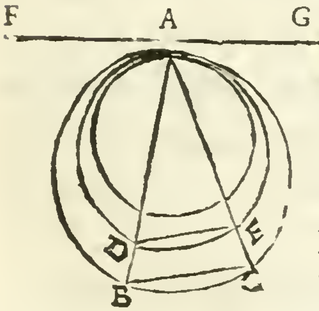


§II.

Vſus geometricus prop. 32 in theoremate pro ſectione rectarum in eàdem proportione.

VSum habes huius pariter 32 in theoremate, quod eſt apud nos in Apiar. 1, prælibam. 2, ex Araneà geometrizante. Quo theoremate vtaris pariter ad praxim pro ſecandis in eàdem proportione pluribus ſimul lineis, non ſolum, vt dictum eſt in § 3, propoſ 31. anteced. ſed etiam nullà habità ratione comparationis ad diametrum. Accipe igitur ex Apiar. ſequentia.

Si duo vel plures circuli ſe ſe mutuo cõtingant, & à puncto contactus producantur rectæ lineæ ſecantes peripherias, a peripherijs & ipſæ rectæ proportionaliter ſecantur. *Theorema.*

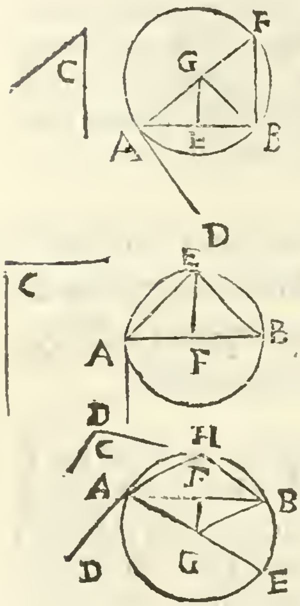


COntingant ſe intus ad A circuli ABC, ADE, &c. & ab A deducantur AB, AC, &c. dico ipſas in D, & E ſecari proportinaliter. Hoc autem demõſtrabitur ſi demõſtrabitur iunctas BC, DE eſſe parallelas. Ducatur ergo tangens FG. Quoniam ex 32 tertij angulus FAB, quem recta AB facit ad contingentem FG, æqualis eſt angulis AED, ACB, qui in alternis ſegmentis conſiſtũt, erunt per pri. axi. & ipſi AED, ACB inter ſe æquales, ac propterea parallelæ ſunt BC, DE, & ſecant proportionaliter in D, & E latera trianguli ACB, *per prop. 2 li. 6.*

Pro-

Propoſ. XXXIII. Probl. V.

Super data recta deſcribere portionem circuli, quæ capiat angulum æqualem dato angulo rectilineo.



SIt data recta linea AB, datus angulus rectilineus C, & oporteat ſuper AB portionē circuli deſcribere, quæ angulum æqualem angulo C capiat. Angulus ergo C aut acutus, aut rectus, aut obtuſus eſt. Sit primo acutus, vt in prima deſcriptione. [a] Conſtituatur ad A punctum rectæ AB angulus BAD æqualis angulo C, qui acutus erit. Ex [b] A ducatur AE ad angulos rectos ipſi AD; atque AB in E [c] biſecetur. Ex E [d] ducatur EG ad angulos rectos ipſi AB, ducaturq́; BG. Et quia AE æqualis eſt EB, communis EG; erunt duæ AE, EG, duabus EB, EG æquales, anguluſque AEG angulo GEB æqualis; [e] erit ergo & baſis AG baſi BG æqualis. circulus ergo centro G, interuallo AG deſcriptus trāſibit etiam per

a propoſ. 23.1.
b propoſ. 11.1.
c propoſ. 10.1.
d propoſ. 11.1.

per B. Deſcribatur, & ſit ABF, iungaturque FB. Cùm itaque diametro AF ab extremitate A ad angulos rectos ſit ducta AD, [f] tanget ipſa circulum; cùmque circulum ABF recta quædam AD tangat, ſitq; à tactu A in circulum ducta recta AB; [g] erit angulus DAB æqualis angulo AFB in alterna ſectione AFB exiſtenti: ſed DAB eſt æqualis angulo C; igitur & angulus C æqualis erit AFB angulo. Super data ergo recta AB portio circuli deſcripta eſt capiens angulum AFB. æqualem angulo C. Sit iam angulus C rectus, ſitque rurſus ſuper AB portio circuli capiens angulum recto C æqualem deſcribenda [h].

f propoſ. cor. 16. 3.

g propoſ. 32. 3.

Fiat angulus BAD angulo C æquales, vt in 2. deſcriptione: [i] AB in F biſecetur; & cẽtro F, interuallo FA, aut FB deſcribatur AEB circulus. [k] Tangit igitur recta AD circulum, quod angulus BAD rectus ſit: ſed angulus BAD ęqualis eſt & angulo C, & angulo [l] AEB in alterna ſectione: erit igitur & AEB angulo C æqualis. Deſcripta ergo eſt ſuper AB portio circuli AEB capiens angulum AEB ęqualem angulo C. Sit tertio angulus C obtuſus. [m] ponatur ei ad A rectæ AB æqualis BAD, vt in tertia deſcriptione, [n] ducaturq; rectæ AD ad angulos rectos recta AE; & AB, & in F [o] biſecetur, cui ex F ad [p] angulos rectos ducatur FG, & iungatur GB. Cum itaq;

h propoſ. 32. 1.

i propoſ. 10. 1.

k corol. prop. 16. 1.

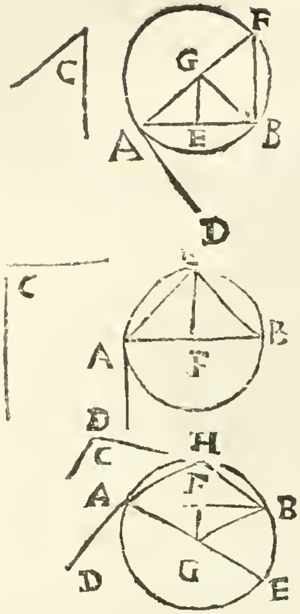
l propoſ. 25. 3.

m prop. 23. 1.

n propoſ. 11. 1.

o propoſ. 10. 1.

p propoſ. 11. 1.



AF æqualis ſit FB, communis FG; erunt duæ FG, AF duabus FG, BF æquales, & angulus AFG angulo BFG æqualis: [q] erit igitur & baſis AG baſi BG æqualis. Circulus ergo centro G, interuallo GA deſcriptus tranſibit etiam per B, tranſeat vt AEB. Quia ergo diametro AE ab extremitate A ad angulos rectos ducta eſt AD, [r] tanget illa circulum; & cũ à tactu A in circulum ducta ſit AB, [s] erit angulus BAD æqualis angulo AHB, qui eſt in alterna portione circuli AHB. Sed angulus BAD æqualis eſt angulo C, erit ergo & angulus AHB in alterna portione æqualis angulo C. Super data ergo recta AB deſcripta eſt portio circuli AHB capiẽs angulum æqualem angulo C. quod oportuit facere.

q propoſ. 4.1.

r cor. propoſ. 16.1.

ſ propoſ. 32.3.

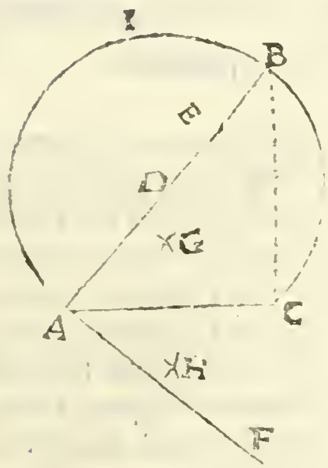
S 1.

§ I.

SCHOLION.

Aliter —

— Propoſitionem 3 3 huius, ac breuiter demonſtrare.



AD datæ AC extremum A conſtituatur angulus FAC dato æqualis, & ab A educatur perpendicularis AB. Lubito interuallo ex C, & A fiant mutuæ ſectiones in G, H, per quas ducta recta, vel ad quas aptata regula, vbi ſecabit ipſam AB in D, erit illi centrum prrtionis ſuper AC deſcribendæ, ac circuli AIBC. Deinde iuncta CB imaginaria in figura, dabit angulũ ad B quæſitum in portione, &c. vt in Eucl. &c. Quoniam enim, per dicta in 1. *Tom. Aerar. ad propoſ.* 10, *recta ducta per H, G biſariat ipſam AC; ergo, per* 1. *huius, erit in biſariãte centrum, &, per* 19. *hu. eſt etiã in recta AB centrũ, ergo erit in communi ſectione D, ne dicatur eſſe in duobus locis contra lemma noſtrum ad* 25 *huius,* § 1. *Pari ratione in alijs caſibus variorum angulorum. &c.*

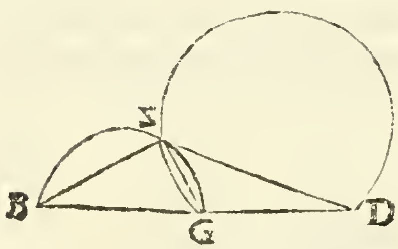
§ II.

Vſus opticus paradoxicus propoſ. 33.

INgenioſiſsima, & facillima praxis huius prop. 33, quæ vſus eſt antecedentis 31, inſeruit apud ipſumet Euclidem in Opticis pro iucundis, & ex parte paradoxicis propoſitionibus, 48, 49, 51. Eſt ne locus, aut quis eum inueniat, ex quo duæ magnitudines, licet inter ſe æquales, tamen inæquales appareant oculo immoto ex eodem loco?

Theorema, & Paradoxum Opticum.

Eſt aliquis locus communis, vnde æquales magnitudines inæquales appareant.



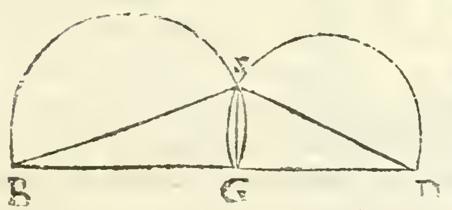
SIt enim BG magnitudo æqualis ipſi GD, & circa ipſam BG deſcribatur ſemicirculus BZD, circa autem ipſam GD deſcribatur ſectio GZD, quæ ſit maior ſemicirculo (per 31, & 33 tertij elem.) connectanturq; rectæ BZ, ZG, ZD. Ergo angulus BZG, in ſemicirculo poſitus, maior eſt angulo GZD, qui eſt in maiore ſegmento (per 31 tertij Elem.) Quæ autem ſub maiori angulo ſpectantur, maiora apparent (per 5 poſtul.) Quare oculo collocato in puncto Z maior apparet BG, quàm GD. Atqui BG ipſi GD poſita eſt æqualis. Eſt ergo aliquis locus communis, vnde ſpectatæ æquales magnitudines inæquales apparent.

§III.

Vſus alter opticus paradoxicus propoſ. 33.

V*Sus opticus alter. Datis inæqualibus magnitudinibus, eſtne inuenire locum, ex quo magnitudines illæ appareant æquales oculo immoto ex eodem loco?*

Eſt aliquis locus communis, vnde inæquales magnitudines æquales apparent.



SIt enim BG magnitudo maior quam GD, & circa ipſam BG deſcribatur circuli ſectio BZG, quæ ſit maior ſemicirculo: circa itẽ ipſam GD deſcribatur circuli ſectio GZD, quæ ſit ſimilis ipſi BZG ſectioni, ideſt, quæ angulum comprehendat GZD æqualem angulo GZB (per 33 tertij element.) connectantur autem rectæ ZB, ZG, ZD. Cum igitur anguli, qui ſunt in ſimilibus ſegmentis, ſint inter ſe æquales (per decimam definitionem tertij element.) æquales ergo ſunt inter ſe GZB, & GZD anguli in ſimilibus ſectionibus deſcripti. Quę autem ſub æqualibus angulis cernuntur, æqualia apparent (per 7 poſtul.) Quare oculo collocato in puncto Z æqualis apparet magnitudo BG ipſi GD. eſt autem maior: Eſt igitur locus aliquis communis, vnde ſpectatæ inæquales magnitudines, æquales apparent.

Theorema, & Paradoxum Opticum.

S 4.

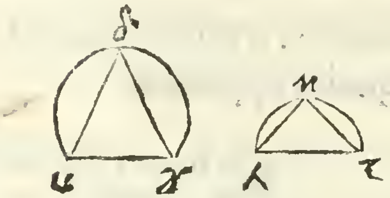
§ IV.

Vſus opticus paradoxicus tertius propoſ. 33.

Proble-ma, & Paradoxum Opticum.

VSus opticus tertius. Inuenire loca, per quæ motus oculus datam magnitudinem videat auctam, vel imminutam in ſubita proportione.

Sit enim recta linea λZ, circa quā deſcribatur pro arbitrio ſectio circuli, in qua deſcribatur angulus λκZ; ipſi autem λZ æqualis ſit ϐγ, circa quam deſcribatur etiam circuli ſectio capiens angulum dimidio minorem, quam ſit angulus λκZ (per 33. tertij Elem.) Angulus ergo λκZ duplus eſt anguli ϐδγ. Quare λZ magnitudo duplo maior videtur magnitudine ϐγ, cum oculi collocantur in ϐδγ, & λκZ circumferentijs.



SCHOLIA ad praxes.

I.

QVoniam localia ſunt problemata de angulis in eodem ſegmento æqualibus, ideſt vagantur anguli ſemper æquales per circumferentiam eiuſdem ſegmenti, inuento ſegmenti centro, & fixo baculo, & chordà ad diſtantiam ſemidiametri, vt docuimus in antecedentibus ad propoſ. 20 huius § 3, erit iucundum circulariter oberranti oculo per varia variorum ſegmentorum puncta videre eandem magnitudinem modò, v. gr. duplam in pluribus punctis, modò triplam in pluribus. &c. in auctione, vel imminutione; dum ſcilicet obiectum eleuatum ſit iuxta oculi eleuationem, ſintq; in eodem plano.

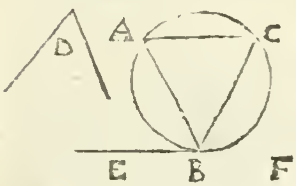
Pro

II.

Pro praxibus, ſiue vſibus opticis antecedentibus habes compendium geometricum à nobis in conſtructione noſtræ demonſtrationis in anteced.§ 1 ad hanc 33, facilius, ni fallor, quàm in conſtructione Euclidianà.

Propoſ. XXXIV. Probl. VI.

A dato circulo portionem auferre, quæ capiat angulum æqualem dato angulo rectilineo.



ESto datus circulus ABC, datus angulus rectilineus D. Oporteat autem à circulo ABC portionem auferre, quæ capiat angulum angulo D æqualem. Ducatur EF tangens circulum in B. *a* Conſtituaturq́; ad B rectæ EF angulus FBC æqualis angulo D. Cùm ergo circulũ ABC tangat recta EF, & à tactu B ducta ſit BC, *b* erit angulus FBC æqualis angulo BAC in alterna portione BAC conſtituto: ſed angulus FBC æqualis eſt angulo D; erit igitur & BAC in alterna ſectione eidem angulo D æqualis. A dato ergo circulo ABC ablata eſt portio BAC capiens angulum æqualem dato angulo D. quod oportebat facere.

a *propoſ.* 23.1.

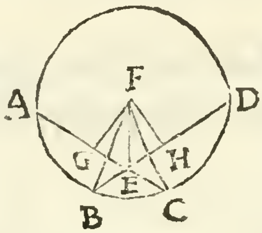
b *propoſ.* 32.3.

Pro-

Propoſ. XXXV. Theor. XXIX.

Si in circulo duæ rectæ ſe inuicem ſecent, erit rectangulum portionibus vnius contentum æquale portionibus alterius contento.





SEcent in circulo ABCD ſe inuicē duæ rectæ AC, BD in E. Dico rectangulum AE EC contentum æquale eſſe DE, EB contento. Si igitur AC, BD per centrum tranſeant, perſpicuum eſt, cum AE, EC; DE, EB æquales ſint, etiam AE, EC cōtentum æquale eſſe DE, EB contento. Quod ſi per centrum non tranſeant: accipiatur centrum F, ab eoque ad rectas AC, DB *a* ducantur perpendiculares FG, FH, iunganturq; FB, FC, FE. Et quia recta quædam GF per centrum ducta rectam quādam AC non per centrum ductam ad angulos rectos ſecat, & *b* bifariam illam ſecabit: æquales ergo ſunt AG, GC. Cùm igitur recta AC in G æqualiter, in E inæqualiter ſecta ſit, *c* erit quod AE, EC continetur rectangulum, cum quadrato quod ex EG, æquale quadrato quod ex GC; ſi commune, quod ex GF, adda-

a *propoſ.* 21.1.

b *propoſ.* 3.3.

c *propoſ.* 47.1.

tur

tur, erit quod AE, EC continetur, cum illis, quæ ex GE, GF quadratis, æquale illis, quæ ex CG, GF. d Sed illis, quæ ex CG, GF æquale eſt, quod ex FC, illis verò, quæ ex GE, GF, æquale eſt quod ex FE: ergo quod AE, EC continetur, cũ eo quod ex FE, æquale eſt ei, quod ex FC (ęqualis autem eſt FC ipſi FB;) ergo quod AE, EC continetur, cum illo quod ex EF, æquale eſt ei, quod ex FB. Ob eandem cauſam erit quod DE, EB continetur, cum illo quod ex FE, æquale ei quod ex FB. Oſtenſum eſt autem & id, quod AE, EC continetur, cum eo quod ex FE, æquale eſſe ei, quod ex FB; ergo quod AE, EC continetur cum illo, quod ex FE, æquale eſt illi, quod DE, EB continetur, cum illo quod ex FE quadrato; commune, quod ex FE, auferatur; & erit reliquum AE, EC contentum æquale reliquo DE, EB contento. Si ergo in circulo, &c. Quod oportuit demonſtrare.

d *propoſ. 47.1.*

SCHOLION I.

Propoſitiones hæ 35, & ſequens 36 continent lemmata firmandis aliquibus problematibus ad 16, & 17 lib. 6, ubi praxes aliquas proportionalium linearum inueniendarum tradidimus, ſupponentes has hic 35, & 36. Hic ergo habes, quod ſupponunt illæ praxes ibi traditæ, ubi ſuus erat locus.

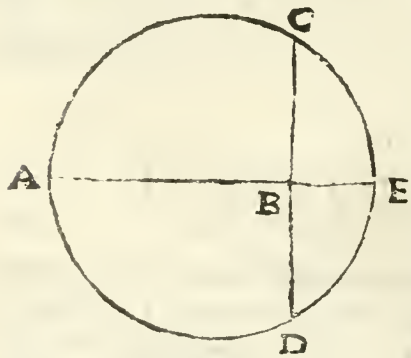
§I.

SCHOLION II.

Noſtra methodus pro agnoſcendis circuli admirandis in hac 35 prop.

Noſtra methodus fauet propoſitionibus 35, & 36 huius libri, vt nunc hìc in illis videas myſteria aliqua pertinentia ad lineas proportionales poſt explicatum à nobis in antecedentibus librum ſextum, quæ non licuiſſet aperire in libro tertio ante ſextum, in quo de proportionalibus lineis copioſè à nobis expoſitum eſt.

Itaq; agnoſce, mi Tyro, miram hanc circuli proprietatem, in quo binæ vllæ lineæ ſecare ſe non poſſunt, niſi proportionaliter, non autem temerè, vt fieri poteſt extra circulum; nec ſolum proportionaliter, ſed etiam reciprocè, ita vt in vtraque ſint antecedentes, & conſequentes proportionum termini. Vt in AE antecedens eſt AB, & in CD conſequens BC, ſic in eadẽ CD antecedens eſt BD, & conſequens BE in AE. Quoniam enim iam didiciſti è 16 lib. 6, quatuor datis rectis lineis, ſi extremarum rectangulum ſit æquale rectangulo mediarum, eas eſſe ĩter ſe proportionales, vt prt. ad ſec. ſic tert. ad quartam, & in 14 eiuſdem l. 6 vidiſti parallelogrammorum æqualium, & habentium ſaltem vnum angulum angulo alterius æqualem, latera circa æquales angulos eſſe etiam reciprocè proportionalia, ac ſunt rectangulorum omnes anguli æquales, nempè recti; dum hìc audis rectangulum ſub AB, BE



æqua-

æquale eſſe rectangulo ex CB, BD; ergo alterutrum eorum rectangulorum continet duas extremas, & alterum duas medias quatuor linearum reciprocè proportionalium. Velut AB, BE duæ extremæ, CB, BD duæ mediæ, ac proinde, vt AB ad BC, ita BD ad BE.

§ II.

Vſus circuli ex hac 35 propoſ. in Geometria ſpeculatiua, & practicâ, & in Arithmeticâ.

EST ergo circulus fæcundiſſimus parens linearum proportionalium inueniendarum in hac 35. Ideo vſus inſignes ſunt ab hac, etiam extra tertium librum pro ſexto, vbi de inuentionibus, & vſibus linearum proportionalium. Quin immo in 13 propoſit ſexti, vbi de mediæ proportionalis inuentione, habes veſtigium vſus circuli, quaſi in hac 35 lateat inuentio mediæ. *Circulus parens linearũ proportionaliũ.*

Apud nos verò habes vſum circuli etiam pro tertia, & quarta proportionalibus inueniendis ex hac 35. in Apiar. 3, progym. 10. propoſ. 1, 2, 3, & in initio 2 partis 2. tom. Aerar. ad propoſ. 16, § 1. & ad propoſ. 17, § 2, 3, 4, 5. Ex hac eadem 35 habes inuentionem demonſtratam lateris recti datæ parabolæ, ad vſus eximios, Apiar. 7, progym. 3, propoſ. 3 & ſeqq.

Præterea reuiſe ad 16 propoſ. initio 2 partis 2. tom. Aerar. § 2, vſus duos eximios ex hac 35 in circulo pro operationibus Geometr. practicæ ad inueniendas ignotas, & inacceſſas altitudines, latitudines, profunditates. Vſum etiam inſignem, & quaſi ortum aureæ regulæ proportionum in Arithmeticis ex mutua duarum rectarum ſectione in circulo, recole ibid. § 3. Ex quibus hìc indicatis habes copiam ornandæ, ac illuſtrandæ huius 35 propoſ. *Inacceſſas altitudines, latitudines, profunditates agnoſcere ope circuli. Regula aurea arithmetica, in & e circulo.*

§ III.

Corollarium, ac Theorema.

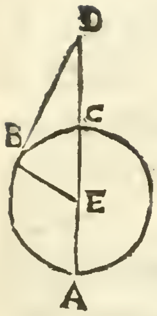
SI duæ rectæ mutuò ita ſecent ſe, vt earum ſigmenta ſint reciprocè proportionalia, circulus ibit per earum extrema. *Iuxta à nobis expoſita in § 2 antecedente ad hanc 35, circulus ductus per tria extrema A, C, E, ibit & per quartum D linearum, quarum ſegmenta reciproca ſunt.*

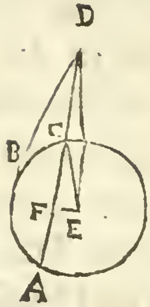
Propoſ. XXXVI. Theor. XXX.

Si extra circulum punctum ſumatur, ab eoq; in circulum duæ rectæ lineæ cadant, quarum vna circulum ſecet, altera tangat, rectangulum tota ſecante, & ea parte, quæ inter punctum, & curuam peripheriam eſt, erit æquale tangentis quadrato.

EXtra circulum ABC ſumatur quoduis punctum D, ab eoq; ad circulum cadant duæ rectæ DCA, DB, quarum DCA circulum ſecet, DB tangat. Dico rectangulum AD, CD cōten-

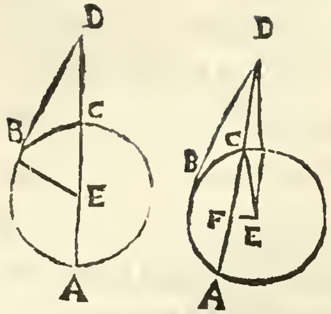
tum,





tum, æquale eſſe quadra-
to, quod fit ex DB. Tran-
ſit autem DCA per cen-
trum, aut non. Tranſeat
primo per centrum quod
ſit E. Ductà ergo EB, *a* erit *a propoſ.*
angulus EBD rectus. Et 18.3.
quia recta AC biſecatur in E, eiq; appoſita eſt in
directum CD, *b* erit quod AD, DC continetur, *b propoſ.*
cum eo quod ex EC, æquale ei, quod ex ED; 6.2.
eſt verò EC æqualis ipſi EB: ergo quod AD, D-
C continetur rectãgulum, cum quadrato quod
ex EB, æquale eſt ei, quod ex ED, quadrato. *c* *c propoſ.*
Eſt autem quod ex ED æquale illis, quæ ex EB, 47.1.
BD quadratis, quòd angulus EBD rectus ſit.
Ergo quod AD, DC continetur, cum eo quod
ex EB, æquale eſt illis, quæ ex EB, BD. commu-
ne, quod ex EB tollatur, eritque quod AD, DC
continetur æquale ei, quod ex Tangente DB
quadrato.

Sed iam DCA non tranſeat per centrum, ac-
cipiaturq; centrum E, *d* ab eoq; ad AC perpen- *d propoſ.*
dicularis ducatur FE, iunganturq; EB, EC, ED; 12.3.
e erit ergo angulus EBD rectus. Et cum recta *e propoſ.*
quædam EF per centrum ducta rectam quan- 18.3.
dam AC non per centrum ductam ſecet *f* ad re- *f prop. 3.*
ctos angulos, illam & bifariam ſecabit: ſunt er- 3.
go



go AF, FC æquales. Et quia recta AC biſecatur in F, eiq; in directum additur CD, g erit quod AD, DC continetur, cum illo quod ex FC æquale ei, quod ex FD. Commune, quod ex FE addatur, & erit quod AD, DC cõtinetur, cum illis quæ ex FC, EF, æquale illis, quæ ex FD, FE: illis autem, quæ ex DF, FE, h æquale eſt quod ex DE (eſt enim angulus EFD rectus:) illis verò, quæ ex CF, FE, æquale eſt quòd ex CE. Ergo quod AD, DC continetur, cum illo quod ex EC, æquale eſt ei, quod ex ED; i eſt autem EC æqualis ipſi EB: Ergo quod AD, DC continetur, cum illo quod ex EB, æquale eſt ei, quod ex ED: ei autem quod ex k ED æqualia ſunt quæ ex EB, BD, cum angulus EBD ſit rectus: ergo quod AD, DC continetur, cum eo, quod ex E B, æquale eſt illis, quæ ex EB, BD. Cõmune, quod ex EB tollatur, & erit quod AD, DC continetur rectangulum æquale quadrato ex tangente DB. Si ergo extra circulum, &c. Quod oportuit demonſtrare.

g prop. 6.2.

h propoſ. 47.1.

i def. 15.

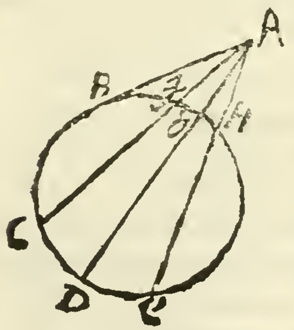
k propoſ. 47.1.

§I.

SCHOLION.

Conuerſum noſtrum Corollatij primi apud Clauium ex 36 propoſ.hu.li. 3.

Corollarium eſt: ſi à oommuni puncto quotcunq; rectæ ducantur (circulum ſecantes) vſq; ad cauam peripheriam, rectangula ſub totis, & parte inter punctum, & conuexam peripheriam omnia eſſe æqualia.



Velut ab A ductæ AC, AD, &c. conſtituunt duo rectãgula CA, AF, & DA, AG æqualia, quia ſcilicet, ex hac 36, ſunt æqualia vni, eidemq́ quadrato tangentis AB. Si ergo rectarum à pũcto A ſegmẽta ſint in circuli peripheria, rectangula ſub totis, & ſegmẽtis, &c. æqualia ſunt.

Conuerſum noſtrum eſt (quod alij ab abſurdo probant) Si rectarũ ab vno puncto ductarũ ſegmenta cũ totis. &c. conſtituunt rectangula æqualia, ſunt puncta ſectionũ in circuli peripheria, ideſt circulus ductus per tria, ibit & per quartũ punctum ſectionũ. Si rectarũ AC, AD ab A ductarum ſectiones in F, G ita ſunt, vt ſub CAF, DAG rectangula ſint æqualia, circulus per F, C, D ibit & per G, hoc eſt ſectionum puncta F, G, D, C ſunt in peripheria eiuſdem circuli.

§ II.

Vſus prop. 36 pro dimenſione totius terrarum Orbis.

Vſus egregius huius 36 propoſitionis eſt in inuentione diametri, & dimenſione vniuerſi terrarum orbis. Maurolycus in ſua Coſmographia primus, ac ingenioſè, vt ſemper ſolet, ad tam inſignem vſum traduxit hanc propoſitionem. Vide illum etiam citatum apud Clauium in cap. 1 ſphæræ Sacrob.

Hac eadem 36 vſus eſt omnium exactiſſimè ad praxim Griembergerus. Cuius operationem, & demonſtrationem ex hac 36 habes apud nos in Apiar. 2 progym. 3. Schol. 2, poſt prop. 7. Labor omnium Philoſophorum geometricè verſantium circa vſum hu. 36 pro terrarum orbis dimenſione, poſitus eſt in inuenienda rectà, quæ verè ſit & recta, & tangens ſuperficiem ſphæricam orbis terreni. Ac licet præ alijs ſumma cum diligentià practicà Griembergerus (vt videre licet in cit. Ap. 2) eam tangentem ducere docuerit; tamen etiã in ingenioſà, & exactà eius operatione aliquid eſt, quod turbet. Nam ea linea (quam ille deſignat, aut metitur, ac dirigit iuxta perpendiculum incidens ad rectos in eius lineæ partes) quoniam perpendiculum ſemper tendit ad terræ centrum, quanto magis producitur ea tangens extra ſuperficiem terreni orbis, perpendiculum ſemper obliquius procedit, & producit lineam non rectã, ſed curuatam (licet fortaſſe non valde ad ſenſum) in cuius partibus facit angulos rectos verſus centrum, & externos æquales internis, quales fiunt in quotidianis operationibus à perpendiculis ſuper planis breuibus terræ curuaturam tangentibus.

Tangẽs recta ſuperficiẽ terræ vix poteſt duci.

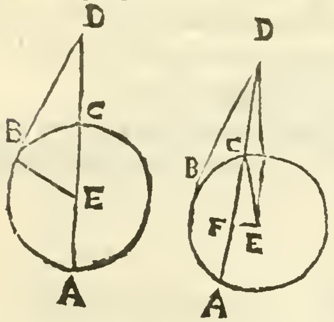
In applicationibus geometricis ad phyſica melius, eſt vti naturalib. adminiculis potius, quã artificialibus.

Nos cum Maurolyco, & alijs putamus ſatius eſſe, in hiſce applicationibus geometricis circa materias phyſicas, vti ope naturæ potius, quam artis in naturalibus. Itaq; cum natura vtatur radio viſuali per breuiſſima, ideſt per rectam lineam directo, vtemur nos etiam hic (vt & in cit. Apiar. 2 aliter vſi ſumus) radio viſuali pro tangente, atq; hanc 36 propoſ. faciliore fortaſſe opera, quam alij

tradu-

traducemus ad inſignem hunc vſum dimetiendi totum terrarum orbem, non ſine ope propoſ. 17 ſexti. Cui operationi conducet mirificè noſtra methodus, per quam præceſsit 17 prop. ſexti. Vtemur modo hìc faciliore non ſolum, quàm eſt ille, quo vſi ſumus in cit. Ap. 2, ſed etiam in Analecto 5, in quarta editione noſtrorum Apiariorum.

Finge igitur in fig. Eucl. terrarum orbem eſſe circulum CBA, & oculum in B propè ſuperficiem terræ, vel maris, vbi poſſit in aperta planitie ampliſsima, vel in ſuperficie tranquilli maris, ac in tempeſtate sereniſsima, & quàm maximè licebit à vapribus libera, poſſit, inquam, ſpectare procul, & incidat viſoria linea BD in verticem D turris alicuius CD, vel ſcopuli, vel montis, arboris etiam alicuius proceriſsimæ. Quæ omnes magnitudines ab arte, & à natura perpendiculariter erectæ, & directæ ſunt ad centrum E.



Notæ ſunt menſuræ vtraq; linea BD, DC per modos, quos indicauimus in cit. Ap. 2. prog. 3. prop. 7, atque etiam docuimus in antec. prog. 1, & 2 eiuſdem Ap. 2, & in 1 parte Tomi 2, ad 4 prop. elem. 6. Quoniam igitur quadratum, per hanc 36, diſtantiæ BD eſt æquale rectangulo ſub altitudine CD, & ſub recta DA, ergo, per 17 ſexti, erunt tres lineæ proportionales CD, DB, DA. Notæ ſunt in menſuris lubitis prima CD, & ſecunda DB, ergo, per regulam auream dabitur in iiſdem menſuris, quæ quæritur, tertia DA; ſcilicet diuidendo numerum ipſius BD per numerum ipſius DC; ac erit Quotiens numerus ipſius DA, ex quo ſi detrahas numerum ipſius CD, reliquus erit numerus indicans quantitatem diametri CA, terræ CBA. Ex qua deinde licebit elicere non ſolum ambitum circuli CBA in terrà maximi, hoc eſt ipſius Orbis terreni, ſed etiam ſuperficiem, & ſoliditatem totius Orbis terreni, iuxta modos à nobis vſurpatos in cit. propoſ. 7. prog. 3. Apiar. 2. Ac multo facilius, & demonſtratiuè iuxta vſum mirificum centri grauitatis à noſtro Guldino proditum, & à nobis expoſitum in exemplis facientibus ad hanc terræ trinam dimenſionem in Analecto 7.

ad quartam editionem Apiariorum, & non ſemel in tribus Tomis huius Aerarij. Vide & in 2 ſect. Breuiarij ſtereom. in To. 3. huius Aerarij.

Apud nos modi quatuor dimetiendi Orbem terrarum.

Habes hactenus à nobis in hoc Aerario quatuor modos dimetiendi orbis terrarum; I ex Eratoſthene ad 29 pri. II ad 8 ſexti. III ad defin. 11 huius. IV hìc ad hanc 36.

§ III.

Vſus alij propoſ. 36.

Inuentiones linearum proport. ex hac 36.

V*Sus etiam alios habes noſtros huius 36 pro inuentionibus linearum proportionalium ad quam plurima ea omnia in omnibus artibus, ac ſcientijs, quibus vſui ſunt lineæ proportionales, ac noſtrum etiam illud problema:* datæ rectæ lineæ duas extremas proportionales adijcere. *&c.*

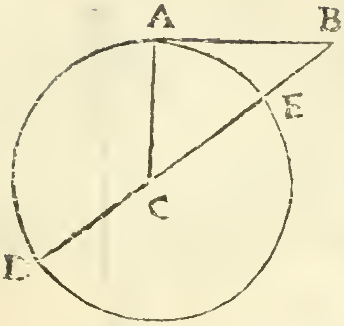
Vide, vnde huc adducas illuſtrandæ huic propoſitioni 36 pro Tyronibus, Apiar. 3, Prog. 10, propoſ. 4, 5, &c. & in 2 parte Tomi 2 ad propoſ. 16, & 17.

§ IV.

Problema in Opticis Vitellionis ſolutum ex hac 36 propoſ.

H*Vc facit problema, quod eſt propoſitio 12 lib. 1. Opticæ Vitellionis, quod & Clauius in ſua ad hanc 36 Scholia ſibi aſſumpſit. Verba Vitellionis ſunt:* Poſitis duabus lineis, poſſibile eſt vni ipſarum linearum aliam adiungere, ita, vt illud, quod fit ex ductu totius lineæ cum adiunctâ in adiunctam, æquale ſit quadrato reliquæ datarum. *Finge in appoſita figura datas duas, & extra circulum eſſe BA, ED, ſitq; alterutræ earum, ipſi ED, adiungenda alia ita, vt rectangulum ſub ED cum adiuncta, & ſub adiuncta, ſit æquale quadrato reliquæ da-*

tæ



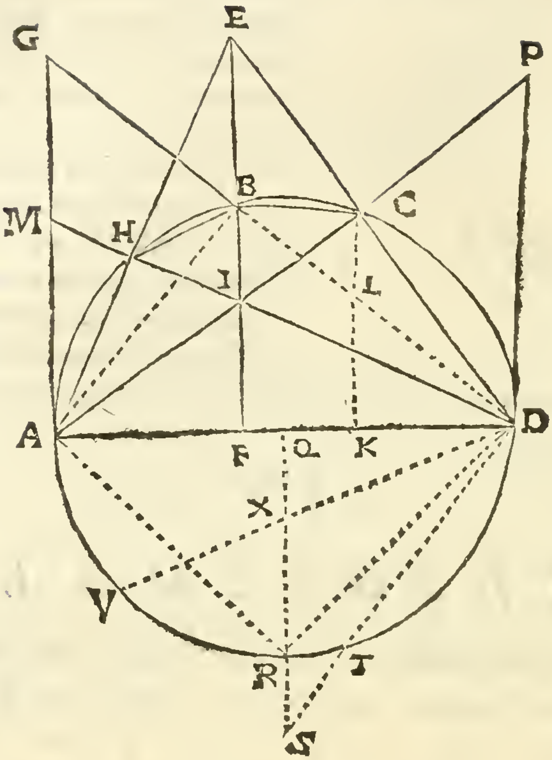
tæ BA. Biſeriatæ ED datæ ſemidiametro CA deſcribatur circulus DAE, & educatur ab extremo A ſemidiametri ipſa tangens AB æqualis alteri datæ BA. Per centrum C iungatur DB; erit illa quæ quæritur, ſcilicet ipſa data ED cum adiuncta EB, quæ in vnam lineã componitur, cuius rectãgulum ſub data ED cum adiũcta EB, & ſub adiuncta EB, eſt æquale quadrato datæ BA, per hanc 36.

§V.

THEOREMA I.

Sin in ſemicirculo ex quouis pũcto intra diametrum aſſumpto ad ipſam erigatur perpendicularis, & ab vtroq; termino diametri duæ rectę ducantur ſe mutuò ſecantes intra ſemicirculum in aliquo puncto lineę perpendicularis: aliæ duæ rectæ ductæ ab iiſdem terminis diametri per puncta, in quibus priores duæ ſecant circumferentiam, ſi producantur, concurrent etiam ipſæ extra ſemicirculum in idem pũctum erectæ perpendicularis.

EX vtroque termino A, D diametri AD ductæ ſint duæ rectæ AC, DH ſe mutuo ſecãtes intra ſemicirculũ ABD, in pũcto I perpẽdicularis FB, dico rectas quoq; AH, DC protractas cum eàdem perpendiculari cõcurrere



in eodem puncto, verbi gratia, E. Concurrat enim recta AH cum protracta perpendiculari AB, in E, nectaturque CE. Quoniam igitur rectangulum ſub EA, AH, [a] æquale eſt rectangulo ſub CA, AI, erunt [b] quatuor puncta H,I,C, E, in circumferentia circuli, & ideo anguli oppoſiti ECI, EHI in quadrilatero HICE, [c] duobus rectis æquales. Sed angulus EHI rectus eſt, vtpotè æqualis angulo AHD in ſemicirculo; ergo & angulus ECI rectus erit, æqualiſq; angulo recto [d] ACD. Quare cum anguli ACE, ACD ſint æquales duobus rectis, erunt [e] rectæ CD, CE vna linea recta, & conſequenter protracta etiam recta DE tranſibit per punctum E. Non aliter demonſtrabitur rectas AC, D, H, ſecare perpendicularem in eodem puncto I, ſi prius ductæ fuiſſent rectæ AE, DE, ad punctum E, extra ſemicirculum

a § 37 ad 4 l. 6.
b § 1 ad 36 hui.
c 22 tertij.
d 31 tertij.
e 14 primi Euc.

culum ſecantes eiuſdem circumferentiam in punctis H, C. Nam ductà, verbi gratia, AC ſecante perpendicularem FB in I, iunctiſq; IH, DH, erunt vt prius quattuor puncta H, I, C, E in circumferentia circuli, & angulus IHE æqualis recto ICE [f] Atqui etiam HD cum eadem recta AE facit angulos rectos in puncto H. Ergo rectæ HI, HD ſunt vna linea recta tranſiens per punctum I. Quod erat demonſtrãdum. *Villalpandus. Ex quo eius theoremate præclara ſequentia idem Author deducit.* f 31 tertij.

§ VI.

COROLLARIVM.

In quouis triangulo ex tribus angulis ſi demittã-tur perpendiculares in latera oppoſita, ſeſe mutuò ſecabunt in eodem puncto.

NAm in triangulo oxygonio ADE demiſſa ſit ex E perpendicularis EF, & circa AD deſcribatur ſemicirculus AHCD ſecans latera AE, DE in H, C, nectanturq; AC, DH, quæ [g] ad èadem latera AE, DE perpendiculares erunt. Quare ex ijs, quæ proximè ſunt demonſtrata, eædem rectæ AC, DH, ſe mutuo ſecabunt in eodem puncto I, cum perpendiculari EF, in qua ſe mutuo ſecant aliæ duæ AHE, DCE. Deinde ſit triangulum, verbi gratia, AID, amblygonium, & ex angulo obtuſo AID demiſſa perpendicularis IF, quæ intra triangulum cadet: reliquæ verò duæ perpendiculares AH, DC cadent in latera DI, AI protracta. Dico eaſdem tres perpendiculares FI, AH, DC concurrere in idem punctum E. Deſcriptus enim ſemicirculus circa baſim AD, tranſibit neceſſario [h] per puncta H C. Cum igitur AC, DH intra ſemicirculum

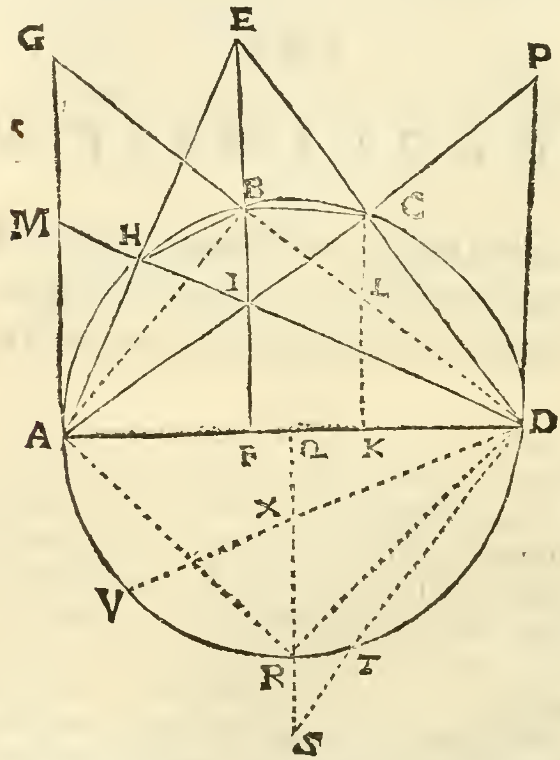
g 31 tertij

h § 1 ad 36 hu.

con-

conueniant in eodem puncto I perpendicularis FI; conuenient etiam rectæ AH, DC cum eàdem perpendiculari in alio puncto E.

Poſtremò quod ad triangulum rectangulum attinet, cũ in eo duæ perpendiculares demiſſæ ex angulis acutis ſint, ipſamet latera trianguli circa angulum rectum, patet tertiam perpendicularem demittendam ex angulo recto ſe mutuò ſecare cum reliquis in eodem puncto, in quo exiſtit angulus rectus. Ergo. &c. *Villalp.*



SCHOLION I.

E § 37 *ad* 4 *li.* 6, *AB, vel DB eſt media proportionalis inter AH, AE, & inter AI, AC, ergo quadrato eidem ex AB, vel ex DB ſunt æqualia rectangula EAH, CAI.*

Scho-

SCHOLION II.

P*Roclus lib.2, cap.7 vbi affert exemplum propoſitionis, quæ nō ſit elementum, ſed elementaris:* Exempli gratiâ. A triangulorum angulis ad latera ductas perpendiculares in vno ſigno coincidere. *Habes exempla in anteced. ex Villalp. Vide & Commandinum ad propoſ. 62 lib. 7 Pappi.*

§ VII.
THEOREMA II.

Si in ſemicirculo ab vtroque termino diametri duæ rectæ ducantur, ſe mutuò ſecantes intra ſemicirculum, & ab eiſdem terminis, per puncta in quibus ductæ ſecant circumferentiam, ducantur duæ aliæ rectæ concurrentes extra ſemicirculum; recta, quæ coniungit vtrumq; punctum concurſûs, erit ad diametrum perpendicularis.

In ſemicirculo ABCD ex terminis A, D diametri AD ductæ ſint rectæ AC, DH ſe mutuò ſecantes in I, & circumferentiam in C, H: per C, H, ex ijſdem terminis A, D eductæ ſint DC, AH concurrentes in E. Dico rectam EI, quæ iungit vtrumq; punctum concurſûs E, I, eſſe perpendicularem ad diametrum AD. Producatur enim vſq; ad F; atq; ex I, intelligatur demiſſa perpendicularis IF, quæ cum protracta [a] tranſeat per E, erit perpendicularis IF, vna eademq; linea cum recta EI, hoc eſt cū recta EIF: atq; iccirco etiam recta EIF erit ad diametrum AD perpendicularis. Quod erat demonſtrandum. *Villalpandus.* CO-

a § 5 *ad* 31 *hu.*

COROLLARIVM.

HInc patet noua ratio demitiendi lineam perpẽdicularem in datam rectam lineam ex puncto dato; Si enim data foret recta AD, & puuctum E, deſcripto ſemicirculo ABD quouis interuallo, ex quouis pũcto rectæ AD, iunctiſq; AE, DE ſecantibus circumferentiam in H, & C, ſi iterum nectantur DH, AC, illæ ſe mutuò ſecabunt in puncto I, per quod ducta recta ex puncto E, neceſſariò eſt perpendicularis ad rectam AD, vt demonſtratum eſt. *Villalp.*

SCHOLION.

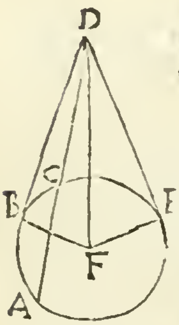
Demonſtratio praxis ad propoſ. 12 lib. 1, § 4.

Q*Væ ex antecedentibus* § 7, *& Corollario Villalpandi ſatis conſtat.*

Pro-

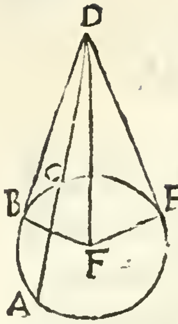
Propoſ. XXXVII. Theor. XXXI.

Si extra circulum punctum ſumatur, ab eoq́; in circulum duæ rectæ cadant, quarum vna circulum ſecet, altera incidat; ſit autem quod tota ſecante, & ea parte, quæ inter pũctum, & curuam peripheriam eſt, continetur rectangulum æquale quadrato, quod ſit ab incidente, tanget incidens circulum.



SVmatur extra circulũ ABC punctum D, ab eoq́ue in circulum cadant duæ rectæ DCA, DB; quarum DCA ſecet, DB incidat circulo. Sit autem quod AD, DC continetur rectangulum, ęquale quadrato quod ſit ex DB. Dico DB circulum tangere. [a] Ducatur enim DE circulum tangens, ſumptoq; centro F, iungantur FE, FB, FD, [b] & erit angulus FED rectus. Et quia DE tangit, DCA ſecat circulum, [c] erit quod AD, DC continetur æquale ei, quod ex DE; ponitur autem & quod AD, DC continetur, æquale ei quod ex DB; ergo quod ex DE æquale eſt ei, quod ex DB: æquales ſunt ergo DE, DB: [d] ſunt verò & FE, FB æquales: duæ igitur DE, EF duabus DB, BF

a *propoſ.* 17.3.
b *propoſ.* 18.3.
c *propoſ.* 36.3.
d *defin.* 15.1.



e propoſ. 8.1.

æquales ſunt; & baſis FD communis; e angulus ergo DEF æqualis eſt angulo DBF; eſt autem DEF rectus; ergo & DBF rectus eſt. Et BF, ſi producatur, eſt diametrus; f quæ autem diametro ad angulos rectos ducitur ab extremitate, circulum tangit. Idem demonſtrabitur pari modo ſi centrum ſit in AC. Si ergo extra circulũ, &c. quod oportuit demonſtrare.

f corol. prop. 16. 3.

Ap-

APPENDIX
In qua --
---Campi Geometrici, & Materia pro Quinto Tomo Ærarij ex lib. 3, & ad eum.

§I.

Ad conica, & è conicis plurima ad hunc lib. 3.

1 *IN Ap. 3, Progym. 2 ad finem ſcholij tertij poſt propoſ. 4, vbi oſtendimus miraculum illud geometricum de linea recta aſymptoto ad lineam hyperbolicam, monuimus, & indicauimus (quod, & hìc in loco facimus) ex demonſtratis à nobis prodire ab angulo contactus eam non coincidentiam duarum ſemper magis, ac magis inter ſe accedentium. Addimus hìc nunc, quemadmodum ex hoc lib. 3 non pauca in conicis egregia ab ipſomet Apollonio demonſtrantur, ſic & plura alia poſſe demonſtrari ex propoſitionibus huius lib. 3 pertinentia ad conicarum ſectionum admirandas proprietates.*

2 *Immò in conicis Apollonij in promptu iam ſunt plurimæ, ac mirificæ affectiones de ipſo circulo (qui quarta eſt è ſectionibus conicis, ac iure ſuo conicorum elementorum præcipua in hunc lib. 3 aduocat) demonſtratæ, quæ poſſint mirificè ditare hoc elementum geometricum tertium, & animos auditorum imbuere noua cognitione, extra hunc lib. 3, rerum iucundarum pertinentium ad circulum, de quo propriè, variè, & copioſè agitur in hoc 3 elem. Vide, ſcrutare, relege apud Apollonium, & huc appone ſaltem aliqua eorum, quæ nos fortaſſe aliquãdo in Quinti To. partem aliquam compingemus, ſi vires, & animus ad vtiliora moralia iam pridem*

anhelans, permiſerint. Interim ſaltem campum indicamus late patentem pro alijs ad Conica.

§II.

Ad Geometriam, & Stereometriam rotundorũ.

Sphæra, cylĩdrus è circulis æqualibus.

Conus ex inæqualibus

1 QVod in citati Scholij fine in Ap. cit. initio præcedentis § 1 *indicauimus, huc propriè ſpectat. Scilicet, quoniam præ cæteris corporibus geometricis conus, cylindrus, & ſphæra quaſi ex infinitis numero circulis compacta videntur, conus è circulis ſemper minoribus, cylindrus ex æqualibus perpendiculariter, & parallelis alijs ſuper alijs quaſi compoſitis, & ſphæra ex infinitis æqualibus circulis, quæ fiunt ab infinitis ſectionibus per centrum commune factis; propterea plurimæ proprietates ex demonſtratis de circulo in hoc lib. 3 poſſunt proportione demonſtrari, & eleuari à planis ad ſolida. Exempli gratia de ſphæra planum contingente in puncto, vt circulus lineã; ac plura alia, quæ habes apud Theodoſium in ſphæricis, ex quo Authore plura poteris aduocare ad hæc hic de circulo.*

i lib 3 mult. ad contemplat. ſphæræ, cylindri, coni.

Vt ĩ cõtactu rectæ lineæ ad circulũ ſic plani ad cylidri, vel coni dorſum, &c.

2 *Vt circulus lineam in puncto, ſic proportione coni, & cylindri dorſa contingunt planum in linea vnica, non in pluribus; & cætera, quæ de angulo contactus, applicata ſolidis; velut inter planum contingens, & dorſa cylindri, vel coni, non poſſe aliud planum contingens interponi. Et quemadmodum per idem punctum contactus ductis circulis maioribus, & maioribus, fit ſemper maior acceſſus ad lineam circulos maiores in communi puncto contingentem, nullus verò circulorum quantumuis maximorum continget lineam tangentem, præterquam in communi, ac vnico puncto contactus; ita & in cono ad planum contingens ſemper magis accedunt circuli imaginati maiores, ac maiores verſus baſim coni, nullus tamen continget planum extra vnicum punctum in linea plani contingentis animo conceptum. Vnde etiam in cit. Apiar. oſtendimus prodire acceſſum ſemper maiorem, nuſquam tamen contactum, hyperbolicæ cum recta linea. Hic abſtracta ibi applica figuris.*

3 *Sed*

3 *Sed quod miriſsimũ, & adhuc in geometrica philoſophia incognitum, & à Guldino noſtro nouum inventum eſt, eſt quòd circulus, ſeu potius circularis linea, clauis quædam ſcientifica, demonſtratiua, vniuerſaliſsima, & facillima eſt ad aperienda vel ipſis etiam Tyronibus (exempla aliquã habes in 1. Tom. huius Aerarij, & in hac 1. par. 2. To. ad propoſ. 14, 15, 23. &c. & hìc etiam habebis, & copioſiſsimè in Epilog. planim. & in ſec. 1, & 2 Breuiar. ſtereom. in hoc 3 To.) recondita omnia arcana circa infinitas numero, & formâ figuras planas, & ſolidas componendas, reſoluendas, dimetiendas, inter ſe comparandas, quæ vel hactenus apud antiquos claſsicos Authores genitæ, vel dè nouo in infinito numero gigni poſſunt ab animo geometricè abſtracto per circularem centri grauitatis in lineis, & planis reuolutionem. Itaq; ad hunc 3. lib. mirificè ampliandum, vbi elementa de circulo traduntur, pertinet iure ſuo quæcumq; per circularẽ lineã deſignatã à centro grauitatis deriuantur in planarum, & ſolidarum figurarum rotundarum iucundiſsimam, & reconditam cognitionem.*

Circulus e rotatione cẽtri grauitatis eſt menſura, proportio, &c. infinitorum numero planorũ, & ſolidorum.

Ac quoniam prædiximus cylindrum (miſſo cono, ſphærà, & alijs non abſimilibus propter breuitatem) videri quaſi conflatum ex æqualibus circulis horizonti parallelis, & perpendiculariter per centra eleuatis, lubet ne in vno, vel altero exemplo contemplari quemadmodum etiam fiat idem cylindrus à circulari linea centri grauitatis, & quemadmodum eadem indicet differentias proportionum (præterea, quæ ad 14, 15. 20, 23 prop. li. 6 prodidimus) inter circulum cylindri compoſitorem, & inter ipſum cylindrum, & ipſorum etiam differentias inter ſe cylindrorum? Quandoquidem in abſtractione geometrica, quaſi ab alto, præuideo te, mi Lector, (etiam diſtantem) annuentem, ades animo hic nunc. Res iucunditatem habet à facilitate geminatam.

4 *Circulus igitur perpendiculariter, & horizonti parallelus eleuatus cylindrum conflat; idem ac ſi dicas cum communi, & viſitata geometriâ: cylindri ſoliditas habetur ex ductu baſis in latus cylindri; ſiue, ex ductu areæ circularis in perpendicularem altitudinem. Eſto in ſeq. fig. altitudo perpendicularis AC, vel GB 4, & area circuli DCLFE inuenta iuxta vel viſitatũ modũ ab Archimede, vel iuxta vſum nouum centri grauitatis in ſemidiametro (vide nos in 1*

Circulus eleuatus producit cylindrũ.



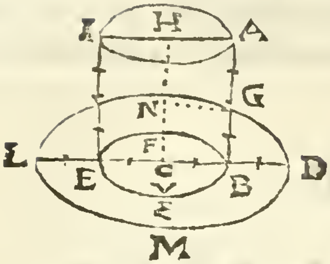
To.hu.Acrar.ad propoſ. 45. § 2, 3, 4, 5, & neglectis hic pro clariore exemplo minutijs, ſiue vna ſeptima diametri) eſto inquam circuli area 12, qualium eſt altitudo perpendicularis 4. ductis 4 in 12, quaſi eodem circulo per quatuor gradus, vel partes perpẽdicularis lineæ eleuato, fiunt 48 cubuli pro ſoliditate cylindri. Eandem prodit circularis linea deſignata à centro grauitatis in rectangulo AB. Nam ſi, iuxta definitionem 21 Vndecimi, in qua traditur generatio cylindri, fingas rectangulum AB gyrari circa latus GB in circuli orbem perfectum, eodem tempore centrum grauitatis H (quod eſt in cõmuni pũcto ſe decuſſantium ab angulis oppoſitis diametrorum) deſignat orbem peripheriæ minoris circularis, ex cuius ductu in rectangulum producitur ſoliditas eiuſdem cylindri FA. Triplicata HI diameter peripheriæ à centr. gr. (neglectà ſeptimà, vt in antecedentibus) ideſt ter 2 dat 6. Area rectanguli AB ex ductu alterius lateris 2 in alterum 4 dat 8. Ducta ergo via circularis centri grauitatis 6 in aream 8 producit 48 cubulos; eundem ſcilicet numerum ſoliditatis cylindricæ, qui & ex eleuato circulo in altitudinem. Vide & aliter, in § 22 num. 2 ad finem lib. 2.

Cylindrus etiam producitur è ductu rectanguli in circulũ deſignatũ à centro grauitatis, &c.

Superficies cylindrica è peripheriæ circularis eleuatione.

5 Iam ad ſuperficiem cylindricam ſine baſibus veniamus, ad quam conflandam eleuare licet (quemadmodum area circuli eleuata eſt ad ſoliditatem cylindri) circuli peripheriam perpendiculariter, & parallelos horizonti. &c. Videtur enim ſuperficies cylindrica conſtare ex peripherijs contiguis. &c. fit ergo, & cognoſcitur iuxta corollar. 2 in § 4 ad prop. 14 lib. 6. quantitas ſuperficiei cylindricæ ex ductu peripheriæ baſis in altitudinem lateris, ſeu altitudinem perpendicularem à centro gruitatis in medio peripheriæ, velut ex AC, vel GB 4 ductà in peripheriam CDEFL, hoc eſt in triplicatam (omiſsà ſeptimà) diametrum 4, hoc eſt in 12; & productum eſt 48 quadratulorum ſuperficiem cylindri AF conflantium.

Cum



Cum vſu etiam peripheriæ ſignatæ à centro grauitatis èadem quantitas ſuperficiei cylindricæ producitur. Nam finge circa axem HC rotari lineam altitudinis, ſeu latus AB, centrũ grauitatis eius lateris, id eſt medium punctum G, ſignat peripheriam æqual. periph. baſis FE & B, cuius quantitas, ex antedictis (ſine ſeptima) eſt 12. Latus ergo AB 4 ductum in 12 producit eundem, qui antea numerum 48 quadratulorum.

Superficies cylindrica è peripheria rotata ĩ altitudines. &c.

Finge baſis diametrum EB & trinæ; productam ad quantitatem duplam, ac ſit diameter LD 8, qualium eſt EB 4. ſemidiametri CD medium punctum ſit B, & fixo extremo C, rotetur in orbem alterum extremum D; ſignat CD aream circularem, quæ, per citata in To. 1 huius Aerarij, habetur ex ductu ſemidiametri CD 4 in peripheriam à centro grauitatis B ſignatam, hoc eſt in triplicatam (ſine ſeptima) EB 4. id eſt in 12, & fit ex 4 in 12 productum 48 quadratulorum, vt ante duabus vijs inuenta eſt eiuſdem quantitatis ſuperficies cylindrica.

Igitur cylindrica ſuperficies ſine baſibus eſt æqualis circulo, cuius ſemidiameter eſt æqualis tam altitudini, quàm diametro baſis cylindri; *hoc eſt (vniuerſaliori faciendæ propoſitioni) circuius ſemidiameter eſt media proportionalis inter latus, & diametrum baſis cylindri. Quæ congruunt cum Archim. propoſ. 13 de ſph. & cyl. aliter ab illo, hic à nobis paribus breuitate, facilitate, ac euidentià demonſtrata; præcipue cum vſu geometrico centri grauitatis, non ſolum rotato, vt Galdinus, ſed etiam perpendiculariter moto (in antecedentibus numeris marginalibus 4, & 5 huius § 2) ad procreationem rotundorum. Atq; in promptu habemus directæ noſtræ demõſtrationis (Archimedis quamplurimæ indirectæ ſunt) cauſam à principio per ſe noto in vſu geometrico centri grauitatis.* Si producentia ſunt æqualia, ergo & producta. *Vt hic quoniam ſuperficiem cylindricam ABEI producentia AB, BFE & ſunt æqualia ſuperficiem circularem DNLM producentibus CD, BFE & , ergo producta (nempè ſuperficies cylindrica, & circularis)*

Superficies cylindrica cui circuli ſit æqualis.

ſunt

ſunt æqualia. Vide plura, & vniuerſalia in hoc 3 To. in ſect. 2 Breuiarij Stereometrici, vbi de ſuperficierum circa ſolida dimenſionibus.

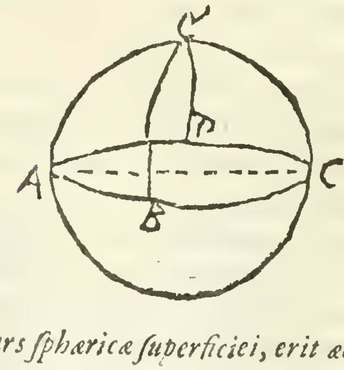
§ III.

COROLLARIA.

De quadraturis ſuperficierum cylindricæ, ſphæricæ, & triangulorum ſphæricorum. Opes ex Pappo ad hunc lib. 3. Noſtræ methodi commoda.

1 *QVadrato circ. LMDN, in ant. fig. qui eſt æqualis ſuperficiei cylindricæ ABEI, cōſequēter ſcitur cui quadrato ſit æqualis ea cylindrica ſuperficies: ſic & ſuperficies aliquæ curuæ ſuperficiebus planis æquantur.*

2 *Pari modo quoniam ex Archimede lib. 1. de ſphæ. & cylind. propoſ. 31 conſtat circuli in ſphæra maximi, velut ipſius ABCD quadruplā eſſe ſuperficiem eiuſdem ſphæræ (vide & noſtrum Villalp. pa. 2 de pond. lib. 1. ca. 4. prop. 4, & 5.) & conſequenter ſuperficies hemiſphærica, velut E◡ABCD, quæ incumbit peripheriæ ABCD, eſt dupla circuli ABCD; itē dimidia hemiſphæricæ, velut BAED, quæ incūbit dimidiæ peripheriæ, hoc eſt quarta pars ſphæricæ ſuperficiei, erit æqualis circulo eidem ABCD.*



3 *Ergo quarta pars hemiſphæricæ ſuperficiei, hoc eſt triāgulum ſphæricum, velut ◡ABE, erit æquale dimidio circuli, puta ipſi ABC, quo quadrato, quadratura etiam ſcitur trianguli ſphærici, tamquam corollarium ex Archimedis inuentis.* Cùm

Cùm enim ex magno illo Geometra iam à tot ſeculis pateat, iuxta antedicta, quadratio ſuperficiei ſphæricæ, patuit etiam conſequẽter iampridem quadratio partis alicuius ſuperficiei ſphæricæ, hoc eſt trianguli ſphærici, iuxta à nobis deducta, & indicat i. Mirifica tamen inuentio, & Archimedis ingenio digniſsima ea curuæ, ſphæricæq́; ſuperficiei cum plana æquatio, quemadmodum & cylindricæ, cui is occaſione aperuimus hanc Tyronibus iucundiſsimam in geometrica philoſophia cognitionem. Vide & in ſec. 2 Breuiar. Stereom. Prædicta intellige, poſt à circuli quadraturà.

Hactenus paucula hæc hic nunc in exemplum. Abſtineo calamũ vlterius volantem, ne à breuitate auolem

4 Seorſim moneo licere ditare animos Tyronum, & hunc tertiũ librũ, ſi huc aduoces pulcherrima plura, quæ, præter alios, ſunt in libris collectionum Mathematicarum Pappi Alexandrini. Ac licet in iis aliqua aliquando demonſtrentur ex libris, qui in vſitatà, & veteri methodo ſunt poſt librum tertium, tamen etiam huic incommodo iuit obuiam noſtra methodus, in qua ſextum, & quintum libros præmiſimus tertio, iuxta quam poſsit Tyro demonſtratiuam habere cognitionem affectionum penè omnium reconditarum in circulari figura, licet probentur aliquæ earum è 5. & 6 libris. Quod commodum ex noſtrà methodo etiam valet pro iis, quæ Apollonius habet de ſectione conicà circulari. Quid multis? Habes à noſtrà methodo præmiſſa quæcumq́; neceſſaria ſunt vel molitioni, vel cognitioni molitionum alienarum circa famoſiſsimam circuli quadraturam, quæ vix vagatur extra libros ex noſtra methodi præmiſſos huic libro tertio de circulo, figurà omnium miriſsima. Commoda noſtræ methodi.

Omiſſa ex prædictis copià, nunc, propter rationes indicatas in præfatione huius 3 Tomi ad Lectorem, breuitatem in hoc 3 elem. affectauimus, nec iuſtum tomum in id conſtauimus, quemadmodum fecimus ad 1, & 6 elementa geometrica.

ELEMENTVM QVINTVM

Ex noſtra Methodo,

QVARTVM EX VETERI.

---

§ I.

Multiplex, & ampliſſima vtilitas Geometrica, Militaris, Aſtronomica. &c. huius quarti Geometrici Elementi, & materia pro ſexto Ærarij Tomo indicantur. Noſtra methodus confirmatur.

AD hoc 4 elementum aliquando, ſi vita vacauerit, Sextum Tomum Ærarij confecturi, nunc interim, (dum hic aliqua ex ingentis materiæ apparatu appoſuimus) non omittimus, ſaltem pro publicis Mathematicarum ſcientiarum Lectoribus, indicare, atq; aperire copiam, qua ditent huius 4 elementi propoſitiones, eaſq; ſuis auditoribus ſpidas efficiant.

1 *Igitur huius 4 libri vtilitas ampliſſima est pro rebus Aſtronomicis, dum arcus circuli per inſcriptionem variarum figurarum variè diuiduntur pro chordis, & ſinubus, pro ſecantibus, & tangentibus. Quarum diuiſionum, & linearum vſus ampliſſimus eſt in operationibus Aſtronomicis. Pro quibus habes etiam in præfatione interpretis Lantzij ante primum Tomum huius Ærarij ab eo additas eſſe ad finem ſexti Elementi propoſitiones 9, & 19 è libro* *Ad Aſtronomica pro ſinubus.* *Pro circuli diuiſione.*

13 elem. quas habes apud nos locis opportunioribus appoſitas, in quibus e lateribus hexagoni, decagoni, pentagoni in circulo manat vtilitas ad tabulas ſinuum, &c. vt indicabimus in aliquibus Schol. ad prop. 15, & poſt 16.

Pro planetarum aſpectibus. Item, pro ſphæræ cæleſtis circulis aliquibus, & pro cæleſtium luminariū varijs aſpectibus, & pro tacita eorum harmonia faciunt ex hoc 4 li. inſcriptiones aliquarum figurarum in circulo, vt nos indicabimus ad huius 4 elem. propoſitiones aliquas.

Pro Architectura militari. 2 Deinde pro varijs artibus, in primis pro Architectura militari ampliſsimus eſt vſus hu. li. 4 dum variæ figuræ, in primis regulares, pro bellicis munimentis deſignantur ex vſibus propoſitionum hu. lib. 4.

3 Sed in primis pro vniuersà geometrià tam planorum, quàm ſolidorum aperitur ex hoc 4 libro campus latiſsimus. Nam præter paucas, quas Euclides docuit, licebit numero infinitas alias figuras regulares, & irregulares circulo inſcribere, & eaſdem circulo ipſi circumſcribere modis, quos indicabimus ad finem huius lib. 4, & & exemplis aliquibus explicabimus ad aliquas eiuſdem propoſitiones.

Mutua figurarū, etiā ſine circulo inſcriptio. 4 Pariter etiam, ſine circuli immixtione, patet latiſſimus campus omnium figurarum in omnibus alijs inſcribendarum, & circumſcribendarum. Habes & apud Pappum paradoxicas inſcriptiones figurarum maiorum in minoribus, & apud nos in Ap 3 progy. 9. Quæ paradaxa tomum ditare poterunt, præter alia ex eodē Pappo huc facientia. Exemplum aliquod habebis à nobis in ſeqq. propoſ. hu. li. 4.

5 Præterea ex hac planarum figurarum mutua inſcriptione, & circumſcriptione licebit gradum facere ad inſcriptiones ſolidarum, præſertim regularium figurarum in ſphærà, & ſphæræ circa eas, de quibus in libris poſterioribus elementaribus.

6 Adde & alium campum, ſcilicet in eodem circulo inſcribere, ſiue eodem circulo circumſcribere plures ſimul figuras. Exemplum vide apud Pappum li. 5 prop. 11, lib. 8 prop. 22. de circumferentijs vt diametri, vbi aliter in lib. 5 docet polygonorū in circulo, & circa circulum proportiones eſſe vt à centris rectæ, &c.

7 Adde prædictis & alium campum geometricum de compa-

ratio-

rationibus inter ſe inſcriptarum, & circumſcriptarum (non ſolum ſolidarum, de quibus in citatis poſterioribus libris elementaribus agitur) planarum figurarum in circulo, & circa circulum vt nos aliquo exemplo indicabimus ad aliquam propoſ. hu. lib. Pro exemplo vniuerſaliſſimo habes propoſ. 1 li. 12. Elem. vbi docetur ſimilia polygona circulo inſcripta eſſe inter ſe, vt à diametris quadrata. &c. Ex quibus prædictis, & hic indicatis patet ingens copia rerum vtilitate, dignitate, varietate iucundarum, & maximarum pro conflanda parte maximà ſexti Tomi.

8 *Patet præterea conſilium, & vtilitas noſtræ methodi non vno ex argumento pro ritè explicando hoc 4 libro poſt quintum, & ſextum, nam (vt apparebit in propoſitionibus hu. li. 4) inſcriptio figurarum petitur in primis ex baſibus triangulorum, quorum ad baſes anguli habeant proportiones varias ad angulum verticis, & angulorum proportiones pendent à 9 propoſ. li. 6. ex qua deducitur (vt habes in 1. parte 2. Tomi apud nos) ſectio arcuum circularium in lubitas proportiones pro angulis, quos arcus ſubtendunt.* *Vtilitas noſtræ methodi.*

Præterea vſus (vt patebit in 10 prop. hu. 4 li. & è noſtris demonſtrationibus, & è pro. 30. li. 6) diuiſionis in linea ſecũdum mediam, & extremam proportionem opportuniſſimè ad praxim cadit pro hoc lib. 4 poſt ſextum Euclidis, & poſt noſtra ad 30 lib. 6. Vide ad 10. huius. Denique creberrimus vſus eſt apud nos in hoc lib. 4. circini proportionum pro ſolutionibus penè omnium problematum hu. li. & aliorum etiam, & pro propoſitionibus laterum regularium polygonorum ad diametram circuli &c. Omnes ex eo inſtrumento in hoc libro operationes nullâ niterentur demonſtratione, ac ſolæ eſſent praxes, niſi iam in libro ſexto præceſſiſſent ex proportionibus ea, quibus eius inſtrumenti ſtructura, & ex eo operationes demonſtratæ fuerunt. Quapropter non ſolum benè, ſed etiam pro neceſſitate perfectæ doctrinæ præmittendi fuerunt ante hunc quartum libri quintus, & ſextus, è quorũ definitionibus, & propoſitionibus planè, & ſcientificè intelliguntur, & demonſtrantur ea, quæ in hoc 4. elemento docentur.

Præuidit hoc, & pro me mirificè pronunciauit vir acutus, & doctus in geometricis Peletarius ad propoſ. 10 huius, dum ſcribit. In ſumma hæc omnia ex proportionibus depẽdent, & vt noſtrum *Doctorum ſententia de præmittendis li. 5, & 6 huic 4.*

de hac tota re iudicium ingenuè explicemus, huic tractationi proportiones erant præmittendæ. *Quod nos fecimus.*

Li. 5 totus theorematicus; hic 4 totus, problematicus. Reliqui mixti.

9 *Totum hunc lib.4.(etiam ad infinitarum aliarum figurarum deſcriptiones extenſum, ſi lubeat) nos breuiſſimo, & faciliſsimo compendio geometricè, & organicè demonſtrato expediemus, vt videbis poſt vltimam propoſitionem.. Quemadmodum liber quintus conſtat ſolum è theorematibus, ſic hic quartus totus ſolum è problematibus conſtatur. Reliqui libri elementaris* 1, 2, 3, 6 *partim theoremata, partim problemata demonſtrant.*

Elementum Quartum.

DEFINITIONES.

1 Figura rectilinea figuræ rectilineæ inſcribi dicitur, cum ſinguli inſcriptæ anguli ſingula latera eius, cui inſcribitur, tangunt.

2 Similiter figura figuræ circumſcribi dicitur, cum ſingula latera circumſcriptæ ſingulos angulos eius, cui circumſcribitur, tangunt.

3 Figura rectilinea circulo inſcribi dicitur, cum ſinguli anguli inſcriptæ tangunt peripheriam circuli. *Ita prop.2 triangulum ABC, ſexta quadratum ABCD circulo inſcriptum vides.*

4 Figura rectilinea circulo circumſcribi dicitur, cum ſingula latera circumſcriptæ circuli peripheriam tangunt. *Ita prop.4 triangulum ABC; octaua quadratum ABCD circulo circumſcriptum cernis.*

5 Cir-

5 Circulus ſimiliter figuræ inſcribi dicitur, cum circuli peripheria ſingula latera eius, cui inſcribitur, tangit. *Ita prop. 4. circulum EFG triangulo ABC, octaua circulum EFHK quadrato ABCD inſcriptum vides.*

6 Circulus figuræ circumſcribi dicitur, cum peripheriæ circuli ſingulos angulos eius, cui circumſcribitur, tangit. *Ita prop. 2 circulum ABC triangulo, ſexta circulum ABCD quadrato circumſcriptum vides.*

7 Recta linea in circulo aptari dicitur, cum eius termini in circuli peripheria fuerint.

§ II.

SCHOLIA.

I.

INſcriptionis, & circumſcriptionis figurarum diuerſam formã à præſcripta hic ab Euclide vide pro paradoxo in Scholio poſt propoſ. 2. in progym. 9. Apiarij tertij, vbi de cilogoniarum eteroclitarum inſcriptionibus.

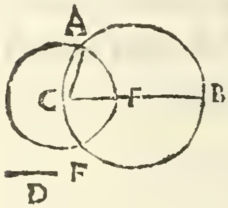
II.

Continet hic liber tantùm quinque genera figurarum in circulo inſcriptarum, & ipſi circulo circumſcriptarum; triangulum, quadratum, pentangulum, ſexangulum, quindecangulum, regularia; propoſitiones tamen de inſcriptione, vel circumſcriptione triangulorum, complectuntur etiam triangula irregularia. De ſexangulo, & quindecangulo non eſt ſeries plurium propoſitionum, ſed vnica tantum de altero, vnica & de altero propoſitio. Cauſas indicabimus ad eas propoſitiones.

Pro-

Propoſ. I. Probl. I.

In dato circulo datæ rectæ lineæ, quæ diametro circuli maior non ſit, æqualem rectam lineam aptare.

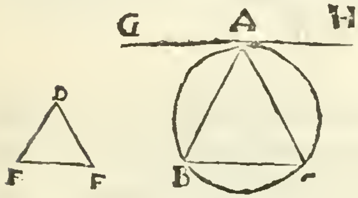


SIt datus circulus ABC, data recta, quæ circuli diametro maior non ſit, D. Oporteat autem circulo ABC rectam, rectæ D æqualem, aptare. Ducatur diametrus circuli BC. Si ergo BC æqualis eſt ipſi D, factum eſt, quod iubebatur. Circulo enim ABC aptata eſt BC æqualis rectæ datæ. Si autem BC
a *propoſ.* 3.1. maior eſt, quàm D, *a* fiat CE æqualis ipſi D; & centro C, interuallo CE deſcribatur circulus EAF, ducaturq́; CA. Quia ergo C centrum eſt
b *defin.* 15.1. circuli AEF, *b* erit CA æqualis CE: ſed ipſi D æqualis eſt CE: erit ergo & D æqualis ipſi AC. Dato ergo circulo ABC datæ rectæ D, non maiori circuli diametro, æqualis CA aptata eſt. Quod oportuit facere.

Pro-

Propoſ. II. Probl. II.

Dato circulo triangulum dato triangulo æquiangulum inſcribere.



SIt circulus datus ABC, triangulũ datum DEF; oporteatque circulo ABC triãgulum, triangulo DEF æquiangulum, inſcribere. Ducatur GAH tangens circulum ABC in A; [a] conſtituaturque ad A rectæ GAH angulus HAC æqualis angulo DEF, & GAB æqualis DFE; ducaturque BC. Quia ergo circulum ABC tangit recta GAH, & à tactu ducta eſt AC, [b] erit angulus HAC æqualis angulo ABC in alterna portione: ſed HAC eſt æqualis DEF angulo; erit ergo & ABC æqualis eidem DEF. Eadem ratione erit angulus ACB angulo DFE æqualis, [c] reliquus ergo BAC æqualis erit reliquo EDF. Eſt ergo triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum, & inſcriptum eſt circulo ABC. Dato ergo circulo, &c. Quod oportuit facere.

a propoſ. 23.1.

b propoſ. 32.3.

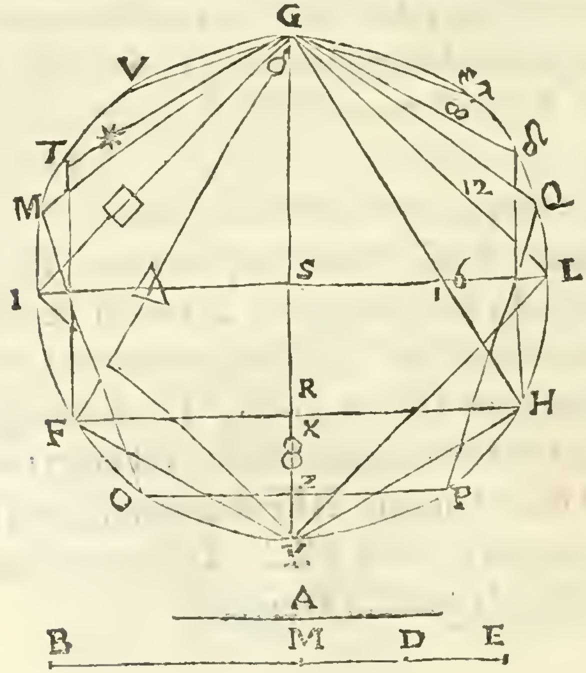
c propoſ. 32.1.

§ I.

PORISMA.

Data ſemidiametro inuenire in circino proportionum latus trianguli æquilateri circulo inſcribendi.

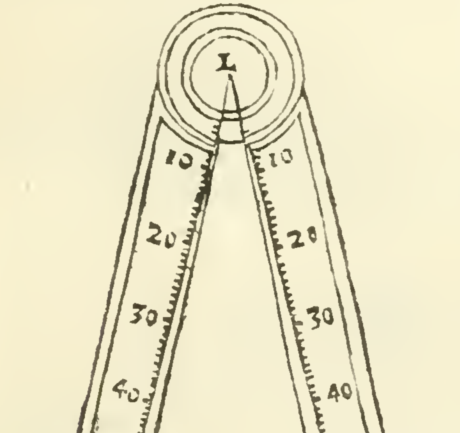
PRoblema proponimus etiam non dato circulo, cui ſit inſcribendum triangulum æquilaterum, ſed datâ ſemidiametro, ſine circulo ex ea deſcribendo, vt Tyronibus appareat inopinatior praxis, quæ tamen mirâ facilitate abſoluitur ex vſu circini proportionum.



Data ſit A pro ſemidiametro, proponitur inuentio (quæ erit facillima)

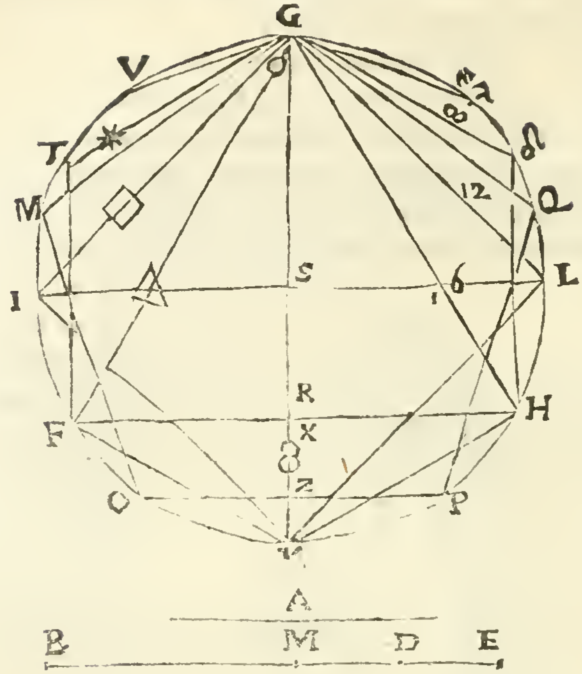
cillima) alterius lineæ, quæ ſit latus æquilateri trianguli inſcribendi circulo, cuius ſemidiameter eſt A.

Quoniam verò vt monuimus in 1, & 2 to. ad propoſitiones 9, 10, 23, &c. latera figurarum regularium ſuam quantitatem dimenſam habent à quantitate, ſeu numero graduum ipſius arcûs circularis, quem ſubtendunt; & nomina ipſa figurarum indicant peripheriæ partes, quas latera figurarum ſubtendunt, verbi gratia, triangulum æquilaterum nomine trium indicat tertiam partem circularis peripheriæ ab vno æquilateri latere ſubtendi; ſi gradus totius peripheriæ 360 diuidantur per 3, erit quotiens 120 graduum numerus, cui ſubtũditur latus æquilateri trianguli.



Igitur accipe circini proportionum eam faciem, in quã traducti ſunt gradus 90 quadrantis. Datam lineam, ſiue ſemidiametrum A interpone inter numeros 60, & 60, eoq; circini proportionum immoto interuallo, accipe interuallum inter 90, & 90, illique adde interuallum acceptũ inter 30, & 30. Scilicet ſemidiam. rectæ A deſcribe circulum

 GIKL,



GIKL, & interuallo inter 30, & 30 fac vltra quadratum ſectionem ex L in H; & BE ſecta æqualis chordæ ſub arcu GLH graduũ 120 erit latus trianguli æquilateri GFH in circulo deſcripti, ſubtendens ſingulis lateribus tertiam partem peripheriæ. Demonſtratio patet ex ipſa conſtructione, & operatione.

SCHOLION I.

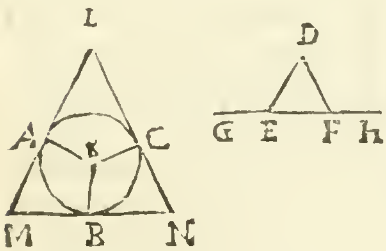
ALiter Geometricè, ac facillime inuenire latus trianguli æquilateri in circulo, vide in Schol. 3 ad propoſ. 15 huius inferius. Ea ibi operatio, & demonſtratio erunt & confirmatoriæ poriſmatis hic antecedentis.

SCHOLION II.

Vide præterea apud nos modum deſcribendi facillimè in circulo æquilaterum è prima propoſ. li. pri. Elem. in Ap. 1. Præ. lib. 3. Schol. poſt propoſ. 1.

Propoſ. III. Probl. III.

Circa datum circulum dato triangulo æquiangulum triangulum deſcribere.



Esto datus circulus ABC, datũ triangulum DEF, oporteatque circa ABC circulũ triangulo DEF ęquiangulum triãgulum deſcribere. Producatur vtrinque EF in G, & H, ſumaturque centrum K circuli ABC, & ducatur recta KB vt libet; & *a* conſtituatur ad K rectæ KB angulo DEG ęqualis BKA; angulo verò DFH æqualis BKC, perque puncta A, B, C *b* ducantur tangentes circulum LAM, MBN, NCL. Et quia LM, MN, NL tãgunt circulum in A, B, C; & à centro K ad puncta A, B, C ductæ ſunt KA. KB, KC; *c* recti igitur erunt anguli ad A, B, C puncta. Et quia qua-

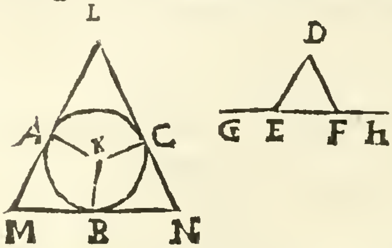
a propoſ. 23.1.

b propoſ. 17.3.

c propoſ. 18.3.

drilateri A M B K quatuor anguli æquales ſunt quatuor rectis ;* diuiditur enim quadrilaterum AMKB in duo triangula KAM, KBM,quorum anguli KAM,KBM recti ſunt; reliqui ergo AK-

** Si intelligatur ducta linea KM.*



B, AMB duobus rectis æquales erunt. [a]Sunt verò & DEG , DEF duobus rectis æquales: ergo AKB,AMB anguli æquales ſunt angulis DEG, DEF. quorum AKB , DEG æquales cùm ſint, erunt & reliqui AMB, DEF æquales. Pari modo demonſtrabitur angulum LNM angulo DFE æqualem eſſe: reliquus ergo MLN reliquo EDF æqualis erit: æquiangulum ergo eſt triangulum LMN triãgulo DEF, & deſcriptum eſt circa circulum ABC. Ergo circa datum circulum,&c.Quod oportuit facere.

d *propoſ.* 13.1.

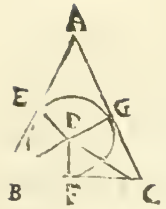
Propoſ. IV. Probl. IV.

In dato triangulo circulum deſcribere.

SIt datum triangulum ABC,in quo oporteat circulũ deſcribere. [a]Biſecentur anguli ABC, BCA rectis BD, CD,quæ in D puncto con-

a *propoſ.* 9.1.

cur-



currant, *b* ducanturque ex D ad re-ctas AB, BC, CA perpendiculares DE, DF, DG. Et quia anguli AB-D, CBD æquales ſunt (eſt enim A-BC b ſectus) anguli verò BED, B-FD recti, habebunt duo triangula EBD, DBF duos angulos duobus angulis, & vnum latus vni lateri æquale, nempe commune BD, *c* habebunt ergo & reliqua latera reliquis æqualia; vnde DE, DF æquales erunt. Eandem ob cauſam DG, DF æquales erunt. Circulus ergo centro D, interuallo vno punctorum E, F, G deſcriptus, tranſibit etiam, per alia puncta, tangetque rectas AB, BC, CA, quod anguli ad E, F, G recti ſint. Si enim ipſas ſecaret, caderet, quæ ab extremitate diametri ad angulos rectos ducitur, intra circulum; *d* quod eſt abſurdum. Non ergo circulus centro D, interuallo vna harum DE, DF, DG deſcriptus, ſecat rectas AB, BC; CA; ergo eas tanget; eſtque circulus in triangulo A-BC deſcriptus. In dato ergo triangulo, &c. Quod oportuit facere.

b *propo* 12.1.

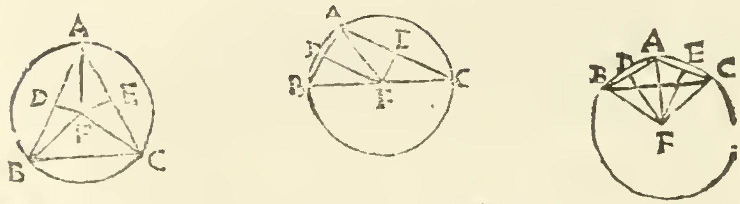
c *propoſ.* 16.1.

d *propoſ.* 16.3.

Pro-

Propoſitio V. Probl. V.

Circa datum triangulum circulum deſcribere.



Esto datum triangulum ABC, circa quod oporteat circulum deſcribere. biſecētur AB, AC in D, & E; atque à punctis D, E ducantur ad AB, AC ad angulos rectos DF, EF, quæ concurrent aut in triangulo ABC, aut in recta BC, aut extra triangulum. Concurrant primò intra triangulum in F, ducanturq; BF, FC, FA. Et quia AD, DB æquales ſunt, communis & ad angulos rectos DF, [a] erunt & baſes AF, FB æquales. Similiter demonſtrabimus CF, AF æquales eſſe: quare & FB, FC æquales erunt. Tres ergo FA, FB, FC æquales ſunt. Circulus ergo centro F, interuallo vna ipſarum FA, FB, FC deſcriptus, tranſibit & per reliqua puncta, eritq; circulus circa ABC triangulum deſcriptus. Concurrant iam DF, EF in recta BC in F, vt in ſecūda deſcriptione, iungaturque AF. Similiter demon-

[a] prop. 4. 1.

monſtrabimus punctum F centrum eſſe circuli circa triangulum ABC deſcripti. Concurrant demum DF, EF extra triangulum ABC in F, vt tertia habet deſcriptio, & iungantur AF, FB, FC. Cùmque AD, DB æquales ſint, communis, & ad angulos rectos DF, [b] erunt & baſes AF, BF æquales. Similiter demonſtrabimus & CF ipſi FA æqualem eſſe: quare & BF æqualis erit FC. Rurſus ergo circulus centro F, interuallo vnâ harum FA, FB, FC deſcriptus, tranſibit etiam per reliqua puncta, eſtque circa ABC triangulũ deſcriptus. Quod facere oportuit. a prop. 4. 1.

Corollarium.

Vnde perſpicuum eſt, quando centrum circuli in triangulum cadit, angulum BAC in maiore portione ſemicirculo exiſtentem recto minorem eſſe. quando verò centrum in BC cadit, in ſemicirculo exiſtentem, rectum: quando denique centrum extra BC cadit, in minore portione ſemicirculo exiſtentem, maiorem recto. Vnde quando datus angulus minor eſt recto, intra triangulum cadunt rectæ DF, EF; quando rectus, in BC; quando maior recto, extra BC; quod oportuit demonſtrare.

Scho-

SCHOLIA.

I.

G*Riembergerus in ſuo Euclide* . Hoc problema 5 re ipſa non differt à prop. 25 tertij, vbi docuimus per tria puncta data deſcribere circulum. Perpendiculares enim, quæ ſecant quælibet duo latera bifariam, neceſſario cōueniunt in quæſito centro.

II.

Huc reuoca quæ indicauimus ad 25 tertij, praxes, inſtrumenta. &c. Ex quibus condiant auditoribus Euclidem Geometrici Doctores.

§ II.

E circino proportionum ſoluere propoſ. 5 Eucl.

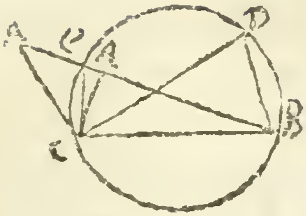
H*Oc problema 5 quaſi conuerſum ſecundi problematis conuerſo modo operandi ſoluendum eſt, eritq; facillimum ſi in circinū translatus fuerit arcus grad. 120. &c. Inter quos interponatur latus dati æquilateri, & accipiatur interuallum inter 60, & 60, quod erit ſemidiameter circuli circumſcribendi dato æquilatero.*

§ III.

PROBLEMA.

Circa duo triangula communem baſim habentia, & angulos ad vertices æquales circulum deſcribere.

Exem-



EXemplum hic aliquod accipe dilatandi librum hunc 4 non ad vnam ſolum, ſed ad plures, vt hic, duas figuras eodem circulo circumſcribendas.

Sint duo triangula EBC, CDB habentia cõmunem baſim CB, & ad vertices E, D angulos æquales. Circulus deſcriptus ex 25 pro. tertij per puncta, ſiue apices triangulorum C, B ad baſim, & per alterum punctum D ad verticem, ibit & per alterum angulum E, ac proinde deſcripſeris circa duo triangula, &c. circulum. Nam ex 21 tertij, anguli E, D, æquales dati, ſunt in eodem ſegmento AEDB eiuſdem circuli.

Ad abundantiã addo: Si neges circulum tranſire per E, ſed vel citra, vel vltra per A, iungantur geminæ CA. Quoniam ergo tranſit circulus per A, erunt in eodem ſegmento anguli D, A æquales. eſt autem, per conſtructionem, vel ſuppoſitionem, angulus E æqualis ipſi D, ergo E, & A erunt æquales, externus A citra E æqualis interno E, vel externus E interno A vltra E in triangulis CEA, contra 16 pri.

Propoſ. VI. Probl. VI.

In dato circulo quadratum deſcribere.



SIt in dato circulo A B C D quadratum deſcribendum. a ducãtur diametri AC, BD ad angulos rectos, iunganturq; AB, BC, CD, DA. Cũ ergo BE, ED ſint æquales, quippe ex centro E, cõmunis & ad angulos rectos EA,

a propoſ. 11 1.

b prop.4. 1. erit [b] & baſis AB baſi AD æqualis. Eadē ratione vtraq; ipſarū BC, CD, vtriq; AB, AD eſt æqualis. Eſt ergo quadrilaterum ABCD æquilaterum. Dico quod & æquiangulum. Cum recta BD diametrus ſit circuli ABCD, [c] erit BAD ſemicirculus; rectus eſt ergo angulus BAD. Ob eandem cauſam quilibet angulorum ABC, BCD, CDA rectus eſt; rectangulum ergo eſt quadrilaterum ABCD. Oſtenſum eſt autem & æquilaterum; [d] quadratum ergo eſt, & eſt circulo inſcriptum. In dato ergo circulo, &c. Quod oportuit facere.



c propoſ. 31.3.

d defin. 27.1.

§ I.

PORISMA.

Data ſemidiametro, inuenire in circino proportionum latus quadrati circulo inſcribendi.

S*Cilicet, interuallo ſemidiametri interpoſito inter 60, & 60, in circino proportionum, & accepto interuallo inter 90, & 90, quod eſt latus quadrati inſcribendi circulo, &c.*

§ 2.

§ II.

THEOREMA.

Rectangulum comprehenſum ſub diametris quadrilaterorum circulo inſcriptorum ęquale eſt duobus rectangulis ſimul, quæ ſub lateribus oppoſitis continentur.

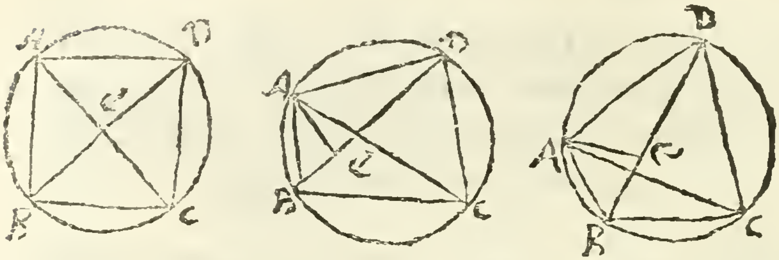
Quemadmodum enim (in fig. probl. 6 hu.) quadratum comprehenſum ſub diametrus AC, BD quadrati inſcripti, eſt æquale rectangulis, ſiue quadratis duobus ſimul ſumptis, quæ ſub oppoſitis lateribus AB, DC, & ſub AD, BC continentur, ex 47 lib. 1; ſic hoc theorema vniuerſale eſt etiam ad quæcumque rectangula circulo inſcripta; eſtq; inſignis proprietas inſcriptorum in circulo rectangulorum. Quæ propoſitio cùm iure ſuo ad hũc locum pertineat, & ipſa etiam nitatur aliquibus propoſitionibus ſexti elem. non poterat tibi, amice Lector, dari ſuo in loco, niſi poſt ſextũ, ex noſtra methodo, quartus hic liber ſequeretur.

Igitur ex collectis à Clauio, vbi poſt Theodoſij ſphærica de ſinubus geometricè philoſophatur, habes propoſitum hic à nobis theorema.



Verba demonſtrationis accipe. In circulo ABCD ſit quadrilaterum ABCD, cuius diametri AC, BD: dico rectangulum

ſub AC,BD comprehenſum æquale eſſe rectangnlis ſimul ſub AD, BC, & ſub AB, DC contentis. Fiat angulo DAC æqualis angulus BAE, cadetq; recta AE vel in ipſam rectam AC, vel inter AC rectam, & punctum B; vel deniq; inter rectam



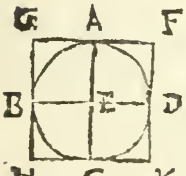
AC, & punctum D: atq; erit in primo caſu angulus BAC angulo DAE, & in ſecũdo caſu totus angulus BAC toti angulo DAE propter communem angulum EAC additum; & in tertio caſu reliquus angulus BAC reliquo angulo DAE, ob communem angulum EAC ablatum, æqualis. Et quoniam angulus quoque ACB angulo ADB æqualis eſt, erit reliquus etiam angulus ABC, in triangulo ABC, reliquo angulo AED in triangulo AED æqualis. Erit igitur vt AC ad CB, ita AD ad DE. Quare rectangulum ſub AC, DE æquale eſt rectangulo ſub CB, AD. Rurſus quia angulus BAC angulo DAC, ex conſtructione, æqualis eſt, & angulus ABD angulo ACD, erit & reliquus angulus AEB, in triangulo AEB, reliquo angulo ADC, in triangulo ADC, æqualis. Erit igitur vt AC ad CD, ita AB ad BE. Quare rectangulum ſub AC, BE æquale eſt rectangulo ſub CD, AB. Quoniam igitur rectangulum ſub AC, DE rectangulo ſub CB, AD oſtenſum eſt æquale, & rectangulum ſub AC, DE rectangulo ſub CD, AB: ſunt autem rectangula ſub AC, DE, & ſub AC, BE ſimul rectangulo ſub AC, BD æqualia; erit rectangulum ſub AC, BD rectangulo ſub BC, AD, & ſub CD, AB contentis æquale. Si ergo in circulo quadrilaterum deſcribatur, &c. Quod erat demonſtrandum.

21 tertij. 32 primi. 4 ſexti. 16 ſexti. 21 tertij. 4 ſexti. 16 ſexti. 1 ſexti.

Pro-

Propoſ. VII. Probl. VII.

Circa datum circulum quadratum deſcribere.



SIt circa datum circulum ABCD quadratum deſcribendum. Ducantur diametri AC, BD ad angulos rectos, & per puncta A, B, C, D ducantur tangentes circulum FG, GH, HK, KF. Cùm ergo FG tangat circulum, & à centro E ad tactum A ducta ſit EA, [a] erunt anguli ad A recti. Eàdem de cauſa erunt & anguli ad B, C, D recti, cùmque anguli AEB, EBG recti ſint, [b] erunt GH, AC parallelæ. Eàdem de cauſa erunt AC, FK parallelæ. Similiter demonſtrabimus quòd GF, HK ſint ipſi BED parallelæ. Sunt ergo GK, GC, AK, FB, BK parallelogramma; [c] vnde æqualis eſt GF ipſi HK, & GH ipſi FK. [d] Et quia AC, BD æquales ſunt, atque AC vtrique GH, FK; & BD vtrique GF, HK eſt æqualis; ergo vtraque GH, FK vtrique GF, HK eſt æqualis. Eſt igitur FGHK quadrilaterum æquilaterum. Dico quod & rectangulum Cùm enim GBEA ſit parallelogrammum, ſitq; angulus AEB rectus, [e] erit & AGB rectus. Similiter demonſtrabimus quòd anguli ad H, K F,

a propoſ. 18.3.

b propoſ. 28.1.

c propoſ. 34.1.

d defin. 15.1.

e propoſ. 34.1.

K, F recti ſint: eſt ergo FGHK rectangulũ quadrilaterum; oſtenſum eſt autem, & æquilaterũ, f quadratum ergo eſt, & eſt circa ABCD circulum deſcriptum. Ergo circa datum, &c. Quod oportuit facere.

f definit. 27.1.

Propoſitio VIII. Probl. VIII.

In dato quadrato circulum deſcribere.



a propoſ. 10.1.
b propoſ. 31.1.

Sit in dato quadrato ABCD circulus deſcribendus. [a] Biſecentur AB, AD in F, E; [b] ac per E quidem ducatur alterutri AB, CD parallela EH per F verò alterutri AD, HC parallela FE. Sunt ergo AK, KB, AH, HD, AG, GC, BG, GD parallelogramma, [c] ideoq; latera oppoſita æqualia. Et quia AD, AB æquales ſunt, erunt & ſemiſſes earum AE, AF æquales: [d] quare & oppoſitæ illis FG, GE æquales erunt. Similiter demonſtrabimus vtramque GH, GK vtrique FG, GE æqualem eſſe. Sunt igitur quatuor GE, GF, GH, GK æquales. Circulus igitur centro G, interuallo vna harum GE, GF, GH, GK deſcriptus, tranſibit & per reliqua puncta: ſed & tangit rectas AB, BC, CD, DA, quod

c propoſ. 34.1.
d propoſ. 34.1.

A, quod anguli ad E, F, H, K, recti ſint. Si enim circulus ipſas AB, BC, CD, DA ſecaret, caderet quæ ab extremitate diametri ad angulos rectos ducitur, in circulum;[e] quod eſt abſurdum. Non ergo circulus cẽtro G, & interuallo vna harum GE, GF, GH, GK deſcriptus ſecat rectas AB, BC, CD, DA: tangit ergo: & eſt quadrato ABCD inſcriptus. In dato ergo quadrato, &c. Quod oportuit facere.

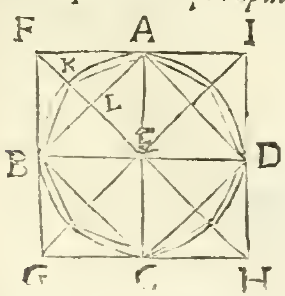
e propoſ 16.3.

§ I.

THEOREMA.

Quadratum circa circulum eſt duplum quadrati intra circulum.

Accipe hic vnum, ac alterum ſaltem exemplum dilatandi hunc lib. 4 ad comparationes, & proportiones figurarũ mutuo inter ſe inſcriptarum, vel circumſcriptarum, velut hic poſt exempla apud Euclidem quadrati, & in circulo, & circa circulum.



Vtrumq; ſimul ſint, intra circulum ABCD minus, circa circulum quadratum maius FGHI, quod dico eſſe duplum inſcripti. Nam quadrati inſcripti ABCD diameter BD, in rectangulo triangulo BAD, oppoſita recto angulo A, dat quadratum æquale duobus quadratis ex BA, AD, per 47. pri. ideſt quadratum ex BD (ideſt ipſum FGHI) eſt duplum quadrati ex vno laterum, velut ex AB, ideſt eſt ipſius quadrati ABCD duplum.

SCHO-

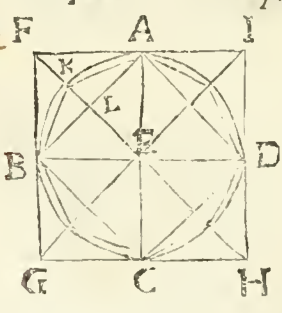
SCHOLION.

PRæcedens theorema ſupponitur ab Euclide in initio propoſ. 2 lib. 13, & à Commandino ad eam propoſ. & à Peletario hìc diuerſis modis demonſtratur. Quod autem mox ſequitur, eſt ex Orontio apud Clauium in Geom. prac.

§ II.

THEOREMA.

QVoniam octogonum regulare in circulo inſcribitur facilè per bifariationem laterum inſcripti quadrati, accipe pulcherrimum Theorema, in quo ipſum Octogonum loco medium inter quadrata circulo inſcriptum, & circumſcriptum, eſt etiam quãtitate mediũ proport. inter vtrũq;. Sit circulus ABCD, cuius centrum E; duę diametri AC, BD, ſecantes ſe ſe in E ad angulos rectos. Iunctis ergo rectis AB, BC, CD, DA, erit quadratum circulo inſcriptum ABCD, vt ex demonſtratione propoſ. 6 lib. 4 Eucl. conſtat. Ducantur quoque per A, B, C, D, perpendiculares ad diametros coeuntes in F, G, H, I, eritque quadratum circulo circumſcriptum FGHI, vt patet ex demonſtratione propoſ. 7 lib. 4 Euclid.



a 27. tertij. Ductis autem diametris FH, GI, *a* ſecabuntur quadrantes AB, BC, CD, DA bifariam, propterea quòd anguli in centro
b Schol. 34 pri. ſunt omnes æquales, *b* nimirum ſemirecti: *c* ac proinde & latera quadrati inſcripti diuiſa erunt bifariam, & ad angulos re-
c Schol. 27. tertij. ctos. Et ſi iungantur rectæ, AK, KB, &c. deſcriptum erit octogonum intra circulum. Dico ita eſſe quadratum exterius ad octogonum, vt octogonum ad quadratum interius. Quoniam

enim

enim triangula AEF, EAL æquiangula ſunt, quod rectos habeāt angulos, & ſemirectos: d erit EF ad FA, hoc eſt, ad EK, (eſt namque EK, ipſi EA, hoc eſt, ipſi AF, æqualis) vt EA, hoc eſt, vt EK, ad AL, e hoc eſt, ad EL, eo quod AL, EL, ſint æquales, propter angulos ſemirectos A, E, in triangulo AEL. Sunt ergo tres rectæ EF, EK, EL, continuè proportionales. Igitur & triangula AEF, AEK, AEL, continue erunt proportionalia: f cum baſibus EF; EK, EL, ſint proportionalia; g Ac proinde & eorum octupla continue erunt proportionalia, quadratum videlicet FGHI, octogonum AKBCDA, & quadratum ABCD; quippe cum prædicta triangula ſint harum figurarum octauæ partes, vt liquet. Octogonum igitur medio loco proportionale eſt inter quadrata FGHI, ABCD, quod demonſtrandum erat.

d 4 ſexti.
e 6 pri.
f 1 ſexti.
g 15 quinti.

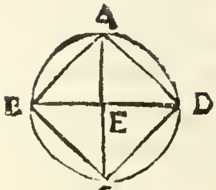
SCHOLION.

Pro noſtra Methodo.

Vides noſtræ methodi beneficio præcedens pulcherrimum theorema rite hic ſuo in loco collocatum, ac demonſtratum poſt librum ſextum, cuius duabus propoſitionibus eget demonſtratio, ſcilicet 1, & 4, in libro verò ſexto minus ſibi aptum locum extra hic proprium occupaſſet. Facit & noſtra methodus pro Theoremate poſito ad anteced. prop. 6, in § 2. *&c.*

Propoſitio IX. Probl. IX.

Circa datum quadratum circulum deſcribere.



SIt circa datum quadratū AB-CD circulus deſcribendus: ductæ rectæ AC, BD ſe in E ſecent. Et quia DA, AB æquales ſunt, AC communis, erunt duæ DA, AC duabus BA, AC æquales: ſed & baſes

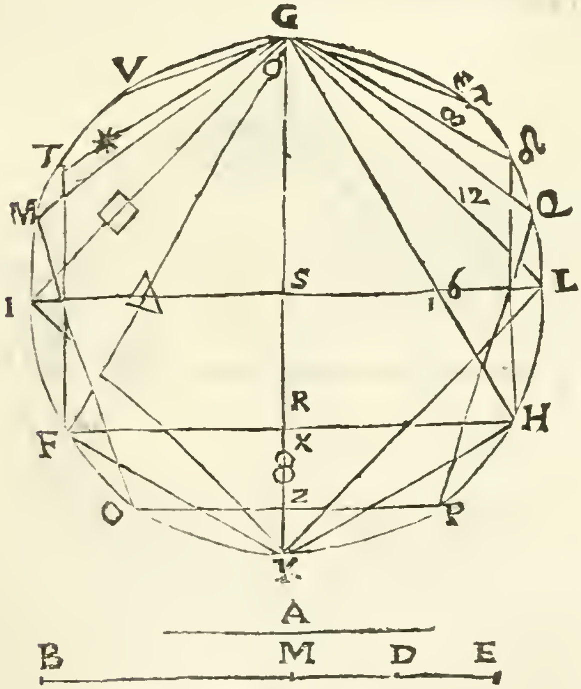
a propoſ. 11.2. DC, BC [a] æquales ſunt: [b] erunt ergo & anguli

b propoſ. 3.4. DAC, BAC æquales: angulus ergo DAB rectà AC biſecatur. Similiter demonſtrabimus quē-libet horum ABC, BCD, CDA rectis AC, DB biſecari. Et cum anguli DAB, ABC ęquales ſint,

c ax. 7. ſintq; EAB, EBA eorum dimidij, [c] erunt & ipſi æquales: quare & latera EA, EB æqualia erunt. Similiter demonſtrabimus vtramque rectarum EC, ED vtrique EA, EB æqualem eſſe. Quatuor ergo EA, EB, EC, ED æquales ſunt. Igitur circulus centro E, interuallo vna harum EA, EB deſcriptus, tranſibit & per reliqua puncta. Eſt igitur circa ABCD quadratum deſcriptum. Ergo circa datum, &c. Quod oportuit facere.

§ I.
PORISMA.

Dato latere quadrati inuenire in circino proportionum ſemidiametrum circuli quadrato circumſcribendi.



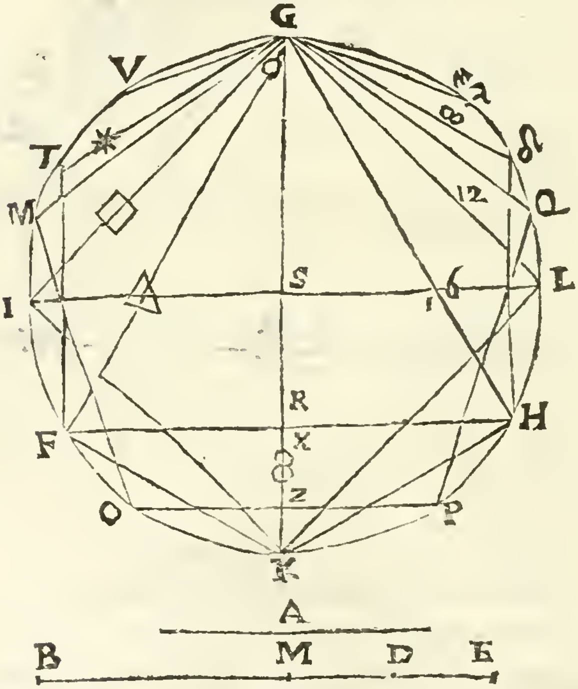
ESto datum quadrati latus BD, quod interponatur inter 90, & 90 circini proportionum, & , immotâ diductione circini, accipiatur interuallum inter 60, & 60, puta ipſum A, cuius interuallo ex D, & B fiant mutuæ ſectiones, quæ dabunt centrum, ex quo ductus circulus ibit per extrema B, D; & rectam BD in eo circulo quater applicatã, idest quadratum IGLKI circumſcribet. Vt

90 d 60, ſic latus BD inter 90. & 90 ad ſemidiametrum inter 60, & 60, &c. Cætera patent ex dem. propoſ. 9.

§II.

COROLLARIVM.

Super data recta quadratum excitare ope circini proportionum facilius, quàm per 46 lib. 1.



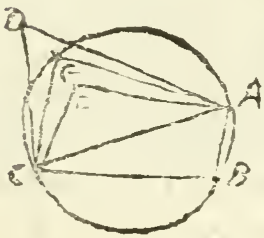
EAdem opera, qua proximè antecedens poriſma ſolutũ eſt, etiam operatio huius corollarij perfecta eſt. Nam datà rectà BD, & in circino proportionum inuentà ſemidiametro, vt factum eſt in anteced. poriſmate, eà ſemidiametro ſi occultum circulum

culum ducas per B, D, in eo circulo quater applicata BD conſtituit quadratum, ſine vlla cura rectorum angulorum, vel perpendicularium. &c. Demonſtratio eadem eſt, quæ in anteced. poriſmate, & in propoſ. 9. hu.

§III.

PROBLEMA.

Circa quadrilaterum, cuius duo anguli oppoſiti ſint æquales duabus rectis, circulum deſcribere.



EXemplum hic aliquod accipe dilatandi hunc lib. 4. ad circumſcriptionem circuli etiã circa irregulares figuras (præter triangula irregularia, vt facit Euclides) velut etiam præter quadratum hic, circa quadrangulum, cuius duo anguli oppoſiti ſint duobus rectis æquales, circulum deſcribere. Sint ergo quadrilateri ABCE oppoſiti duo anguli B, E duobus rectis æquales, & per 25 tertij, deſcribatur circulus per tria puncta, velut per A, B, C; ibitq; etiam per quartum E. Si neges, eat citra, vel vltra E per D, & iungantur AD, CD bis binæ. Quoniam ergo quadrilaterum ABCD eſt circulo inſcriptum, erunt duo anguli oppoſiti B, D æquales duobus rectis, & detracto communi B, erunt duo D, E æquales. Iungatur CA: ergo triangulorum CDA, CEA ſuper communi baſi angulus D ſub minoribus lateribus CD, AD non erit maior angulo E ſub maioribus lateribus CE, AE contra 21 lib. 1. Sic nec E eſſet maior externo extra circulum. &c. Erit ergo quadrilaterum ABCE inſcriptum, vel circumſcriptum ab ipſo circulo.

Pro-

Propoſ. X. Probl. X.

Triangulum iſoſceles conſtituere habens vtrumque, qui ad baſim, angulum duplum reliqui.



a propoſ. 11.2.

EXponatur recta quædam AB, [a] quæ in C ſic ſecetur, vt AB, BC contentum æquale ſit quadrato ex CA deſcripto. Igitur centro A, interuallo AB deſcribatur circulus

b propoſ. 1.4. BDE, [b] eiq; aptetur recta BD æqualis ipſi AC;

c propoſ. 5.4. & ductis DA, DC, [c] deſcribatur circa triangulum ACD circulus ACD. Et cum quod AB, BC continetur æquale ſit ei, quod ex AC quadrato, ſitque AC ipſi BD æqualis, erit & quod AB, BC continetur æquale ei, quod ex BD. Cum igitur extra circulum ACD acceptum ſit punctum B, ab eoq́; ad circulum ACD cadant duæ rectæ BCA, BD, quarum vna circulum ſecat, altera ei incidit; ſitque quod AB, BC continetur æquale

d propoſ. 37.3. ei, quod ex BD, [d] tanget BD circulum ACD; cumque BD circulum ACD tangat, à tactu au-

e propoſ. 32.3. tem D ducta ſit DC, [e] erit angulus BDC angulo DAC in alterna circuli portione conſiſtēti ęqualis. Cùm ergo anguli BDC, DAC ſint æquales,

ſi com-

ſi cõmunis CDA addatur, erit totus BDA duobus CDA, DAC æqualis: [f] ſed duobus CDA, DAC æqualis eſt externus BCD; ergo BDA æqualis erit ipſi BCD: ſed ipſi BDA æqualis eſt CBD, cùm & [g] latera AD, AB ſint æqualia: quare & DBA, BCD æquales erunt: tres ergo BDA, DBA, BCD ſunt æquales: & cum anguli DBC, BCD æquales ſint, erunt & latera BD, DC æqualia; ſed BD ipſi CA ponitur æquale: ſunt ergo AC, CD, æqualia: vnde & anguli CDA, DAC æquales erunt: ergo anguli CDA, DAC dupli ſunt anguli DAC: eſt verò & BCD æqualis duobus CDA, DAC; ergo BCD duplus eſt ipſius DAC. Et cum vterq; BDA, DBA angulo BCD ſit æqualis, duplus erit vterque reliquo DAB. Triangulum ergo iſoſceles, &c, Quod oportuit facere.

f propoſ. 32.1.

g defin. 15.1.

§ I.

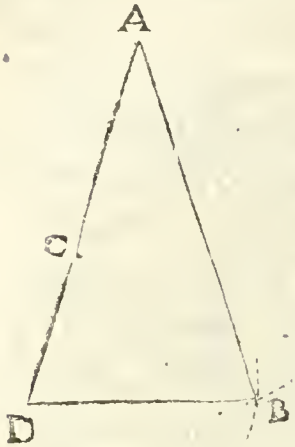
Probl. 10 lib. 4 ex circino proportionum facillimè expedire.

ESt inſtar lemmatis hæc prop. 10, quæ ſupponitur pro ſequentis 11 propoſitionis abſoluendo problemate. Nos problema in hac 10 propoſitione propoſitum facillimè, ac aliter, quàm hìc Euclides, expedimus ex vſu circini proportionum ſic.

Sit conſtituendum triangulum iſoſceles, quod habeat vtrumque angulum duplum anguli ad verticem, & ſit data, vel exponatur recta AD. Quæ per aliquem e pluribus modis, quos habes apud nos

ad

ad prop. 30 li. 6 in 2 parte Tomi 2, ſecetur in C media & extrema ratione.



Sit modus hic in circino proportionum, vt rectæ AD interuallum interponatur inter 60, & 60 numeros diducti circini proportionum, eoq; interuallo immoto, accipiatur interuallum inter 36, & 36; eoq; ſecetur ex altero extremo A, vel D recta AD in C. Atque ex D, interuallo maioris ſegmẽti AC, & ex A interuallo totius AD fiant mutuæ ſectiones in B. Iunctis AB, DB, erit triangulum ABD iſoſceles, ac habens ad baſim BD angulum B duplum anguli A, & angulum D pariter duplum ipſius A.

Quod ad ſectionem in C proportionalem &c. habes demonſtrationem in §§ 6, 7, 8 ad prop. 30 lib. 6. Eſt enim in circino latus hexagoni 60 ſectum proportionaliter in 36, & latus 36, quod eſt maius ſegmentum, eſt latus decagoni, iuxta ibi demonſtrata. Quòd ad reliqua, demonſtratio eſt eadem quæ hic apud Euclid. in probl. hoc 10.

§ II.

SCHOLION.

De reliquis iſoſcelibus ad inſcribendas alias aliquas figuras nondum inuentis. A nobis aliquid opis, ac opum.

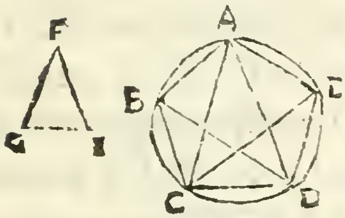
1 GRiembergerus *in ſuo Eucl.* Inſcriptio Heptagoni, Nonagoni, 11 laterum, 13, &c. adhuc deſideratur; quia nondum eſt repertum problema, & cõſtructio trianguli iſoſcelis, cuius vterlibet angulorum æqualium

lium ſit triplus, quadruplus &c.reliqui anguli, quorum beneficio inſcriberentur circulo heptagonum, nonagonum &c. Eo modo quo deſcribitur pentagonum. Et beneficio heptagoni, & nonagoni inſcriberetur figura 63 laterum, ſicut inſcriptũ fuit ab Euclide quinti decagonum.

2 *Nos tamen poſt vltimam propoſitionem huius lib. 4, ſine cura, & conſtructione triangulorum illorum, vniuerſali, & facili compendio non ſolum organicè demonſtratiuè per circinũ proportionum, ſed etiam præcisè geometricè docebimus inſcribere quamlibet figuram regularem in circulo. &c.*

Propoſ. XI. Probl. XI.

Dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum inſcribere.

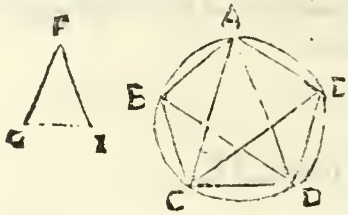


SIt in dato circulo ABCDE pẽtagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcribendũ. Exponatur triangulum iſoſceles duplum habens vtrumq; angulum ad G, H, eius qui eſt ad F; & a inſcribatur circulo ABCDE triangulum ACD æquiangulum triangulo FGH, ita vt angulo F æqualis ſit angulus CAD, angulis G, H anguli ACD, CDA. Et quia vterque ACD, CDA duplus eſt anguli CAD, b biſecentur rectis CE, DB, iunganturq; AB, BC, CD, DE, EA. Cùm itaque vterque angulorum A- a *propoſ.* 2.4. b *propoſ.* 9.1.

CD: CDA duplus ſit anguli CAD, biſectiq; ſint rectis CE, DB, erunt quinque anguli DAC, ACE, ECD, CDB, BDA æquales inter ſe. [c] Et cùm æquales anguli æqualibus peripherijs inſiſtant, erunt quinque peripheriæ AB, BC, CD, DE, EA æquales: [d] ſed æquales peripherias æquales rectæ

c propoſ. 26.3.

d propoſ. 29.3.



ſubtendunt; ſunt ergo hę quinque rectæ AB, BC, CD, DE, EA æquales; eſt ergo pentagonum ABCDE æquilaterum. Dico quod & æquiangulum. Quia AB, DE peripheriæ æquales ſunt, ſi communis BCD addatur, erunt totæ ABCD, EDCB æquales; & inſiſtit peripheriæ ABCD angulus AED, peripheriæ verò BCDE angulus BAE; [e] ſunt ergo AED, BAE anguli æquales. Eàdem de cauſa quilibet angulorum ABC, BCD, CDE vtrique AED, BAE æqualis erit: eſt ergo pentagonum ABCDE æquiangulum: demonſtratum autem eſt quod & æquilaterum. Dato ergo circulo, &c. Quod oportuit facere.

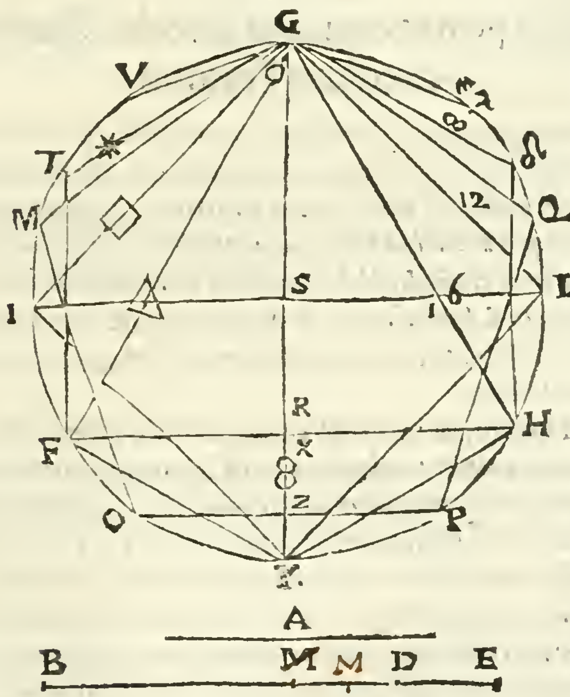
e propoſ. 29.3.

§ I.

PORISMA.

Data ſemidiametro, inuenire in circino proportionum latus pentagoni regularis circulo inſcribendi.

DAta ſit pro ſemidiametro recta A, eiuſq; interuallum interponatur inter 60. & 60 numeros circini proportionum, immotoq; circino iuxta id interuallum, quoniã



diuiſà totà peripherià 360 graduum per numerum 5 indicatum à nomine pentagoni, prouenit numerus 72, accipiatur interuallum inter 72, & 72, eritq; quæſitum latus, puta quantitatis BM, quod in circulo, ex A ſemidiametro, applicatum, & quinquies replica-

tum dabit inſcriptum pentagonum GMOPQ. Theorice, ac demonſtratio patent partim ex antecedentibus alijs noſtris poriſmatibus in hoc 4 lib. partim ex demonſtratione huius 11 propoſ. Eucl.

SCHOLION.

Aliter partim ex Ptolomęo inuenire latus pentagoni circulo inſcribendi.

V*Ide inferius ad propoſ.* 15 *huius aptius, quàm ad hanc* 11.

§ II.

Morale pentagonum in circulo, ſiue circa circulum Fortunæ.

Pentag. Fortunæ.

I*Pſa etiam fortuna, (ſiue diuina prouidentia) cui circulus affigitur in orbe terrarum, & in humanarum viciſsitudinum circulo q. ludit, & pẽtag. incircumſcribit. Inſpice figuram propoſitionis ſeq.* 12 *Eucl. A verticali angulo G fit inflexio temporum, & inclinatio in H, K, L, M. In vertice G benè eſt, in H benè erat, in K benè fuit, in L benè fuerat, in M benè erit, & rurſus in G benè eſt. Aſsidue circa nos hoc quinq; temporum pentagonum rotatur. Ac rectè monet Poeta:*

Durate, & vos met rebus ſeruate ſecundis.

Durandum in duris vſque ad mollia.

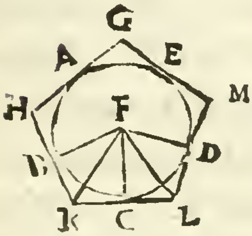
Quoniam enim, vt aiebat Socrates: Circulus mortalia, *& rota diuinæ prouidentiæ nunquam non reuoluitur, ſi à ſummo fœlicitatis vertice deuoluaris per temporũ gradus, ſpera, & expecta meliora.* Nõ ſi male nunc, & olim ſic erit. *Horat. Rurſus aſcendes. Fortunam te deuoluentem feras, & ſerua te rurſum ſecundis rebus. In quibus iterum collocatus, quaſi in ſummo rotæ fælicitatis, vt modeſtè te geras, memento poſt præſens præterita conſequi tempora. Poſt quæ in futuro ſperandum, & in præſenti rurſum lætandum. Hæc pentagonum ſuo circulo inſcribit Fortuna. Quæ apud Boetium l. 2. de conſol. proſa 2, rectè monet:* Rotam volubili orbe verſamus, infima ſummis, ſumma infimis mutare gaudemus. Aſcende ſi placet, ſed eà lege, ne vti, cum ludicri mei ratio poſcet, deſcendere iniuriam putes.

Præſcriptum circulo fortunæ inſcriptũ.

Pro-

Propoſ. XII. Probl. XII.

Circa datum circulum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcribere.



OPorteat circa circulum ABCDE pentagonum æquilaterum,& æquiangulum deſcribere. Cogitentur angulorum pẽtagoni inſcripti puncta, A, B, C, D, E ita, vt peripheriæ, AB, BC, CD, DE, EA æquales ſint, [a] ducanturque per A, B, C, D, E rectæ GH, HK, KL, LM, MG tangentes circulum, & accipiatur centrum circuli F, iunganturque FB, FK, FC, FL, FD. Cùm itaq; KL recta circulum in C tangat, & ab F ad contactum C ducta ſit FC, [b] erit ipſa ad KL perpendicularis: vterque ergo angulus ad C eſt rectus. Eandem ob cauſam recti ſunt anguli ad B, D;& cùm angulus FCK rectus ſit, [c] erit quod ex FK æquale illis, quæ ex FC, CK quadratis. Eàdem de cauſa erunt quæ ex FB, BK æqualia illi, quod ex FK: ſunt ergo quæ ex FC, CK æqualia illis, quæ ex BF, BK; quorum quod ex FC æquale* eſt ei, quod ex FB: erit igitur & reliquum quod ex CK æquale reliquo, quod ex BK: ſunt ergo BK,

a *propoſ.* 17.3.

b *propoſ.* 18.3.

c *propoſ.* 47.1.

* *quia FB, FG ſunt æquales, quippe ex cẽtro ad peripheriam.*

BK, CK æquales. Et quia FB, FC æquales ſunt, communis FK, erunt duæ BF, FK duabus CF, FK æquales, & baſis BK baſi CK æqualis; *d* ergo & angulus BFK æqualis erit angulo KFC, & angulus BKF angulo FKC: eſt ergo angulus BFD duplus anguli KFC, & BFC duplus anguli FKC. Ob eandem cauſam erit & CFD duplus ipſius CFL, & CLD duplus ipſius CFL. Cumque peripheriæ BC, CD æquales ſint, *e* erunt & anguli BFC, CFD ęquales, eſtque BFC ipſius KFC duplus, DFC verò duplus ipſius LFC: æquales ergo ſunt KFC, CFL. *f* duo ergo triangula FKC, FLC duos angulos duobus habentia ęquales alterum alteri, & latus vnum vni lateri FC vtrique commune, habebunt & reliqua latera reliquis æqualia, angulumque reliquum reliquo. Sunt igitur tam rectæ KC, GL, quàm anguli FKC; FLC æquales, cùmque KC æqualis ſit CL, dupla erit KL ipſius KC. Eàdem de cauſa demonſtrabitur HK dupla ipſius BK; & cum demonſtratum ſit BK æqualis KC, ſitq; KL dupla ipſius KC, & HK dupla ipſius BK, *g* erit & HK ipſi KL æqualis. Similiter demonſtrabitur quælibet ipſarum GH, GM, ML vtrique HK, KL æqualis: eſt ergo pentagonum GHKLM æquilaterū. Dico quòd

d propoſ. 8.1.

e propoſ. 27.3.



f propoſ. 26 1.

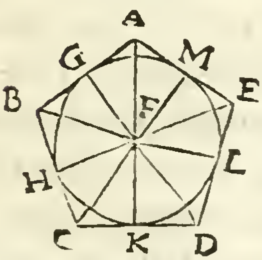
g ax. 6.

& æquian-

& æquiangulum. Cùm enim anguli FKC FLC æquales ſint, oſtenſusque ſit HKL duplus ipſius FKC, & ipſius FLC duplus KLM, erit & HKL ipſi KLM ęqualis. Similiter demonſtrabitur quilibet ipſorum KHG, HGM, GML vtrique HKL, KLM æqualis. Quinque ergo anguli GHK, HKL, KLM, LMG, MGH ſunt æquales; æquiangulum ergo eſt pentagonum. Oſtenſum autem eſt & æquilaterum; & eſt deſcriptum circa circulum ABCDE. Quod oportebat facere.

Propoſ. XIII. Probl. XIII.

Dato pentagono æquilatero, & æquiangulo circulum inſcribere.



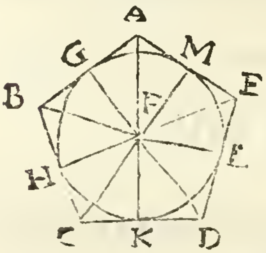
OPorteat dato pentagono æquilatero, & æquiangulo ABCDE circulum inſcribere. [a] biſecetur vterq; angulorum BCD, CDE rectis CF, DF, & à puncto F, in quo CF, DF concurrunt, ducantur rectæ FB, FA, FE. & quia BC, CD æquales ſunt, communis CF, erunt duæ BC, CF duabus DC, CF æquales, & angulus BCF angulo DCF æqualis: [b] ergo & baſis BF baſi DF æqua-

a propoſ. 9.1.

b propoſ. 4.1.

æqualis erit, & triangulum BFC triangulo DCF, reliquiq; anguli reliquis, quibus æqualia latera ſubtenduntur, æquales erunt. Sunt igitur anguli CBF, CDF æquales. Et cùm angulus CDE duplus ſit anguli CDF, æquales autem & CDE, ABC, & CDF, CBF, erit & CBA duplus ipſius CBF: æquales ergo ſunt ABF, FBC: biſecatur ergo angulus ABC rectà BF. Similiter demonſtrabitur quemlibet angulorum BAE, AED rectis

c propoſ. 12.1. FA, FE biſecari.[c] Ducantur enim ab F ad AB, BC, CD, DE, EA rectæ perpẽdiculares FG, FH, FK, FL, FM. Quia ergo anguli HCF, KCF æquales ſunt, FHC rectus, æqualis recto FKC, erunt duo triangula FHC, FKC duos angulos duobus æquales habentia, vnumq; latus vni, FC latus commune, & vni æqualium an-



d propoſ. 26.1. gulorum ſubtenſum;[d] habebunt ergo & reliqua latera reliquis æqualia: ſunt ergo perpendiculares FH, FK æquales. Pari modo demonſtratur quælibet harum FL, FM, FG vtriq; FH, FK, æqualis. quinque ergo rectæ FG, FH, FK, FL, FM æquales ſunt; circulus ergo centro F, interuallo vna harum FG, FH, FK, FL, FM deſcriptus tranſibit & per reliqua puncta, tangetq; rectas AB, BC, CD, DE, EA, eo quòd anguli ad

G, H,

G, H, K, L, M recti ſint. Quod ſi illas non tangat, ſed ſecet, cadet quæ ab extremitate diametri ad angulos rectos ducitur, intra circulum, *e* quod abſurdum eſſe oſtenſum eſt: non ergo circulus centro F, interuallo FG, FH, FK, FL, FM deſcriptus ſecat rectas AB, BC, CD, DE, EA; ergo tanget. dato ergo pentagono. Quod oportuit facere.

e propoſ. 16.1.

Propoſ. XIV. Probl. XIV.

Circa datum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum, circulum deſcribere.

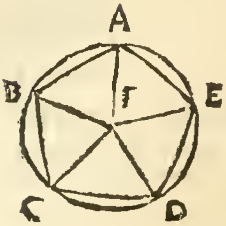


Oporteat circa datum pentagonum æquilaterũ, & æquiangulum A B C D E circulũ deſcribere. *a* Biſecetur vterq; angulorum BCD, CDE rectis CF, FD; & ab F puncto, in quo rectæ concurrunt ad B, A, E, ducantur rectæ FB, FA, FE. Similiter ergo, vt in præcedente, demonſtrabitur quemlibet angulorum CBA, BAE, AED rectis BF, FA, FE biſecari. Et quia anguli BCD, CDE æquales ſunt, eſtq; FCD dimidius ipſius BCD, & CDF dimidius ipſius CDE, erunt FCD, FDC æquales; *b* quare & latera FC, FD æqualia erunt. Similiter demonſtrabitur quamlibet ipſorum FB, FA,

a propoſ. 9.1.

b propoſ. 6.1.

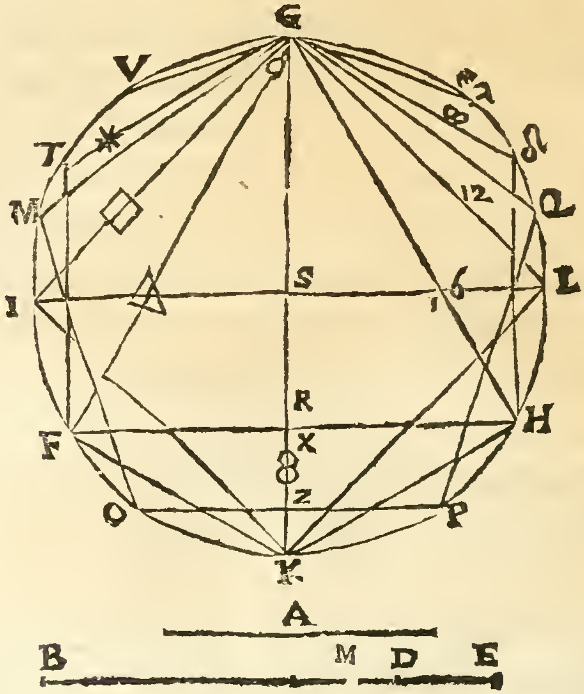
B, FA, FE vtrilibet FC, FD æqualem eſſe. Quinque ergo FA, FB, FC, FD, FE æquales ſunt. Circulus igitur cētro F, interuallo vnà harum FA, FB; FC, FD, FE deſcriptus tranſibit & per reliqua puncta, eritq; circa pentagonum ABCDE deſcriptus. Circa datum ergo, &c. Quod facere oportebat.



§ I.

PROBLEMA.

Super data recta è circino proportionum pentagonum regulare facillimè excitare.



Quod

QVod alij aliter, nos hìc facillimo negotio ex occaſione huius 14, in qua dato pentagono regulari circumſcribitur circulus, abſoluemus hoc problema. Eſto data BM, cuius quantitas interponatur in circino proportionum inter numeros 72, & 72, eoq; interuallo immoto permanente; in circino accipiatur interuallum inter 60 & 60. quo interuallo, tamquam ſemidiametro, ex extremis B, M fiant mutuæ ſectiones pro centro, & per extrema B, M ibit occultus circulus, in quo quinquies replicata BM conſtituet pentagonum regulare.

§ II.
COROLLARIVM, & PORISMA.

Dato latere pentagoni regularis, inuenire in circino proportionum ſemidiametrum circuli pentagono circumſcribendi.

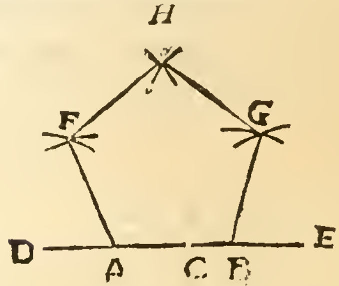
EAdem opera, quà in anteced. probl. per circinum proportionum erexiſti ſuper data BM pentagonum regulare, abſoluiſti etiam problema 14 Euclid. quod hìc eſt propoſitum à nobis corollarium deductum ex anteced. noſtro problemate. Nam ſemidiameter inter 60, & 60 deſcribet circulum in antec. probl. occultum, hìc manifeſtum tranſeuntem per extrema lateris pentagoni, & concludentem intra ſe pentagonum ex dato latere deſcriptum.

§ III.

Aliter, ac ſecundo pentagonum regulare ſuper data excitare ope circini proportionum.

DAta AB ſecetur in C media, & extrema proportione per modum aliquem ex vſurpatis à nobis ad propoſ. 30 lib. 6, & vtrinque producatur in D, & E ad quantitatem

maioris ſegmenti AC; hoc eſt ipſi AC ſit æqualis DA, & eidem AC ſit æqualis BE. Tum interuallo totius AB ex A, & D fiant mutuæ ſectiones in F, itemq; ex B, & E in G. Rurſus eodem interuallo ex F, & G fiant ſectiones in H; eritque ope ſectionis mediæ, & extremæ pẽtagonũ ABGHF regulare excitatũ ſuper data AB, ſine vlla cura, & prolixiori operatione in conſtituendis angulis ad quantitatem requiſitam in Pentagono. &c.



Demõſtratio patet ex 10 propoſ. hu. Nam AB æqualis eſt ipſi FA, & facta ſectione proportionali, maius ſegmentum AC factũ eſt baſis iſoſcelis ADF, quod eſt triangulum, quale requirit, & conſtituit Euclides in 10 propoſ. & ex regula pulcherrima, quam habes in corollar. 7 ſub § 4 ad 32 prop. lib. 1. in huius Ærarij 1 tom. angulus pentagoni continet vnum rectum, & vnam quintam partem vnius recti. Si trianguli DFA duos rectos ita diuidas, vt ſinguli ad baſim DA ſint dupli anguli ad verticem F, erunt ad baſim vterlibet continens quatuor quintas vnius recti, & angulus ad verticem continebit duas quintas vnius recti. Cum igitur angulus DAF contineat quatuor quintas vnius recti, ergo ad complimentum duorum rectorum, reliquus, qui deinceps FAC, continet ſex quintas vnius recti, hoc eſt rectum vnum, & vnam quintam recti, ac proinde angulus FAC eſt pentagoni. Sic, productis reliquis lateribus ad quantitatem AC ex alijs iſoſcelibus æqualibus ipſi DFA, demonſtrabuntur reliqui anguli pentagoni &c. ac omnes æquales, quemadmodum & omnia latera per conſtructionem ſunt æqualia.

§ IV.

Aliter, ac tertio ſuper data recta pentagonum regulare excitare. Aliquorum hallucinatio. &c.

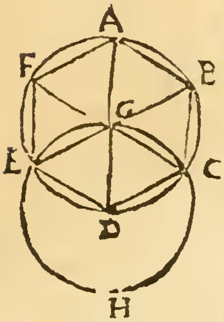
SCilicet, ſine iſoſcelibus, per conſtitutionem angulorum pentagonicorum ope circini proportionum. Hic non eſt iterandum, quod

quod habes in praxi ſub § 6 aa 23 prop. li. 1 in 1 tom. hu. Ærar. Reuiſe praxes in §§ 10, 11, 12, 13, 14 in 2 To. ad prop. 9 li. 6.

Vide ibi in citat. to. 1. Schol. 3 indicatos errores in vulgatis aliquorum conſtructionibus apud Clau. in Geom. pract. Omitto & Peletarij ad 10 huius formationem pentagoni operoſiorem, & cæteras aliorum.

Propoſ. XV. Probl. XV.

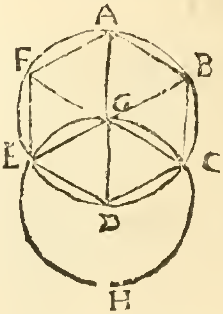
In dato circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcribere.



SIt in dato circulo ABCDEF hexagonum ęquilaterum,& ęquiangulum deſcribendum. Ducta diametro AD, ſumatur centrũ G, atque centro D, interuallo DG deſcribatur circulus EGCH; & & ductæ EG, CG producantur ad B, F, iunganturq; AB, BC, CD, DE, EF, FA. Dico ABCDEF hexagonum æquilaterum, & æquiangulum eſſe. Cùm enim G centrum ſit circuli ABCDE, & erunt GE, GD æquales. Et cùm D centrum ſit circuli EGCH, erunt & DE, DG æquales. Sed GE oſtẽſa eſt æqualis ipſi DG, [a] erit ergo & GE æqualis ipſi ED: triangulum ergo EGD æquilaterum eſt, & tres anguli eius EGD, GDE, DEG æquales, cùm iſoſcelium triangu- a ax. 1.

lorum

lorum anguli ad baſim æquales ſint. Et quia tres
b propoſ. 32.1. anguli trianguli duobus rectis æquales ſunt,[b] erit angulus EGD tertia pars duorum rectorum. Similiter demonſtratur DGC tertia pars eſſe duorum rectorum, & cùm recta CG ſuper EB con-
c propoſ. 13.1. ſiſtens [c] angulos deinceps EGC, CGB duobus rectis æquales faciat, erit & reliquus CGB tertia pars duorum rectorum; ſunt igitur anguli EGD,
d propoſ. 12.1. DGC, CGB inuicem æquales; [d] erunt igitur &
e propoſ. 26.3. qui ad verticem BGA, AGF, FGE æquales; [e] æ-



quales autem anguli æqualibus peripherijs inſiſtunt: peripheriæ ergo AB, BC, CD, DE, EF, FA
f propoſ. 29.3. ſunt æquales; [f] æqualibus autem peripheris æquales rectæ lineæ ſubtenduntur: ſex igitur rectæ æquales ſunt, ideoq; hexagonum ABCDEF æquilaterum eſt. Dico quod & æquiãgulum. Cùm enim peripheriæ AF, ED æquales ſint, ſi communis ABCD addatur, erunt totæ
g def. 9. 5. FABCD, EDCBA æquales [g] Sed peripheriæ FABCD inſiſtit angulus FED, peripheriæ verò EDCBA angulus AFE; ſunt ergo anguli AFE, DEF æquales. Similiter demonſtrabitur reliquos hexagoni ABCDEF angulos vtrique AFE, FED æquales eſſe. Eſt ergo hexagonum ABCDEF æquiangulum: oſtenſum eſt autem & æquilaterum,

rum, & eſt in circulo deſcriptum. In dato ergo circulo, &c. Quod oportebat facere.

Corollarium.

EX his manifeſtum eſt latus hexagoni æquale eſſe ei, quæ ex centro circuli. Et ſi per puncta A, B, C, D, E, F [h] tangentes circulum rectæ ducantur, circa circulum hexagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcriptum eſſe, vt in illis, quæ de pentagono dicta ſunt, videre licet. Præterea iuxta illa, quæ de pētagono dicta ſunt, in dato hexagono circulum deſcribemus. h *propo* 17. 3.

SCHOLION I.

EX corollario huius 15 Prop. patet quàm ſcientificè noſtra Italica lingua vocet circinum: il ſeſto. *Circini enim qualibet apertura, & operatio eſt interuallum ſemidiametri, quæ recta eſt ſubtendens ſextam peripheriæ partem.*

§ I.

PROBLEMA I.

Super data rectà hexagonum regulare excitare, circulo inſcribere, circumſcribere. &c.

NVllo negotio ſoluuntur propoſita hìc omnia problemata. Nam ſuper datà excitato æquilatero, centro quolibet trium an-

gulorum,

gulorum, & ſemidiametro quolibet trium æqualium laterum, deſcribetur circulus, in quo eadem ſemidiameter ſexies applicata producet regulare hexagonum inſcriptum. &c. ex corollario hu. 15.

SCHOLION II.

Aliter hexagonum regulare circulo inſcribere.

P*Er poriſma in § 1 ad 2 prop. hu. deſcripto triangulo æquilatero in circulo, eius latera ad rectos biſariata dabunt in circulo puncta, ad quæ rectæ ſubtenſæ erunt hexagoni regularis latera.*

SCHOLION III.

De mutuis figurarum inſcriptionibus etiam extra circulum.

V*T exemplum etiam aliquod habeas inſcriptionis mutuæ figurarum etiam extra circulum, & extra traditas figurarum inſcriptiones in hoc lib. 4, vide in Ap. 3, progym. 7. corollar. 2, & 3 poſt prop. 5 facillimas inſcriptiones hexagoni in æquilatero, æquilateri in hexagono. &c.*

§ II.

Vſus Aſtronomicus corollarij propoſ. huius 15, nempe Planetarũ à Terra diſtãtias agnoſcere.

E*Xemplum eſt in Sole. Inueſtigant Aſtronomi, & aſſequuntur varijs modis diametrum diſci ſolaris, & vident quotam cæli,*

li, ſiue orbitæ ſolaris, in 360 gradus diuiſæ, partem ſubtendat. Vt verò Solis à Terra diſtantiam conſequantur, confugiunt ad hanc 15 propoſitionem, & ad eius corollarium, nempè ad hexagonum in circulo, ſiue orbitâ circulari curſùs ſolaris inſcriptum, & accipiunt hexagoni latus, nempè ſubtenſam ſextæ parti peripheriæ, quæ, cùm ſit etiam ſemidiameter, notificat diſtantiam Planetæ à Terra, cuius globus tamquam centrum eſt, & eius ab Orbe planetario eadem eſt ſemidiameter, & diſtantia. Satis hæc pro indice præclari vsùs huius 15 propoſ. Vt præciſiora, & apertiora videas, vide in Apiar. 8, progym. 3, propoſ. 8. præſertim verſus finem.

§ III.

VSVS Catoptricus, hoc eſt —

— Punctum vſtionis phyſicæ è ſphærico ſpeculo inuenire ope 15 propoſ. hu. lib. 4.

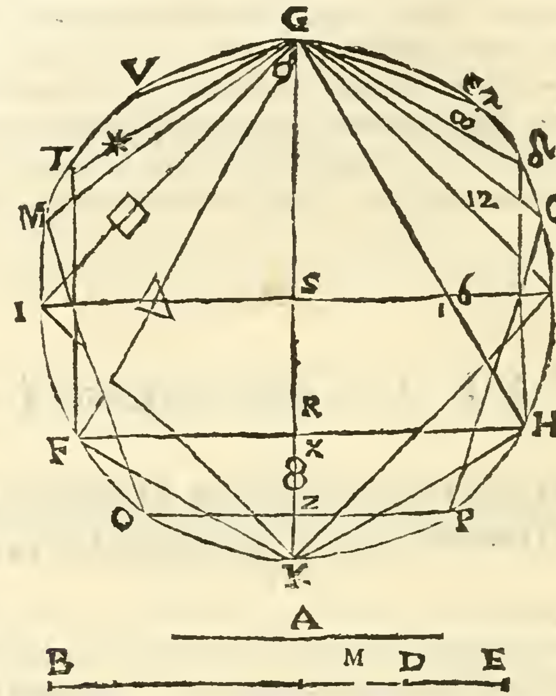
Geometricè abſtractè vſtio a ſphærico ſpeculo ſit in cẽtro -- -- Phyſicè ſit ad quartã partẽ diametri. Ignorãtia geometricæ abſtractionis male metitur theorias phyſicis experimentis.

PHyſicam vſtionem dixi, vt eam diſtinguam ab vſtione in abſtractione geometrica, in qua demonſtratio irrefragabilis apud Euclidem in Catoptricis, & apud alios Antiquos philoſophos Catoptricos eſt, plurium, immò omnium radiorum incidentium in ſphæricum ſpeculum fieri concurſum ad centrum ſpeculi, & conſequenter plurimum ibi luminis, & caloris ita, vt ſicubi, profectò ibi potius, quàm alibi extra centrum, debeat fieri vſtio. Quæ ſi ex debito geometricæ demonſtrationis non ſit, ſed in alio puncto extra centrum, ſit dolo latentis alicuius phyſici arcani, quod vltrà geometricam veritatẽ fortaſſe, requiritur ad phyſicam vſtionem, & quod extra centrum ſpeculi lateat.

Vide nos hac de re in Ap. 7. Progym. 2. propoſ. 1, & 2, & propriè progym. 3, propoſ. 8, Schol. 3. vbi de vſtoriâ lineâ, & in Analectis ad 4 editionem Apiariorum, Analecto 18. Vnde diſcant, qui neſciunt diſtinguere theoricas veritates, & demonſtrationes abſtractionis geometricæ à phyſicis experimentis, & notent quàm non temerè

Vſtio in ſpeculi cẽtro eſt theorema, non problema.

merè Euclides propoſitionem 31, & vltimam ſuorum Catoptricorum de vſtione è ſpeculo inſcripſerit: Theorema. *ſcilicet de phyſicè ſpeculo ſpeculationem geometricam voluit.*



Per æquilateri trianguli, & hexagoni iſcriptiones in circulo inuenitur punctum vſtionis ĩ ſphærico ſpeculo.

Igitur vt vſtionis phyſicæ punctum è ſpeculo ſphærico inuenias, finge in eo trianguli æquilateri latus FH, & latera hexagoni FK, KH. Radij Solis pro parallelis accepti, & incidentes in cauum ſpeculi, ac reflexi vrunt ad diſtantiam terminatam à lateribus gemini hexagoni ſubtenſis à latere æquilateri trianguli, & punctum vſtionis eſt in dimidio ſemidiametri, hoc eſt vbi latus trianguli æquilateri circulo inſcripti ſecat ſemidiametrum SK in R. Vides igitur ope inſcriptarum in circulo figurarum inueniri, ac determinari punctum vſtorium R, nè putes eſſe etiam phyſicè ſteriles haſce in circulo figurarum inſcriptionis. Pro hac vſtione ad quartam diametri partem vide nos in Apiar. 7, progym. 2 propoſ. 1, & 2.

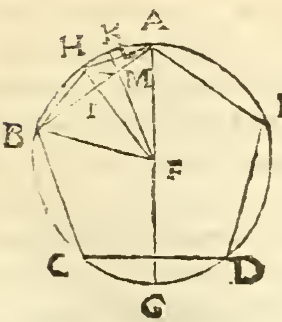
§4.

§ IV.
LEMMA.

Latus pentagoni poteſt latera hexagoni, & decagoni in eodem circulo.

HOc Lemma eſt propoſitio 10 *lib.* 13. *elem. Quam ex Maurolyco breuiorem, varietatis alicuius gratia, hic accipe pro eà, quam opportunè habes ab interprete in ſine lib.* 6 *Propoſitionis verò* 2 *è li.* 2 *(quam citat Maurolycus) veritatem habes in promptu apud nos innumeris in lib.* 2. *element. Igitur lemma eſt —*

— Pentagoni latus poteſt Hexagoni, & Decagoni latus in eo circulo, in quo Pentagonum clauditur, deſcriptorum.



SIt enim AB latus pentagoni: AH latus Decagoni in circulo ABC, cuius diameter AFG, centrumq; F, deſcriptorum. Aio quod quadratũ ipſius AB æquum eſt quadratis ipſarum AF, & AH ſimul ſumptis. Ducatur FMK per æqua ſecans latus, & arcum decagoni, item chordæ AH, HB, HM; eruntque duo triangula ABH, & AHM ſimilia, quoniam æquiangula, & ideo tres lineæ AB, HA, AM continuè proportionales. Quare quadratum HA æquale ei, quod fit ex AB in ipſam AM. Item duo triangula AFB, FBM ſimilia, quandoquidem æquiangula, & idcirco tres lineæ AB, BF, BM ſunt

in proportione cõtinua, & propterea quadratũ BF æquale ei, quod fit ex AB in ipſam BM. Verùm hæc duo producta, ſcilicet quod ex AB, AM, quodq; ex AB, BM ſimul ſumpta, ſunt per ſecundam ſecundi, æqualia quadrato ipſius AB. Igitur quadratum ipſius AB æquale eſt quadratis ipſarum HA, & AF, ſiue BF ſimul ſumptis. Quod fuit demonſtrandum.

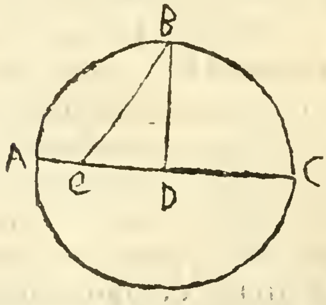
§V.

PROBLEMA II,

Ac vniuerſale pro inſcriptionibus aliquot figurarum in circulo, nempe --

-- Inuenire latera Hexagoni, Decagoni, Pentagoni eodẽ in circulo aliter, quàm Euclides.

Hanc propoſitionem, quam Ptolomæus lib. 1 Almageſti cap. 9. habet, & alij ab eo tranſcripſerunt, nos hic paullo aliter, ac facillimè conſtruemus, & demonſtrabimus ex ijs, quæ attulimus ad propoſ. 30, lib. 6. Sit circulus ABC, cuius ſemidiameter CD erit latus hexagoni, quod datum ſit pro maiore ſegmento, adaaturque illi pro minore ſegmento (iuxta modum apud nos ad propoſ. 30 li. 6) recta DE, ita vt CE ſecta ſit extrema, & media ratione in D. Erectà perpendiculari D B, iungatur recta BE, ac erunt in triangulo rectangulo latera hexagoni DB, decagoni DE, pentagoni EB. Nam, per ea, quæ habes apud nos ad prop. 30 lib. 6, rectæ CE proportionaliter ſectæ minus ſegmentum DE eſt latus decagoni. Eſt verò DC æqualis perpendiculari DB, ergo ſubtenſa BE poteſt, per 47 li. 1. latera BD, DE; ergo, per lemma hic antecedens, eſt eadem BE latus pentagoni, trium ſcilicet regularium figurarum in eodem circulo ABC inſcribendarum.



§ 6.

§ VI.
SCHOLION.

Apud alios inuentio laterum trianguli æquilateri, quadrati, pentagoni, hexagoni, octogoni, decagoni, dodecagoni ex circuli diametro, &c.

Vide Clauium propoſ. 12 poſt tabulam ſinuum, & Maurolycum poſt propoſ. 15 lib. 13 element. & in fine eiuſdē lib. 13, & in compendio li. 15, & in parte 2 li. 2. arithmeticorum poſt prop. 107, & 108, vbi ad iucundam cognitionem, & praxim variè geometricam, quaſi ludendo quadratis, eliciuntur pro radicibus quadratis latera hic propoſitarum regularium figurarum ad vſus ampliſsimos non in Geometria ſolum planarum, ſed etiam ſolidarum figurarum. Vt videas, quàm latè ſe fundat in omnes mathematicas ſcientias exiguitas lib. 4 elementaris.

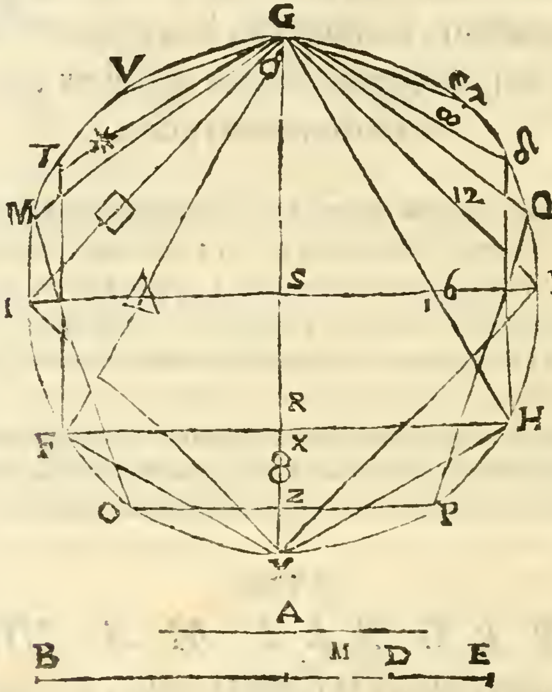
§ VII.
PROBLEMA III,
Ac vniuerſale de inſcriptionibus aliquot figurarum in circulo, nempe --

-- E ſectionibus ſemidiametri inuenire latera trianguli, quadrati, quinquanguli, ſexanguli, & decanguli regularium inſcribendorum in circulo, cuius ſemidiameter ſecatur.

Semidiameter SK bifariam ad angulos rectos ſecta in R dat latus FH trianguli æquilateri in circulo; geminata, & iuncta

ad

ad centrum S in angulum rectum cum alterà ſemidiametro SL, vel SI, extremis L, K, vel I, K dat internallum pro latere KL, vel KI quadrati. Eadem ſemidiameter SK ſecta in X extrema, & media ratione, iuxta dicta à nobis ad prop. 30 lib. 6. exhibet in maiori ſegmento XS latus decanguli, quale GV, vel Gε; ſiue recta ſubten-



ſa arcubus KP, vel KO, & iuncta OP ſubtendens geminatos arcus, decanguli, eſt latus quinquanguli. Vel aliter. E ſectione proportionali facta in X minus ſegmentum XK ſi ad angulos rectos biſarietur in Z, erit OP, eam biſarians, latus quinquanguli. Atque hæc quidem de latere quinquanguli patent partim per demonſtrata à nobis ad 30 prop. lib. 6, partim ex 10 propoſ. hu. Ipſa denique ſemidiameter inſecta eſt latus hexagoni, per coroll. hu. 15 propoſ.

§ VIII.

VSVS Aſtrologicus, hoc eſt --

--- Planetarum aſpectus, ac Lunæ phaſes pro influxibus iuxta latera figurarum regularium ex præcedentibus proportionibus in circulo inſcriptarum.

PRater hactenus prædictos, accipe & hunc aſtrologicum vſum inſcriptarum per antecedentes propoſitiones figurarum regularium in circulo. Ac, cæteris omiſsis lateribus, & Planetis, exemplum accipe in Luna ad latera Hexagoni, Quadrati, Trianguli. Igitur finge in centro S eſſe Terram, in qua dum Luna apparet in diametri extremis ſub G, & K, eſtq; in G ſub eodem gradu Zodiaci, in quo Sol, dicitur habere cum Sole iunctionem, cuius ſignum vides ☌; quando verò eſt in K dicitur habere Soli oppoſitionem, cuius character ☍, appellanturq; duo prædicti ſitus communi nomine Syzygiæ, coniugationes. Ab obſcuritate, & ſuppoſitione ipſi Soli recedens cùm primùm Luna peruenerit ad gradus 60 lateris hexagonici GT, dicitur habere aſpectum ſextilem, cuius character ſex ſemidiametrorũ ✶. Cum peruenerit ad grad. 90, vbi latus quadrati GI, habet aſpectum tetragonicum, cuius character eſt figura ipſa □. Cùm ad gr. 120, vbi latus GF Trianguli æquilateri, trinum habet aſpectum ſignatum triquetro △. Paribuſq; rationibus poſt plenilunium in K releget oppoſitè iter per triangularem, quadratum, ſextilem aſpectus. &c.

Aſtrologi (non Aſtronomi) mira pronuntiant de efficientijs eorum præ alijs aſpectuum in elementis, in corporibus animatis, & animis incorporatis, ad alterationes, corruptiones. &c. (etiam futuras) præſciendas. Sed quia hæc ſunt extra certitudinem ſcientiæ, quam profiteri debent Philoſophi, & ſatis doctè à ſcientificis viris præſcriptum eſt contra eos, qui nugantur in cælis, ideo earum re- *Aſtrologi vanis, Aſtronomi certis, & ſcientifici nituntur.*

rum

rum curioſi plura videant apud iudiciarios non interdictos. Nobis ad condimentum, vſum, & applicationem aliquam inſcriptarum adhuc in circulo ex hoc 4 libro figurarum ſatis hæc ſunto.

§ IX.

Vſus harmonicus inſcriptarum ex præcedentibus propoſitionibus circulo figurarũ, atque in primis Harmoniæ cæleſtium circulationũ à Planetis ſub Zodiaco ſignatarum veſtigia prodere.

1 D*Vm aliqui ex decenti arbitrantur, præſertim in cæleſtibus, ac præſtantioribus corporibus, nihil fieri ſine proportionum ſuauiſsima conſonantia, eam ex diuiſionibus circuli factis per latera aliquarum figurarum hactenus in hoc libro quarto circulis inſcriptarum prodere conati ſunt. Ac veteres quidem Aſtronomorum ſextilem, quadratam, & trigonicam præ alijs figuris contemplantes, diuiſà totà peripheria in 48 æquales partes, quoniam latus Gδ hexagoni earum partium ſubtendit, ac terminat 8 in δ, quadrati verò latus GL ſubtendit, ac terminat 12 in L, ac deniq; trianguli æquilateri latus GH ſubtendit, ac terminat 16 in H, earum in peripheria partium tres præcipuas conſonantias adnotarunt dum Planetæ ſub Zodiaco gradiuntur. Inter 16, & 12 eſt proportio ſeſquitertia, quæ eſt conſonantia Diateſſaron. Inter 16, & 8 eſt proportio dupla, quæ eſt omnium ſuauiſsima conſonantia Diapaſon. Inter 12, & 8 eſt proportio ſeſquialtera, quæ eſt conſonantia Diapente. Pro, & de quibus, ac reliquis conſonantijs vide nos in Apiar. 10, Progym. 1 Propoſ. 1.*

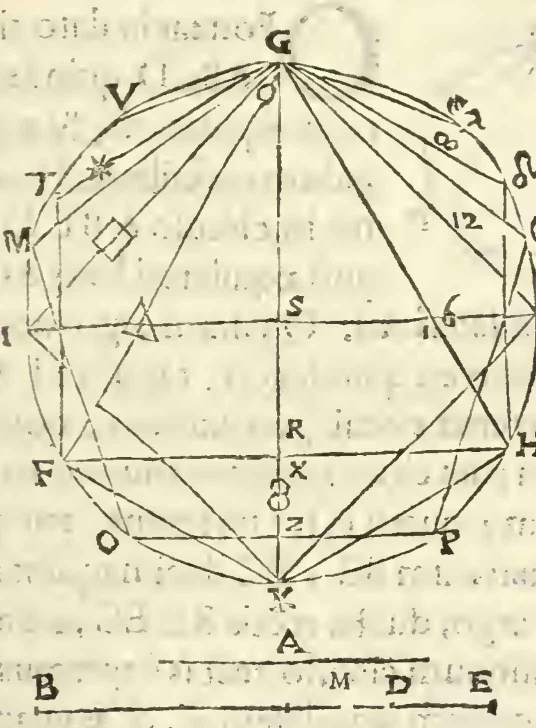
Conſonantiæ planetariæ iuxta veteres inſcriptis circulo figuris, & --

-- iuxta Neotericos.

2 *Poſteriores vero aliqui Octohordũ Harmonicum conſtituunt ex aſpectibus (præter numeratos tres antiquos) ſignatis in circulo à lateribus aliarum regularium figurarum, præter tres prædictas, nempè à lateribus Pentagoni, Octogoni, Decagoni ex coniunctione,*

& ex

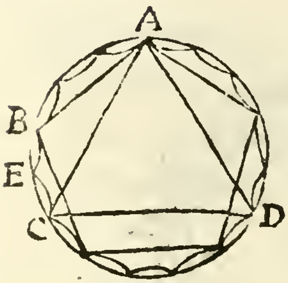
& ex oppoſitione Planetæ. Ita vt, ſi fingas Zodiaci circulum GIKL diuiſum in ε à decagoni latere G ε ſubtendente (diuiſa tota peripheria in 360) gradus 36; in λ ab imaginario latere octogoni ſubtendente arcum gradus 45; in δ à latere hexagoni ſubtendente 60, in Q à latere pentagoni ſub gr. 72; in L à latere quadrati ſub 90; in H à latere trianguli ſub gra. 120; & hiſce addas diametralem op-



poſitionem in K ad gradus 180, & ſuppoſitionem planetæ ad initium, & finem graduum 360; & ſic diuiſam circularem fidiculam diſiungas in G, & extendas in rectam eius ſimilem, quam habes in cit. Ap. 10, etiam in propoſitione 2, affirmeni fidiculam pulſatam & totam, & in partibus earum diuiſionum reſonaturam harmonicè, ac ſuauiſsime auribus. Hic ex aliquorū ſenſu hæc indicauimus, vt Tyrones doctrinā inſcriptionis figurarū in circulo ſuauiter hauriant, dum audiunt eā etiam in cæleſtibus harmonicè conſonantē.

Propoſ. XVI. Probl. XVI.

In dato circulo quindecagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcribere.



OPorteat in dato circulo ABCD quindecagonum æquilaterũ, & æquiangulum deſcribere. Deſcribatur in circulo A B C D trianguli æquilateri latus AC, pẽtagoni æquilateri AB. Qualium ergo totus circulus partium eſt quindecim, talium eſt A B C peripheria tertia circuli pars exiſtens, quinque; AB, quinta pars circuli exiſtens, trium; pars ergo
a propoſ. 30.3. BC duarum; quæ ſi in E [a] biſecetur, erit quælibet peripheriarum BE, EC decimaquinta pars circuli. Si ergo, ductis rectis BE, EC, eis æqua-
b propoſ. 2.3. les in continuum circulo rectas [b] aptemus, erit quindecagonum æquilaterum, & æquiangulũ deſcriptum. Quod facere oportuit.

§ I.

Vſus Aſtronomicus propoſ. 16 hu. cum opportunitate noſtræ methodi.

Ex inſcriptione Quindecãgoni- PRoclus *ad propoſ.* 8 *lib.* 1 *Eucl. ſic:* Qui deſcripſerunt in circulo per Polos tranſeunte Quintidecangulum, polorum Æquatoris à ſigniferi polis diſtantiam habent

bent. Quindecangulari ſiquidē latere ab inuicem diſtant. *Quem vſum facilè nunc Tyrones intelligent, dum, iuxta noſtram methodum, poſt applicationes lib. 6, interpoſitam acceperunt cognitionem ſphæræ armillaris ante reliqua elementa, inter quæ hoc hîc quartum eſt.*

guli diſtantia poli Aequinoctialis à Polo Zodiaci.

§ II.

PORISMATA.

Data ſemidiametro inuenire in circino proportionum latus Quintidecanguli circulo inſcribendi, & dato latere quintidecanguli, inuenire ſemidiametrū circuli circūſcribendi.

Satis eſt ipſa propoſitionis inſcriptio, vt propoſita poriſmata ſoluas, ò Tyro, iam inſtructus exemplis operationum è circino proportionum circa antecedentes huius li. 4 propoſitiones. Nam, quoniam decima quinta pars peripheriæ, in 360 gradus diſtributæ, eſt grad. 24, cui arcui ſubtenditur latus quinti decanguli, ſi datam ſemidiametrum interponas inter numeros circini 60, & 60, & accipias interuallum inter 24. & 24, id erit latus quintidecanguli inſcribendi circulo ſignato ex data ſemidiametro. Et contrariâ ratione, ſi datam rectam pro latere quintidecanguli interponas inter numeros circini 24, & 24, & accipias interuallum inter 60, & 60, erit id ſemidiameter, ad cuius longitudinem excitato iſoſcele ſuper dato latere, & facto centro iſoſcelis vertice, circulus deſcriptus ibit per extrema dati lateris, & in circulo deſcripto quindecies replicatum latus dabit quintidecangulum circulo inſcriptum.

§ III.

COROLLARIVM.

Super datâ Quintidecangulum excitare.

Eadem operâ ex antedictis didiciſti ſuper datâ rectâ quintidecangulum excitare, vt in corollarijs aliquibus alijs ad antecedentes hu. lib. propoſitiones indicatum eſt, poſt poriſmata è circino proportionum. Ducto occulto circulo, &c.

APPENDIX,

In qua vniuerſalia de qualibet figurà regulari inſcribendà, & circumſcribendà circulo.

§ I.

LEMMA, & PROBLEMA I.

Circulum geometricè demonſtratiuè diuidere in grad. 360 ex propoſitionibus huius libri 4.

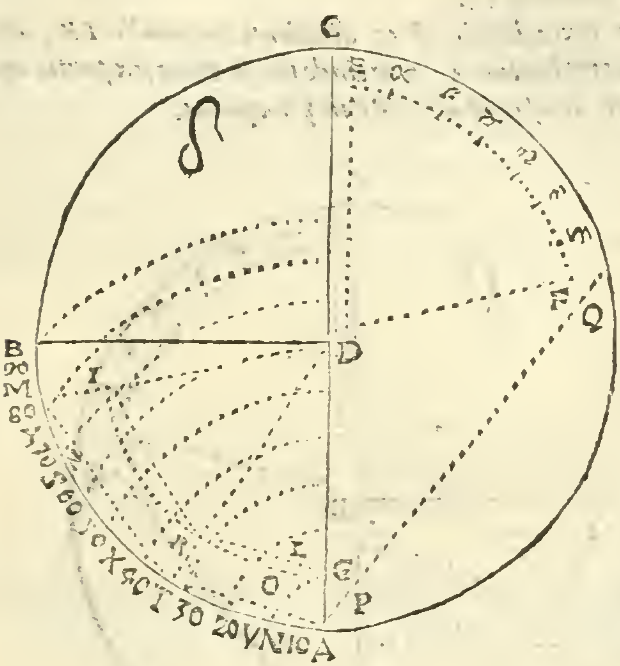
1 *Hoc lemma licet videatur ſatis conſtare ex § 2, 3, 4 ad propoſit. 9 lib. 1, tamen quia ibi pro praxibus è circino proportionum potius indicata ſunt fundamenta demonſtratiua, quæ ſupponunt inprimis hunc librum quartum, hic autem iam præceſſerunt propoſitiones, è quibus pendet geometrica circuli diuiſio, ideo in loco hìc planè iam demonſtrata circuli diuiſio breuiſſimè eſt exponenda.*

Forma demonſtrationis de more veterum geometricè philoſophantium eſſe poteſt quaſi reſolutoria. Scilicet: Factum iam ſit, *hoc eſt, ſuppono factam diuiſionem circuli in 360 partes, ſiue gradus omnes inter ſe æquales, ſi, dum circulum eundem geometricum diuido, eà diuiſio auſert 360 gradus, ſiue partes æquales, carpendo varios eorum graduum numeros, geometricè diuiſero circulum. Exemplum eſto in quadrante, ex quo reliquæ tertiæ partes diuiſæ intelligentur. Reponatur hìc figura ex initio Apiarij 12, & ex § 10 ad 9 propoſ. lib. 6.*

2 *Prima diuiſio geometrica circuli eſt in quatuor partes æquales, demonſtrata per inſcriptionem quadrati, & per propoſ. 6 huius lib. 4, continetq; quadrãtis AB 90 gradus ex 360 quadripartitis.*

Secunda diuiſio geometrica eſt in 6 partes æquales demonſtrata ex inſcriptione hexagoni, per 15 propoſ. hu. & corollar. & per applica-

plicationem ſemidiametri dati circuli ◡ A B C , ab ◡ A ad S , contineatq; arcus AS gradus 60 ex 360 in ſex æqualia diuiſis . Eritq; reliquus arcus SB, à 60 ad complementum 90, gradium 30, hoc eſt dimidium arcus AS.



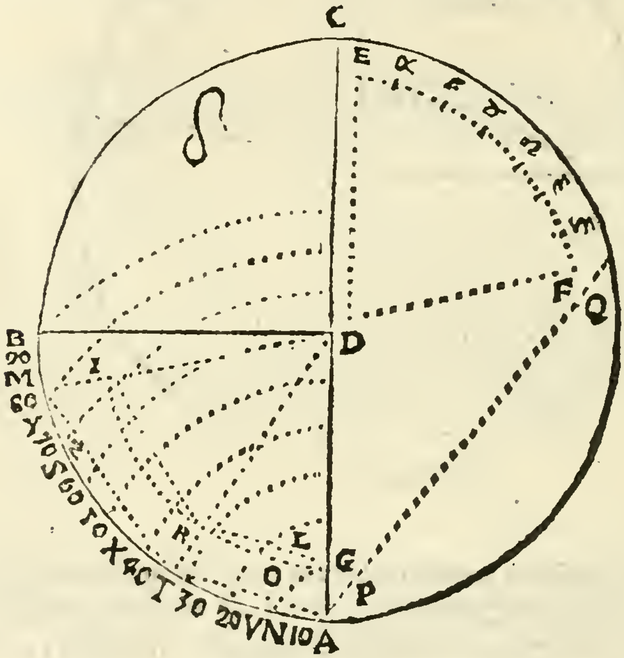
Tertia diuiſio erit per biſariationem arcus SA, applicando interuallum SB ex S in T , eritque quadrans AB diuiſus in tres partes æquales BS, ST, TA, quarum ſingulæ continent 30 gradus , ex tripartitis æqualiter 90 gradibus quadrantis AB.

Quarta diuiſio eſt ex prop. 30 li. 3 , ſiue ex 10 li. 1, per biſariationem ſingularum tertiarum quadrantis , hoc eſt ſingulorum arcuum AT, TS, SB, velut in V, X, Y, eritq; diuiſus arcus quadrantis AB in ſex partes æquales , quarum ſingulæ AV , VT , TX , &c. continebunt 15 gradus, ex diuiſis 90 in ſex æqualia.

Quinta diuiſio eſt ex prop. 11 hu. per inſcriptionem pentagoni in circulo ABC, ac ſubtendet latus pentagoni arcum graduum 72, diuiſis 360 totius circuli in 5 æqualia . Erit igitur latus pentagoni ſub-

ſubtendens arcum AZ, nempè duorum graduum vltra 70. At verò à Z ad Y, ideſt à gradibus 72 ad 75 (erit enim ex quarta diuiſione SY graduum 15 vltra 60) erit arcellus ZY trium graduum, ac proinde quinta pars vnius ſextæ quadrantis, ideſt ſpatij, ſiue arcûs SY graduum 15.

Igitur ſexta diuiſio eſt ex diuidente interuallo YZ, ideſt per quinquies replicatum 5; ac proinde per ſingulas ſex partes æquales quadrantis diuiſus eſt arcus AB in 30 æqualia.



3 *Vt à 30 perueniatur ad 90 gradus quadrantis (& ex quadruplicatis 90 ad 360 totius peripheriæ) facienda eſt ſeptima diuiſio ſcilicet arcelli YZ in tres partes æquales, ſiue tripartiendus eſt angulus ad centrum D ſubtenſus baſe circulari YZ. Pro qua triſariatione facit conchilis linea ingenioſiſſimè à Nicomede inuenta, & continuato ductu certiſſimè deſignata. Cuius vſum in praxi demonſtratà habes ad propoſ. 32 li. 1, § 11, 12. &c.*

Quoniam verò propter figuram hìc non amplam arcellus YZ triſa-

triſariandus perexiguus eſt, erit in figura, & inſtrumentis maioribus locus geometricæ demõſtratiuæ operationi, ac pro exiguis arcellis habes remedium geometricum in 1 to. ad propoſit. 10 § 5, & ad propoſ. 32, § 13.

Igitur triſariato arcu YZ, & ex ea triſariatione diuiſis in æqualia iam triginta inuentis partibus per ſextam diuiſionem, fiunt ter triginta, ideſt 90 gradus, qui quadruplicati dant totam peripheriam diuiſam in 360 partes. Quarũ numerum cùm præmiſſæ inſcriptiones figurarum ex hoc lib. 4, & biſariationes, & triſariationes. &c. præcisè, ac geometrice peripheriam carpendo, expleuerint, factum eſt, quod propoſitum, ac ſuppoſitum fuit in hoc lemmate.

§ II.

LEMMA, & PROBLEMA II.

Chordas arcuum diuiſi quadrantis, vel ſemicirculi traducere in vnam rectam lineam.

LIcebit vltra exemplum hic à vobis poſitum in diuiſione arcuum quadrãtis, accepta diuiſionum interualla etiam in ſemicirculum traducere, deinde ab A diducto circino ad ſingulas diuiſiones (etiam minutorum vltra gradus, ſi figuræ modus ferat) erunt ſingula interualla ſubtenſarum ſecanda in diametro AC, ceu vides factum in figura, translatis ſaltem interuallis per denos gradus, velut A 10 in AG, A 20 in AL, &c. A 60 in AD. &c. Sic ſemel diuiſa vna recta erit vſibus eximijs ad eximiorum problematum ſolutionem, vt partim vidiſti in 1 Tomo, partim in antecedentibus in hoc 3 to. & mox in ſequentibus Problem. & Corollar.

§ III.

Corollarium ad vſus Aſtronomicos.

PRo vſibus Aſtronomicis, vbi calculi, & tabulæ habentur omnium chordarum, & ſinuum, habes ab antecedenti quadrãtis diuiſione ex hoc 4 libro, demonſtratiuè poſita fundamẽta. Vide hanc ad rem præ alijs noſtrum Clauium poſt comment. in Theodoſij ſphærica, vbi ante, & poſt tabulam ſinuum plura habet ex Ptolomæo, & alijs, quorum intelligentia breui compendio noſtræ diuiſionis antecedentis aperitur, & vnde plura deducuntur ad ditandum hunc librum 4. Indicamus, quæ alij poſt nos addant elementarijs propoſitionibus, dum nobis nunc ſatis nec otij, nec valetudinis, nec ætatis eſt, præſertim ad aliã vtiliora poſteritati tradenda properantibus. Igitur habes hic (vt cum Maurolyco affirmem) omnem chordimetriam, quæ ad planorum triangulorũ ſcientiam neceſſaria eſt. *Pro quo negotio alij prolixas ambages extendunt, & Tyrones abſterrent. Videre tamen poteris, ſi libuerit, præter alios Clauium in propoſ. 16 de ſinubus vbi ad copiam, & varietatem habes ſupputationem arcuum ſemicirculi in partibus diametri. &c.*

§ IV.

PROBLEMA.

Data ſemidiametro, ſtatim latera omnia figurarum regularium inuenire. Exempla aliqua extra vſitatiſſima.

1 *PRoblema vniuerſale de inſcriptione cuiuslibet regularis figuræ in circulo hactenus non ſolutum videtur in Geometrica*

trica philoſophia, & circa illud, ab antiquis vſq; ad hæc noſtra ſæculis, primaria doctiſsimorum virorum ingenia varijs inuentis laborarunt, nec videntur aſſecuti quod ſunt perſecuti. Apud nos eſt quaſi corollarium, quod deducitur ex §§ 10, 11, 12 ad 9 propoſ. lib. 6 in ſecundo Tomo, vbi docuimus à lineà circulari partem imperatam auferre, & datum angulum rectilineum in quotlibet, & cuiuſuis proportionis inter ſe partes diuidere.

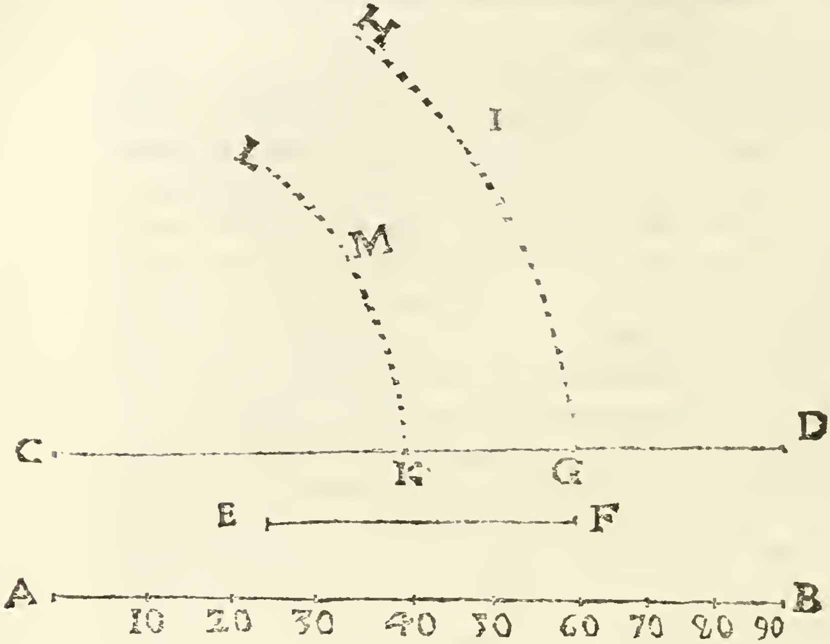
Nam regularium figurarum circulo inſcribendarum latera ſunt baſes ſubtenſæ tum angulis, tum arcubus peripheriæ diuiſis, ac eorum laterum quantitas, & diuiſio ſpectatur ex quantitate, & diuiſione angulorum & arcuum. Nomen ipſum figuræ inſcribendæ, velut heptagoni, indicat quotæ parti peripheriæ circularis, nempè ſeptimæ, ſit ſubtenſum latus figuræ heptagonicæ, èaq; ſubtenſa eſt ipſius lateris quantitas. Igitur ritè geometricè (vt habes in anteced.lem. 1) diuisà peripherià circulari tam in gradus, quàm in minuta, conſequitur vt lateris cuiuſcumq; regularis figuræ circulo inſcribendæ iuſta quantitas accipi poſsit, & circulo inſcribi.

2 *Quoniam verò nos inſcriptiones figurarum regularium in circulo inprimis in gratiam militarium virorum inſtituimus, vt facilè, & ſine ſenſibili differentià, quà licet in phyſicis materijs, geometricè figuras regulares propugnaculorum, vel oppidorum deſcribere poſsint; ideo (quemadmodum fecimus in problematis aliquibus anteced.hu.li.4, & ad 9 prop.lib.6) poſſemus & hoc ſoluere organicè in vſu circini proportionum; tamen varietatis gratia libet operationem adducere ad formam quandam geometricã adhuc magis, quàm ex circino proportionum, idq; quantum ſatis eſt vſibus, & operationibus vel artium ciuili vitæ vtilium, vel praxibus Geometricis, Gnomonicis, Aſtronomicis. &c.*

Ac quod attinet ad organicam operationem in circino proportionum, ſtatim ſoluitur vniuerſale hoc problema. Nam ſemidiametro interpoſita inter 60, & 60, in circini aperturà omnia interualla inter quoslibet ſimiles numeros exhibent latera totidem figurarum inſcribendarum. &c. Sed veniamus ad exemplum aliquod particulare, velut ad Nonanguli, & Heptanguli regularium in circulo inſcriptiones.

3 *Diuiſo igitur geometricè, ac demonſtratiuè circulo ex præ-*

cedenti 1 lemmate, transferantur, per vſum tertiæ propoſ. li. 1, chordæ arcuum quadrantis in vnam rectam lineam, vt habes indicatum in figura lemmatis 2 proximè antecedentis, & ad propoſ. 9 li. 6, ſitq; recta AB diuiſa ſaltem per denos gradus. In exemplū. Ducatur indefinita CD. In dato circulo ſi ſit deſcribenda figura, præter



iā deſcriptas in propoſitionibus huius li. 4, quæ latus habeat ſubtendens numerum graduum vel integrorum, vel cum additione particulæ alicuius gradùs facilè partibilis, erit negotium geometricum expeditiſſimum. Finge dati circuli ſemidiametrū eſſe EF, & Nonagonum regulare eſſe inſcribendum, cuius latus ſubtendit gradus præcisè 40 in quadrāte circuli. Interuallo A 60, & centro C ducatur arcus occultus indefinitus GH; & interuallo ſemidiametri EF fiat ſectio è G in I. Rurſus interuallo A 40, centro G ducatur arcus occultus indefinitus KL. Tum aptatà regulà ad C, I, vbi ea ſecabit arcum KL in M, erit interuallum KM ſubtenſa graduum 40; hoc eſt latus Nonagoni deſcribendi in circulo, cuius ſemidiameter eſt EF, idest GI ſubtenſa arcui graduum 60.

Patet demonſtratio iuxta explicata in § 9 ad 4 propoſ. lib. 6 vbi

cau-

cantiones ſunt circa vſum demonſtratiuũ pro ea circini facie, in quã traductæ ſunt chordæ graduum, ſiue arcuum quadrãtis. Ductà enim imaginarià CI, & ſubtenſis MK, IG, factis duobus iſoſcelibus CKM, CGI, quorum maioris latera CG, CI ſecta ſunt in proportione eiuſdem interualli CK, CM, & parallelæ ſunt baſes ſubtenſæ KM, GI (per 2 ſexti, &c.) propterea æquiangula ſunt triãgula duo iſoſcelia, &, per 4 eiuſdem ſexti, vt CK ad KM, ſic CG ad GI, & permutando vt CK ad CG, ſic ſubtenſa KM ad ſubtenſam GI. Vt ergo CK eſt latus Nonagoni in circulo, cuius ſemidiameter, ſiue latus hexagoni eſt CG, ſic ſubtenſa KM eſt latus nonagoni in circulo, cuius ſemidiamater, ſiue latus hexagoni eſt ſubtenſa GI, ideſt EF.

4 *In exemplo figuræ, cuius latus ſubtendat, præter integros gradus, etiã aliqua minuta, in quæ, vel propter exiguitatem arcelli, vel propter genus ipſum partitionis non facilè liceat fieri diuiſionem, confugiendum erit ad remedium, de quo in* § 13 *ad propoſ.* 32 *lib.* 1, & *in diuiſione vtendum erit æſtimatione aliquà ſine ſenſibili incommodo operationis vel phyſicæ, vel geometricæ, vt aſſolet in eiuſmodi praxibus, etiã apud ſummos Geometras, in primis apud Archimedem, qui diametri particulam pauxillo minorem ſeptimà, ferèq; ſeptimam docet ſumere ad æqualitatem triplicatæ diametri cum peripheria circuli.*

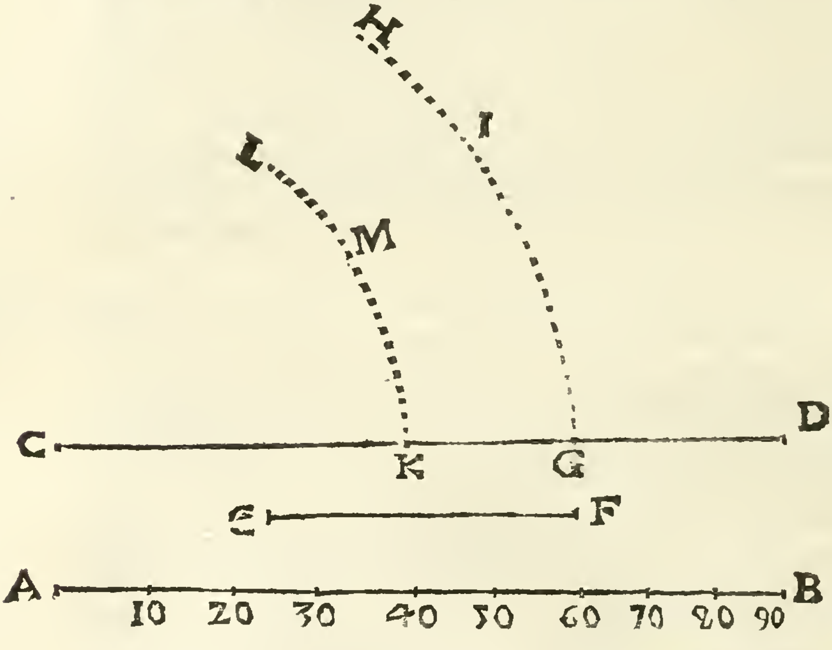
Sic pro inſcriptione Heptagoni, cuius latus ſeptimam partem peripheriæ circularis ſubtendit, ſumendum erit interuallum ab A ad arcum graduum 51, & *præterea particulas* $\frac{3}{7}$ *vnius gradùs. Quare ſeptifariandus erit arcellus vnius gradus per adminicula indicata in citato* § 13 *ad* 32 *prop. li.* 1.

Ex quibus hactenus in hoc problemate dictis, & indicatis habes extra vſum circini modum geometricum non contemnendum, & vniuerſalem proportione vſurpandum pro alia qualibet regulari figurà circulo inſcribenda.

§ V.

Corollarium I vniuerſale de circumſcriptione circuli circa datam quamlibet regularem figuram.

Conuerſum eſt hoc antecedentis vniuerſalis problematis, & conuerſo modo ſoluendum. Nam datum figuræ latus iuxta nomen, quod ſonat, velut Nonanguli, quod indicat ſubtenſam nonæ parti circuli diſtincti in 360, ideſt latus 40, inter-



uallo A 40, factâ ſectione è C in K, & ducto arcu KL, interpoſito latere Nonanguli à K ad M, & iunctâ CM, ea productâ ſecabit in I terminum ſemidiametri; cuius interuallo ductus circulus circũſcribet Nonangulum ex latere KM. Proportionali modo de alijs quibuslibet regularibus figuris circulo circumſcribendis.

§ 6.

§VI.

Corollarium 2 vniuerſale. In gratiam militarium virorum. Super data qualibet recta quālibet regularem figuram excitare.

Conſequitur hoc 2 corollarium è primo. Nam ſuper datà videndum eſt quam velis figuram, & pro numero, quem ſonat figuræ nomen, accipienda eſt diſtantia ab A ad numerum indicatum; velut ſi ſuper data velis excitare nonagonum, accipiendum eſt interuallum A 40, eoq́; ſecandum ex C in K, & datæ interuallum reponendum è K in M. &c. vt in anteced. problemate, & coroll. Inuentà enim ſemidiametro GI, circuloq; occulte deſignato, datæ verb. gr. EF quantitas in circulo applicata, & replicata per orbem peripheriæ, conſtituet figuram optatam facillimè, atq; expeditiſſimè pro forma propugnaculi, oppidi. &c.

Sic & pro alijs artibus, atque etiam ſcientijs aliquibus Mathematicis ſuper data excitabitur illico figura quælibet regularis.

§VII.

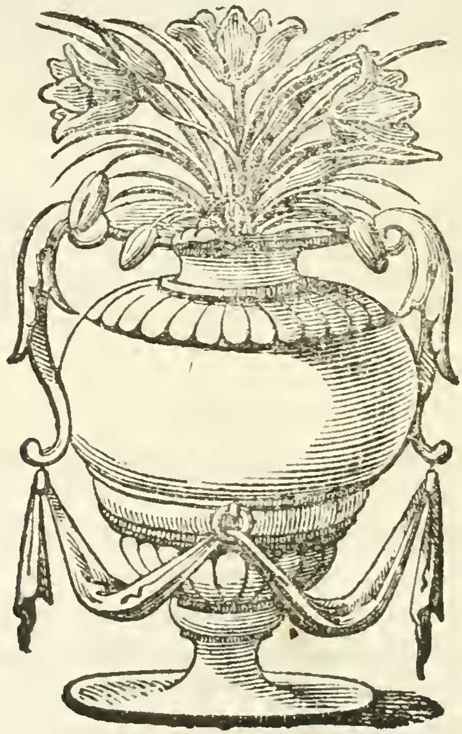
Vſus 4 hu. elementi pro figuris ſolidis.

Pro dimenſione quinq; regularium corporum opus eſt, præter cætera, inuenire (vt videbis in Breuiarij noſtri Geometrici ſectione 3) ſemidiametros circulorum ambientium latera earum ſolidarum figurarum; quam ad rem faciunt propoſitiones huius 4 li. iuxta noſtra poriſmata. Et quemadmodum planæ regulares figuræ in hoc 4 li. inſcribuntur, & circumſcribuntur circulo, ſic quinq; ſolidorum regularium, & latera, & figuræ ſphæra circumſcribuntur. &c. in vltimis elementis.

Quæ tamen ſolidorum regularium mutuæ inſcriptiones (quemadmodum & præcipuæ theoriæ circa ea regularia corpora) quoniam *Theorias vſui aptas perſequimur.*

exigui

exigui ſunt vſus, & parum applicabiles artibus, & ſcientiis admirationem captantibus per ea, quæ ſenſibus obiiciuntur, ideo à nobis in poſtremis habentur, qui Geometricarum theoriarum eas præcipuè perſecuti ſumus, quarum vſus varii, ac iucundi ſpectari poſſunt.



ELEMENTVM SEXTVM

Ex noſtra Methodo, SECVNDVM EX VETERI.

---

§ I.

SCHOLIA.

Vniuerſalitas, vtilitas, & materia pro ſeptimo Ærarij Tomo indicatæ partim hic, partim in fine huius 2 elementi.

I.

EXiguus mole, ac numero propoſitionum liber hic ſecundus, ingens, & copioſus eſt fructibus, qui ex eo percipiuntur. Nam Algebræ (quæ arithmeticæ philoſophiæ admiranda ſpecies eſt) fons præcipuus dimanat à præcipuis huius libri propoſitionibus, teſte Ioanne Butcone, atq; alijs. Vide in Apiarijs noſtris Philoſoph. Math. Ap. 11, Prog. 1 cap. 2. Petrus Antonius Cataldus in Euclide ſuo applicat huius libri propoſitiones aliquas problematibus Algebraicis. Quorum exempla varia iuſtum Tomū conflare poſſunt. Inde haurias, & adde pro auctarijs ad Tomum campos indicatos hic infer. Schol. 5. Præterea (vt ad aliquas indicabo) ex aliquibus propoſitionib. hu. li. pendēt vniuerſæ Algebra e 2 ko elemento.

Geometriæ ſpeculatiuæ, & practicæ de planis, & ſolidis præcipua problemata, & theoremata.

II.

Numeris expedire aliquas Prop. hu. 2. lib.

Barlaamus Monachus, qui græcè ſcripſit, demonſtrat in numeris decem primas huius libri propoſitiones. Idem præſtant & Campanus poſt propoſitionem 16 lib. 9, & Clauius poſt 14 prop. eiuſdem libri. Vide demonſtrationes Barlaami apud Commandinum lib. 9 Euclid. poſt propoſ. 15. Igitur optimum factu fuerit, vt Tyrones leuentur tædio aliquo geometricarum propoſitionum, earumq́; veritatem facilius videant in numeris, ſimplici exemplo id oſtendere, quod geometricè ab Euclide demonſtratur. Id quod à nobis fiet inferius ex Barlaami, vt plurimum, numeris. Vide etiam apud Clauium varios, ac breues modos eaſdem propoſitiones geometricè demonſtrandi.

III.

Primum principiũ pro demonſtrat. hu. 2. li.

Propoſitiones huius libri demonſtrãtur ferè omnes ex ipſa conſtructione. Quod & Clauius ad 9 propoſ. huius notauit. Videntur huius libri pleræq́; demõſtrationes habere vim in eo axiomate: Totum eſt æquale ſuis partibus ſimul ſumptis. *Applica in vſu aliquarum ex ijs. Nos aliquas demonſtrationes facillimè expediemus cum vſu geometrico centri grauitatis in Epilogo Planimetrico, quem habes in fine primæ partis hu. To. 2 Ærar.*

IV.

Ex propoſitionibus huius lib. 2 eleuatis ad ſolida parallelepipeda, cubos, &c. (vt videbis in exemplis ad, & poſt eas) habes auctarium Stereometricum ad lib. 11 Element.

V.

Campos Geometricos, & Stereometricos ex hoc 2 elem. ad conflandum ſeptimum tomum vide in fine à § 20 ad ſequentes.

ELE-

ELEMENTVM SECVNDVM.

DEFINITIO I.

OMne parallelogrammum rectangulum contineri dicitur à duabus rectis lineis angulum rectum comprehendẽtibus; *Vt in propoſit. 1 parallelogrammum BH continetur à lineis BC, BG, quæ angulum rectum continent.*

§ II.

SCHOLIA.

I.

CLauius, & ad hanc 1 definit. & in Geom. Pract. lib. 4. cap. 11, & alij docent comprehenſionem parallelogrammi rectanguli eſſe ſimilem multiplicationi vnius numeri per alterum. Ac quemadmodum in multiplicatione mutuà duorum numerorum producitur numerus planus in formam rectangulam diſpoſitus, ſic ex ductu vnius lateris in alterum figuræ rectangulæ producitur quantitas areæ rectangulæ. *Parallelogrãmi conflatio ſimilis multiplicationi, &c.*

II.

Vide apud nos in Apiar. 11 Progym. 3 cap. 1 differentiam inter multiplicare quantitatem per quantitatem, & ducere quantitatem in quantitatem, ac quemadmodum alterum diſcretæ, alterum continuæ quantitatis ſit proprium. *Differũt multiplicare, & ducere quãtitatem in aliam.*

III.

Ad condiendam hanc 1 definit. Tyronibus, huc aduoca quaſi vſum eius aliquem vel militarem, vel geometricè practicum, quorũ *Vſus indicati 1*

 exempla

definitionis. *exempla habes in cit. Ap. 11, Prog. 3, cap. 9. Velut de agmine militum vel quadrato, vel rectangulo, quorum numerum ſtatim elicies, ſi duas eorum ſeries in angulum, ſiuè in vnum militem, concurrentes multiplices inter ſe; productum ex ijs erit numerus militum eius agminis, quod continetur quodammodo ſub geminà exteriori ſerie, quaſi ſub duabus lineis rectum angulum conficiẽtibus.*

DEFINIT. II.

Parallelogrammi ſpacij vnum eorum, quæ circa diametrum ſunt parallelogrammorum, cum duobus complementis gnomon vocetur.
Vt in propoſit. 5. figura CBFGHL contenta parallelogrammis DL, HF, & quadrato DC.

§ III.

SCHOLION.

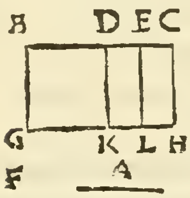
Gnomonis nomen geometricũ vnde. *Figuræ in hac ſecunda definitione ab Euclide explicatæ nomen gnomonis inditum eſt à ſimilitudine geminæ regulæ in angulum rectum compactæ, cuius altero latere collocato parallelως horizonti, alterum perpendiculariter erectum perſtat in ſimilitudinem gnomonis, ſiue ſtyli horas indicantis.*

Pro-

Propoſ. I. Theor. I.

Si fuerint duæ rectæ lineæ, quarum altera ſecetur in quotcunq; partes, rectangulum ab ipſis contentum æquale erit rectangulis ab inſecta, & ſingulis ſectæ partibus contentis.

Sint duæ rectæ A, BC, quarum BC ſecetur vtcunq; in D, & E. Dico rectangulum lineis A, & BC contentum æquale eſſe rectangulis contentis ABD; & A, DE; & A, EC. [a] Ducatur enim ex B ipſi BC ad angulos rectos BF, fiatque [b] ipſi A æqualis BG; & [c] per G ipſi BC parallela ducatur GH; per D, E, C verò ipſi BG parallelæ ducantur DK, EL, CH. Eſt autem BH æquale ipſis BK, DL, EH. Nam BH eſt rectangulũ ipſarum A, BC; Continetur enim ipſis BC, BG, & BG eſt ipſi A æqualis. BK eſt rectangulum ipſarum A, BD; Continetur enim rectis GB, BD: ſiquidem GB ipſi A æqualis eſt. DL eſt rectangulum ipſarum A, DE; nam & DK æqualis eſt ipſi A. & ſimiliter EH eſt rectãgulum ipſarum A, EC. Eſt ergo quod A, BC continetur æquale illis, quæ A, BD: A, DE; & A, EC continentur. Si ergo fuerint duæ rectæ, &c. Quod oportuit demonſtrare.



[a] propoſ. 11.1.
[b] propoſ. 2.1.
[c] propoſ. 31.1.

§ 4.

§IV.

SCHOLIA.

I.

SI ſint duo numeri 6, 4 (quaſi duæ rectæ lineæ) quorum alter 6 ſecetur in quotcumq; partes, velut in tres æquales 2, 2, 2, productum (quaſi rectangulum) 24 ex multiplicatione inter ſe ipſorum 6, 4, æquale eſt productis (quaſi rectangulis) ex 4 in ſingulos 2, nempè 8, 8, 8, ſimul additis in vnam ſummam (quaſi rectangulum) nempe ipſi 24.

II.

Maurolycus in repaſtinatione poſt lib. 1 Arith. vniuerſaliter, & breuiter: Quod fit ex quouis numero in quotlibet numeros, æquale eſt ei, quod fit ex illo in aggregatum ex his.

III.

Quoniam propoſitiones huius 2 lib. apud Euclidem demonſtrãtur ex propoſitionibus libri 1, habes & aliter, ac breuius demonſtratas poſteriores ex prioribus huius libri 2, ac ferè ex primo, &c. Vnde varietatem, & facilitatem pro tyronibus habeas.

IV.

Huius 2 li. propoſitiones, præcipuè 1, 2, 3, 4, &c. 11, 14 aliter, facilè, ac euidenter demonſtratas ex vſu geometrico centri grauitatis vide in Epilogo Geometrico in fine 1 par. hu. 3 To. §§ 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

V.

Prima hu. li. 2 propoſ. demonſtrata vniuerſaliſſimè de toto genere quantitatis, diſcretæ, continuæ, planæ, ac ſolidæ.

E*X Maurolyco, propoſ. 1. par. 2, lib. 1 Arith.* Si fuerint duæ quantitates, quarum altera in quotlibet ſegmenta ſecetur; illud, quod ex ductu alterius in alterã fiet, æquum

æquum erit his, quæ ex ductu quantitatis indiuiſæ in vnumquodq; ſegmentorum diuiſæ pariter acceptis producentur. *Quam propoſitionem in lineis demonſtrat Maurolycus, nos facilius in notis arithmeticis vulgatæ Logiſticæ iam oſtendimus in 1 Schol. hic, & numeri apud nos poſiti ſunt tam pro ſuperficiebus ex lineis, quàm pro ſolidis ex lineis, & ſuperficiebus. Vide & in fine huius 2 li. & in Epilogo planimetrico. Itaq; ſi 4 ſit pro altitudine, & 6 ſit pro area rectanguli diuiſi in tria minora rectangula 2, 2, 2, erit productum ex ductu rectanguli 6 in 4 parallelepipedum conſtans ex 24 cubulis æquale tribus parallelepipedis 8, 8, 8 ſimul additis, quæ ſingula conflantur ex ductu areæ 2 in altitudinem 4. &c.*

Quantitates producentes in continuà intellige hic apud nos lineares, & planas rectangulas, ex quibus ſuperioris, & amplioris generis quantitates generentur, ex lineis plana rectangula, ex planà in lineas ductà confletur ſolida quantitas parallelepip.

VI.

Vſus huius 1 propoſitionis, & ſequentium aliquarum eſt in practica Arithmetica, ſiue logiſtica, circa multiplicationis eam ſpeciem, quam vulgo vocant: A ſcauezzo, *ſiue per partes, quando ſcilicet duorum numerorum alter valde copioſus diuiditur in partes (facilioris operationis gratia) & ſingulæ partes per alterum datorum numerorum integrum multiplicantur, ac producta inter ſe vnam in ſummam adduntur.* *Vſus logiſticus 1 propoſ. & ſeq. aliquot.*

VII.

Pro condimento, & vſu huius, & aliquot ſequentium propoſitionum vide exempla, praxes, theorias in Apiario 11, Progym. 3, cap. 4. Quibus adde, &, quà licet, applica numeris theoremata Commandini addita huic 1 propoſ. Eucl.

Pro-

Propoſ. II. Theor. II.

Si recta linea ſecetur vtcunque, erunt rectangula, quæ tota & partibus continentur, æqualia quadrato, quod fit à tota.



RECta AB ſecetur vtcunq; in C. Dico rectangula ipſis AB, AC, & AB, BC contenta, æqualia eſſe quadrato ipſius AB. [a] Deſcribatur ſuper AB quadratũ ABDE, & ducatur per C ad vtrãq; AD, BE parallela CF. [b] æquale ergo eſt AE ipſis AF, CE. Eſt autem AE quadratum ipſius AB, rectangulum ipſarum BA, AC eſt AF; Continetur enim ipſis AD, AC; & eſt AD ipſi AB æqualis. CE continetur AB, BC; Eſt autem BE æqualis ipſi AB, Ergo quæ AB, AC; & AB, CB continentur æqualia ſunt quadrato ipſius AB. Si ergo recta linea &c. Quod demõſtrare oportebat.

a *propoſ.* 46. 1.

b *propoſ.* 1. 2.

§ V.

SCHOLIA.

I.

N*Vmerus 6 diuidatur in 2, & 4. Ex ductu ipſius 6 in 2, & in 4 producta 12, & 24. inter ſe addita conficiunt ſummam 36, cui æquale eſt quadratum ex 6, nempè 36.*

Pro-

II.

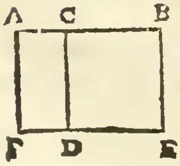
Propoſitio 2 facta vniuerſaliſſima de omni genere quantitatis etiam ſolidæ.

SI quantitas quæpiam vtcunq; ſecetur, producta ex tota, & ſegmentis erunt æqualia producto ex tota. *Habes pro diſcreta quantitate in numeris 6, 2, 4, & pro planis in quātitate continuā. Valet noſtra vniuerſalis etiam pro ſolida quātitate. Nam 216 cubo (qui ſit è 6, id eſt è quadrato ipſius 6, quod eſt 36, ducto in 6) ſunt æqualia parallelepipeda 144, 72 producta è 6 in partium 2, 4 rectangula 12, 24; &c. addita enim 144, 72 inter ſe conficiunt 216.*

Vide inferius in § 21, num. 3 aliter eleuatam hanc 2 prop. &c.

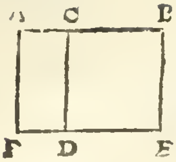
Propoſ. III. Theor. III.

Si recta linea vtcunque ſecetur, erit rectangulum tota, & vna parte contentum æquale rectangulo partibus contento, & quadrato à dicta parte deſcripto.



REcta AB ſit vtcunq; ſecta in C. Dico rectangulum AB, BC contentū, æquale eſſe & rectangulo AC, CB, & quadrato BC contento. [a] Deſcribatur enim à BC quadratum CDBE, producaturq; ED in F; & [b] per A vtrique CD, BE parallela ducatur, AF: [c] Ergo AE æquale eſt ipſis AD, CE. Eſtq; AE rectangulum ipſis AB, BC contentum: continetur enim ipſis AB,

a propoſ. 46. 1.
b propoſ. 31. 1.
c propoſ. 1. 2.



d *deſin.* 27.1. BE, & [d] eſt BE ipſi BC æqualis. AD verò eſt rectangulum ipſarum AC, CB; eſt enim DC ipſi CB æqualis. D-B denique eſt quadratum ipſius CB. Rectangulum ergo AB, BC contentum æquale eſt AC, CB contento, vnà cum quadrato ipſius CB. Si ergo recta linea, &c. Quod demonſtrare oportuit.

§VI.

SCHOLIA.

I.

NVmerus 6 diuidatur in 2, & 4. numerus 12, qui fit ex toto 6, & parte 2, eſt æqualis numero 8 ex partibus 2, & 4 producto, & numero quadrato 4 ex parte 2; additi enim inter ſe numeri 8, & 4 conficiunt 12.

II.

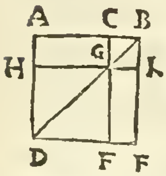
Propoſitio 3 vniuerſaliſſima etiam ad ſolida.

SI quantitas vtcumq; ſecetur, erit productum ex totâ, & vna parte æquale producto ex partibus, & producto ex dictâ parte. *Numerus planus, qui veritatem huius 3 propoſitionis oſtendit in planis, rectangulis, & quadrato, factus ſolidus oſtendet etiam in ſolidis parallelepipedis, & in cubo. Sit 6 pro tota linea, 2, & 4 pro eius partibus. Rectangulum 24 ex tota 6, & parte 4 fiat parallelepipedum 96 ducto plano in partem, ſeu altitudinem 4; ex quadrato 16 partis 4 fiat cubus 64. ex rectangulo 8 partium 4, & 2 fiat parallelepipedum 32. iunge cubum 64, & parallelepipedum 32, faciunt ſummam 96 æqualem parallelepipedo ex tota 6, & parte 4. Altitudo ſemper eſt altera partium, hic 4.*

Pro-

Propoſ. IV. Theor. IV.

Si recta linea vtcunq; ſecetur, quadratum totius æquale erit & partium quadratis, & rectangulo bis partibus contento.



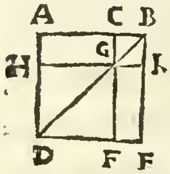
Recta AB ſecetur vtcunque in C. Dico quadratum ipſius AB æquale eſſe quadratis ipſarum AC, CB, & rectãgulo bis AC, CB contento. [a] Conſtituatur enim ſuper AB quadratũ ADEB, ducaturq; BD; ac [b] per C vtrique AD, EB ducatur parallela CF; per G verò vtriq; AB, DE parallela HK. Et [c] quia CF, AD parallelæ ſunt, in ipſaſq; incidit BD, [d] erit externus angulus BGC æqualis interno, & oppoſito ADB: [e] ſed ADB eſt æqualis ipſi CBD, quòd & latus BA lateri AD ſit ęquale; erit igitur & CGB angulus, æqualis GBC angulo. [f] Quare & latus BC lateri CG æquale erit: [g] ſed & CB ipſi GK, & CG ipſi KB eſt æquale; erit ergo & GK ipſi KB æquale: æquilaterum ergo eſt CGKB. Dico quod & rectangulũ. Cum enim CG, BK parallelæ ſint, in ipſaſque incidat BG, erunt [h] anguli KBC, GCB æquales duobus rectis: [i] rectus autem eſt KBC, ergo & GCB rectus erit. [k] Quare & qui ex aduerſo CGK, GKB

a propoſ. 46.1.
b propoſ. 31.1.
c per ſtruct.
d propoſ. 29.1.
e propoſ. 5.1.
f propoſ. 6.1.
g propoſ. 33.1.
h propoſ. 29.1.
i ax. 27.1.
k propoſ. 34.1.

recti erunt; rectangulum igitur eſt CGKB. Demonſtratum autem eſt quod & æquilaterum: quadratum [l] ergo eſt; & eſt à CB deſcriptum. Eandem ob cauſam & HF quadratum eſt;& eſt ab HG deſcriptum, hoc eſt ab AC. Sunt ergo quadrata HF, CK ab ipſis AC, CB deſcripta. Et quia AG ipſi GE [m] æquale eſt, eſtque AG quod AC, CB continetur; ſunt enim GC, CB æquales; erit & GE æquale AC, CB contento. Ergo AG, GE æqualia ſunt bis AC, CB contento. Sunt autem & HF, CK quadrata ipſarum AC, BC: quatuor ergo HF, CK, AG, GE æqualia ſunt & quadratis ipſarum AC, CB, & rectangulo bis AC, CB contento. Sed HF, CK, AG, GE conſtituunt totum ADEB, quod eſt quadratum ipſius AB. Quadratum ergo ipſius AB æquale eſt quadratis ipſarum AC, CB, & rectangulo bis AC, CB contento. Si ergo. &c. Quod demonſtrare oportuit.

l def. 27. 1.

m prop. 43. 1.



Alia demonſtratio.

DIco quadratũ ipſius AB æquale eſſe quadratis partium AC, CB, & rectangulo bis AC, CB contento. In eadem figura cùm BA, AD ſint ęquales, [a] erunt & anguli ABD, ADB æqua-

a propoſ. 46. 1.

æquales. Et [b] cum omnis trianguli tres anguli æquales ſint duobus rectis, erunt & trianguli ABD tres ABD, ADB, BAD æquales duobus rectis. [c] & eſt BAD rectus: ergo reliqui ABD, ADB vni recto æquales; cumq; ſint æquales, erit vterque ſemirectus. [d] rectus autem eſt BCG, eſt namq; æqualis angulo oppoſito ad A, reliquus ergo CGB ſemirectus eſt: [f] igitur æquales ſunt CGB, CBG: [g] quare & latera BC, CG æqualia erunt: [h] ſed CB æquale eſt ipſi KG, & CG ipſi BK: ergo CK eſt æquilaterum; [i] cumq; habeat angulum CBK rectum, quadratum erit CK, & quidem quod fit ex CB. Eandem ob cauſam quadratum eſt FH, eſtq; æquale illi, quod fit ex AC: ſunt ergo CK, HF quadrata, æqualiaque quadratis ipſarum AC, CB. Et [k] cùm AG, EG æqualia ſint, ſitq; AG id, quod AC, CB continetur, ſunt enim CG, CB æquales; ergo EG æquale eſt contento AC, CB: igitur AG, GE æqualia ſunt bis AC, CB contento. Sunt verò & CK, HF æqualia ~~ſunt~~ quadratis ipſarũ AC, CB: Ergo CK, H,F, AG, GE æqualia ſunt quadratis ipſarũ AC, CB, & bis AC, CB contento. ſed CK, HF, AG, GE totum AE conſtituunt, quod eſt ipſius AB quadratum. Ergo quadratum ipſius AB æquale eſt quadratis ipſarum AC, CB, & rectangulo bis AC, CB contento. Quod oportuit demonſtrare.

b propoſ. 32.1.
c per ſtruct.
d per ſtruct. & per 29.1.
f propoſ. 32.1.
g propoſ. 6.1.
h propoſ. 33.1.
i per ſtruct.
K propoſ. 43.1.

§ VII.

SCHOLION I.

1 *Magni latent theſauri in hac 4 huius libri propoſitione. Aliquem indicabo in ſequentibus Scholijs ex noſtris comentationibus, & praxibus ad vſus magni momenti. Clauius de hac (licet non ad hanc) ſic:* Quis credat per demonſtrationem ſciri poſſe quid producatur ex radice quadrata numeri 8 ad radicem quadratam numeri 18 adiecta, cum vtraq; radix incognita ſit, & nulla ratione ex primi queat, quod illa paulo minor ſit quam 3, hæc verò paulo maior, quã 4? & tamen ſumma, quæ ex vtraq; fit, colligitur ex vi propoſitionis 4 huius libri, radix quadrata numeri 50, quæ paulo minor eſt, quam 7. *Vnico exemplo oſtendit miram vim huius propoſitionis in vſu numerorum (quos vocant) ſurdorum, qui ſcilicet nullo modo exprimi poſſunt, ceu ſunt radices numerorum non quadratorum, vel non cubicorum. Exempla vſuum Algebraticorum huius 4 propoſ. vide in Euclide Italico Petri Antonij Cataldi.*

Radices algebraticæ ſurdæ eruũtur ex hac 4 propoſ.

Exẽpla apud quem.

2 *Demonſtratio huius 4 propoſit. patet in numeris ſic. Numerus 6 diuidatur in duas partes 4, & 2, fiant quadrata ſingularum partium, ipſius 4 quadratum 16, ipſius 2 quadratum 4: fiant rectangula geminata, ſiue producta ex partium ductu inter ſe; ex ductu ipſius 2 in 4 producitur 8, ex iterata earundem partium inter ſe multiplicatione fit rurſum 8. Addantur inter ſe duo quadrati numeri 4, 16, & duo producta 8, & 8, fit ſumma 36. Eadem ſumma fit ex ductu in ſe numeri integri 6. Ergo cõſtat in numeris quod proponit Geometra in hac 4 propoſitione de lineis ſectis, &c.*

Scho-

SCHOLION II.

Propoſitio 4 de omni quantitate.

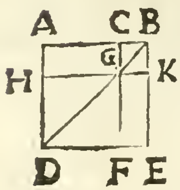
SI quantitas quæpiam vtcunq; ſecetur, productum totius æquale erit & productis partium ſingularum, & productis ex partibus bis inter ſe ductis. *Sit 6 diuiſus in 4, 2, & quadratum 36 totius 6 fiat cubus 216. Partium 4, & 2 quadrata 4, & 16 fiant parallelepipeda ex altitudine totius 6, ſitque alterum parallelepipedum 24, & alterum 96. Rectangulum 8 ſub partibus 2, 4 fiat parallelepipedum 48 ad altitudinem 6, & geminetur in 96. Iunge parallelepipeda 24, 96, & bis 48, ideſt 96, ſit ſumma 216 eadem cum cubo 216, quod eſt productum ſolidum ex tota radice 6.*

Ex noſtris hiſce ad 4 anteced. propoſ. hu. li. 2 habes, & ſequere exempla vniuerſalizandi, & ad ſolida traducendi cæteras ſequentes, quæ poſſunt.

§ VIII.

SCHOLION III.

Vſus 4 prop. Eucl. pro inuentione quadratorum numerorum, & radicum ex imparibus numeris. &c.



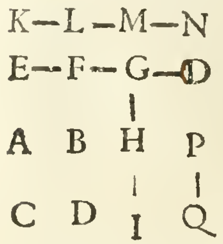
1 *VT præclara tibi prodantur, mi Tyro, ad vſum, inſpice mecum hic Euclidis figuram. Quadrati AE latere AB diuiſo ad lubitum in C, & factis quadratis CK, HF partium AC, BC, itemq; rectangulis geminis AG, GE ex partibus CA, CB, BK, KE, vides quadrato*

In numeris quadratum minus augere gnomons.

HF

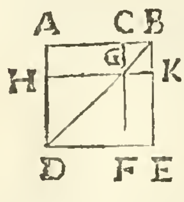
HF gnomonẽ AGE additũ. Finge quadrati AE latus AB eſſe 3, & AC 2, CB 1. Quadratũ ipſius AC, ſiue ipſius HG, erit 4; quadratum ipſius CB 1 erit 1. rectangulũ AG ex AC, CB, hoc eſt ex multiplicatione 2 in 1, erit 2; itemq́ rectangulũ ex EK in KB, erit 2. Gnomon itaq; conſtans ex AG 2, ex CK 1, & ex KF 2, conficit ſummã imparis numeri 5. Itaq́ Gnomon appoſitus quadrato 4 conficit numerum quadratum 9 in geometrico quadrato AE. Vnde eſt quod Pythagorici numeros impares appellabant gnomones, quos numeros in figuram gnomonis geometrici æquilateri diſponebant, vt vides hic, affirmabãtq́ eos impares, ſiue gnomones appoſitos quadratis numeris planis (vt ipſi ABDC quadrato 4) augere minus quadratum in maius (vt hic in figura) quadratum 9 EGIC. &c.

Cur Pythagorei impares numeros appellarẽt gnomones.



2 Prædictis ergo ſuppoſitis, accipe à nobis vſum ſingularem huius 4 propoſitionis in re magni momenti ad præcipua Geometrica, & Arithmetica problemata, & theoremata, quæ vtuntur radicibus, vel numeris quadratis. Ex hac enim 4 propoſitione praxim, & demonſtrationem mox diſces, dato quolibet impari numero, inuenire radices, & quadratos numeros, coſq́ continuare in ſeriem infinitam pro tabulis quadratorum numerorum, vnde in promptu habeas & omnes radices, & omnes numeros quadratos, quibus opus habeas ad Geometricas, Arithmeticas, & alias quaſcumq; operationes non ſolum theoricas, & ſcientificas, ſed etiam practicas in humanis contractibus, & commercijs.

Ex imparibus numeris cõficere tabulas quadratorũ, & radicũ.



Finge igitur datum ex imparibus numeris, vel tibi aſſume ad libitum, verbi gratia, numerum 5, vt radicẽ inuenias quadrati minoris, ac proximi, abijce vnitatem, velut in figura Euclidis auferas ex Gnomone AGE ipſum quadratulum CK, reliquum gnomonis, id eſt 4, diuide in duos æquales numeros 2, & 2, velut in figura diuiſus eſt gnomon in duo æqualia rectangula AG, GE. Alteruter numerus 2 erit radix quadrati quæſiti, ducto in ſe 2, & producto quadrato 4. Velut in figura Eucl. alterutrius rectanguli AG, GE latus HG, vel GF eſt latus quadrati HF.

3 *Inuento primo quolibet quadrato per antecedentem modum, in promptu iam erit procreare reliquos omnes numeros quadratos per appoſitionem continuatam gnomonum in ſequentem modum. Dato igitur quadrato numero, verbi gratia 4, geminetur eius radix 2, ac fiat 4, addaturq́ geminatæ radici 1, & factus erit gnomon 5, qui additus quadrato 4 conficit quadratum numerum 9, velut in figura, quadrato ipſi HF adduntur rectangula gemina AG, GE, & præterea quadratulum CK, vt conficiatur gnomon AGE, qui additus quadrato HF conficit quadratum AE. Atq; hæc Arithmetica prædicto modo oſtēduntur per analogiam ad geometricam figuram, & conſtructionem huius 4 propoſ.*

At vero in fig. pri. quadrata plani numeri, pro cuius vnitatibus hic nos ſuppoſuimus abecedarias literas, licet prædicta de radicibus inueniendis ex dato gnomone, & de quadratis continuãdis per gnomonum appoſitiones propriè, ac præciſè peruidere. Nam ex dato impari 5, ſeu gnomone EGI, aufertur G1, relinquuntur EF, HI 2 & 2, eſtq; EF, vel HI latus æquale lateri, ſiue radici AB 2 quadrati ABDC. Pariter ex gnomone 7 KNQ, ablato N 1, reliqui 6 KLMOPQ dimidium alterutrum KLM 3 eſt radix, ſiue latus quadrati 9 EGIC. Habità verò ſemel vnicà radice quadrata, reliquæ omnes habentur ex ordine per additiones, vel ſubtractiones vnitatis. Nam numeri in naturali ſerie progredientes per differentiam vnitatis, ſunt ſinguli radices quadratorum. Itaq; habita radice 2 quadrati 4, reliqui, ac proximè maioris quadrati 9 radix eſt 3. Habita radice 5, minoris proximè quadrati radix eſt 4, proximè maioris eſt 6.

Iam vero hic in ead. fig. latus, ſiue radix AB 2 quadrati ABDC duplicatur per appoſitionem numerorum EF, HI 2, & 2, & fit 4, cui additur angularis numerus in G, idest 1, & fit gnomon EGI 5, qui additus quadrato ABDC 4 conficit maiorem quadratum numerorum EGIC 9. Et quoniam inuenti minoris, ac primi quadrati 4 radix erat 2, ergo quadrati proximè maioris 9 erit radix 3, iuxta paullò antedicta. Igitur radix EFG 3 geminetur, fiantq; ſuperioris gnomonis partes KLM, OPQ 3, & 3, ideſt 6, cui addatur vnitas N pro complemento gnomonis KNQ, qui eſt numerus 7, qui additus proximè præcedenti quadrato EGIC 9 conficit

proximè maiorem quadratum numerum KN QC 16.&c. Ex quibus habes, quaſi Corollarij loco, vnde intelligas Ariſtotilis locum in Textu 16 libri 3. Phyſicorum. Illuc viſito, & antecedentia à nobis explicata applicato.

4 Euidentiæ maioris gratia inſpice appoſitam tabellam, cuius ſeries media perpendicularis habet quadratos numeros, altera radices, tertia impares numeros, ſiue gnomones. Ac vides è ſingulorum quadratorum numerorum duplicatis radicibus, & additâ vnitate confici gnomones, ſiue impares numeros, qui additi quadrato antecedenti, conficiunt quadratum numerum ſibi lateralem.

Impar.	*Quadr.*	*Radic.*
1	1	1
3	4	2
5	9	3
7	16	4
9	25	5

Sic radix 4 quadrati 16 duplicata, & aucta vnitate conficit imparem, ſeu gnomonem 9, qui additus quadrato antecedenti 16 conficit quadratum numerum lateralem 25. Ac pariter de ſequentibus in infinitum, iuxta explicata per analogiam in figura geometrica huius 4 propoſitionis. Vide plura in Apiar. 11 Prog. 4 cap. 7.

§IX.

Vſus propoſ. 4 pro demonſtratione Geometricà extractionis radicum quadratarum.

AT vero ſingularis vſus eſt in Arithmeticis huius 4 propoſ. præcisè, ac planè geometricus ex demonſtratione geometrica eiuſdem 4 huius. Ac is eſt in probatione, quæ fit poſt factam extractionem radicis quadratæ ex dato numero. Quoniam enim ex demonſtratione huius 4 propoſ. recta quælibet linea, quæ accipiatur pro radice, ſeu latere quadrati, velut DE habet hanc proprietatem, vt diuiſa in duas partes, partium quadrata, & ex partibus rectangula geminata conficiant ſimul ſumpta quadratum dati lateris DE; ideo factâ logiſticâ extractione radicis quadratæ

dratæ

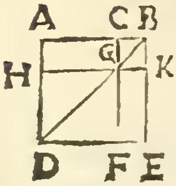
drata ex dato numero, ſi numerus radicis extractæ, ſiue inuentæ diuidatur in duos numeros, & partialium numerorum quadrati numeri, itemq; geminata ſummæ ex ductu inter ſe partialium numerorum, conficiant ſummam æqualem dato numero, ex quo educta eſt radix, erit ea radicis extractio rectè facta, hoc eſt radix extracta erit vera. &c. Finge ex numero 25 extractam radicem 5, vt demonſtratiuè ſcias 5 eſſe veram radicem numeri 25, diuide 5 in duos numeros 3, & 2. quadratum ex 2 eſt 4, ex 3 eſt 9, rectangula ex 3, & 2 geminata ſunt 6, & 6. Ea quadrata, & rectangula 4, 9, 6, 6, conficiunt ſummam 25. ergo, per hanc 4 propoſ. radix 5 eſt latus quadrati 25. &c. Vide plura ad hæc in Apiar. 11 prog. 4, cap. 5.

§X.

Vſus 4 propoſ. in ſolutione theorematis eximij.

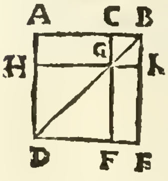
INſignis vſus geometricus eſt 4 huius prop. in demonſtratione pulcherrimi theorematis apud Clauium lib. 8 Geom. pract. Propoſ. 26 Cuius verba applicato figuræ hîc Euclidianæ. Propoſitio eſt.

Si per idem punctum diametri in rectangulo duæ lineę ducantur lateribus parallelæ, erit rectangulum ſub ſegmentis diametri comprehenſum æquale duobus rectangulis ſub ſegmentis duorum laterum comprehenſis.



In rectangulo AE per G punctum diametri DB ductæ ſint HK, CF lateribus parallelæ; dico rectangulum ſub DG, GB æquale eſſe rectangulis ſub DH, HA, & ſub AC, CB. a Quoniã enim quadratum ex DB æquale eſt quadratis ex DG, GB vna cum rectãgulo bis ſub DG, GB, b ſunt autem quadra- *a 4 ſec.* *b 47 pri.*

ta ex DA, AB quadrato ex DB æqualia, erunt quoq; duo quadrata DG, GB vnà cum rectangulo bis ſub DG, GB
c 4 ſec. æqualia quadratis ex DA, AB. c Sed quadratum ex DA æquale eſt quadratis duobus ex DH, HA vnà cum rectangulo bis ſub DH, HA, & quadratum ex AB æquale eſt duobus quadratis ex AC, CB vnà cum rectangulo bis ſub DG, GB: igitur duo quadrata ex DG, GB (vnà cum rectangulo bis ſub DG, GB, (*quod in impreſsione Moguntinà deſideratur*) æqualia erũt quattuor quadratis ex DH, HA, AC, CB vnà cum rectangulis bis ſub DH, HA, & ſub AC, CB.



Cùm ergo quadratum ex DG quadratis ex BC, CG, hoc eſt BC HA, æquale ſit, erunt (*hic etiam fallit impreſsio, quæ habet: quattuor, ex DH, HA, AC, CB*) quadrata ex DG, GB vnà cum rectangulo bis ſub DG, GB æqualia quattuor quadratis ex DH, HA, AC, CB vnà cum rectangulis bis ſub DH, HA, & ſub AC, CB, ablatiſq; vtrobiq; prædictis (*in impreſsione erat: quattuor quadratis cõmunibus: nos repoſuimus, vt ſequitur*) quadratis æqualibus, erit reliquũ rectangulũ bis ſub DG, GB reliquis rectangulis bis ſub DH, HA, & ſub AC, CB æquale. Ideoq; rectangulum ſemel ſub DG, GB rectangulis ſemel ſub DH, HA, & ſub AC, CB erit æquale. Quod erat demonſtrandum. *Intellige theorema etiam de rectangulis ſub BK, KE, & ſub EF, FD. &c.*

COROLLARIVM primum.

Rectangula ſub DH, HA, AC, CB, BK, KE, EF, FD ſunt dupla rectanguli ſub ſegmentis diametri in rectangulo AE.

SCilicet propter æqualia oppoſita latera in rectangulo AE, & æqualia oppoſita ſegmenta. Ac vt ipſorum DHA, ACB rectangula ſunt æqualia rectangulo DGB, ſic eidem DGB ipſorum

ſorum BKE, EFD rectangula ſunt æqualia. Ergo ſimul omnia dupla ipſius DGB. &c.

COROLLARIVM *ſecundum.*

In quadratis rectangulum ſub diametri ſegmẽtis, eſt æquale complementis quadratorum circa diametrum.

Corollarium hoc etiam noſtrum patet ex antecedenti theoremate. Quoniam enim demonſtratum eſt rectangulum ſub partibus diametri DG, GB æquale rectangulis ſub DH, HA, & ſub AC, CB, ac eſt rectangulum ſub DH, HA æquale complimento GE, itemq; rectangulum ſub AC, CB æquale complimento AG, per 34 pri. (ſunt enim in parallelogrammis HF, CK latera oppoſita æqualia) itemq; per 24 ſexti, quadratuli CK circa diametrum latera ſunt æqualia; ergo rectangulum ſub DG, GB eſt æquale complementis AG, GE in quadrato AE. Cur determinatum ſit corollarium ad quadrata, patet ex demonſtratione, quæ non probaret in rectangulis non quadratis rectangula AG, & ſub AC, CB, itemq; rectangula GE, & ſub AH, HD eſſe æqualia. &c.

COROLLARIVM *tertium.*

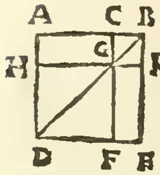
In quadratis vtrumlibet circa diametrum, &c. complementum eſt dimidium rectanguli ſub ſegmentis diametri.

Sunt enim non ſolum æqualia, per 43, inter ſe complementa AG, GE, ſed etiam ſub æqualibus lateribus, vnde fit ex antecedenti corollario 1. vt probetur rectangulum ſub partibus diametri æquale ijs complementis in ſolo quadrato.

Co-

COROLLARIVM quartum.

In pūcto G fit mutua ſectio diametri, & rectarum lateribus quadrati parallelarum ita, vt rectangulum ſub ſegmētis diametri ſit ęquale rectangulis duobus ſub ſegmentis HG, GK, & ſub CG, GF ipſarum KH, CF.



SVnt enim rectangula ſub HG, GK, & ſub CG, GF æqualia, ſiue eadem cum complementis AG, GE.

COROLLARIVM quintum.

Vtrumlibet rectāgulorum ſub ſegmentis HG, GK, vel ſub CG, GF eſt dimidium rectanguli ſub DG, GB.

EA ſcilicet ratione, qua complementorum AG, GE vtrumlibet oſtenſum dimidium rectanguli ſub DG, GB.

§ XI.
SCHOLION.

Quadratum duplæ quadruplum quadrati dimidiæ lineæ; etiam in numeris oſtenſum.

1 *THeorema, quod habes in antecedentibus ſecundi Tomi non vno modo apud nos demonſtratum, ſcilicet:* quadratum ex duplo maiore linea eſt quadruplum qua-

quadrati ex dimidia,*loco corollarij hìc patet ex hac 4 prop. Nam diuiſà rectà datà in duas æquales partes, quadratum ex tota eſt æquale duobus quadratis partium, & duobus rectangulis. Sub partibus verò æqualibus duabus duo rectangula ſunt & ipſa duo quadrata. Ergo quattuor omnia quadrata.*

2 *Poteſt, & in numeris proponi, & oſtendi ſic:* Si numerus planus in duos diuidatur, qui fit à toto quadratus eſt quadruplus numeri quadrati vtriuſuis partium. *Numerus 6 (diuiſus in 3, & 3) in ſe ductus producit quadratum numerum 36, & alteruter 3 quadratè multiplicatus producit 9, qui eſt quarta pars numeri 36. &c.*

Corollarium.

EX his manifeſtum eſt in quadrati ſpatiis illa quæ circa diametrum ſunt quadrata eſſe.

SCHOLIA.

I.

HIc primum habetur in Euclidis Elemẽtis expreſſum corollarium. Nam quod Proclus affert ad 15 propoſ. pri. apud Euclidem noſtrorum temporum non paſsim extat. Igitur ornandæ cognitioni, & eruditioni Geometricæ de geometricis corollarijs huc affer vel aliqua, vel omnia quæ iam habes apud nos in 1 To. § 1 ad corol. propoſ. 15 Eucl.

II.

Quod affirmat Euclides determinatè de quadratis ſpatijs circa diametrum, habes iam vniuerſaliter demonſtratum in propoſit. 24 lib. 6 vbi demonſtratum eſt non ſolum in quadratis, ſed in omnibus parallelogrammis circa diametrum non ſolum quadrata, ſed omnia parallelogrammata eſſe ſimilia non ſolum inter ſe, ſed, & toti parallelogrammo.

Appone

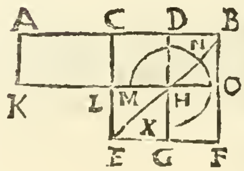
III.

Appone Corollario Euclidis etiam alterum corollariū ex Clauio de diametro quadrati diuidēte angulos quadrati in duos æquales, ex hac 4 propoſ. huius lib. 2.

Propoſ. V. Theor. V.

Si recta linea ſecetur in æqualia, & in inæqualia, erit rectangulū in æqualibus totius partibus contentum vnà cum quadrato lineæ, quæ inter ſectiones interijcitur, æquale ei, quod à dimidia fit quadrato.

a propoſ. 10.1.



RECta A B *a* ſecetur in æqualia ad C, in inæqualia ad D. Dico contentum A D, DB rectangulum cum quadrato quod ex CD, æquale eſſe quadrato ipſius C-

b propoſ. 46 1. B, *b* Deſcribatur enim ſuper BC quadratum CE-

c propoſ. 46.1. FB ; & ducatur BE ; *c* atque per D vtriq; CE, BF ducatur parallela DG: per H verò vtriq; CB, EF parallela KO. Rurſuſq; per A vtriq; CL, BO

d propoſ. 43.1. parallela AK; & cum complementa CH, HF *d* æqualia ſint, ſi addatur commune DO, erit totum CO toti DF æquale. Sed CO æquale eſt AL; quod & AC ipſi CB ſit æqualis: erit igitur & AL ipſi DF æquale: ſi addatur commune CH, erit AH ipſis DF, DL æquale: ſed AH contento

AD,

AD, DB eſt æquale; [e] eſt enim & DH ipſi DB æqualis: FD, DL autem ſunt gnomon MNK: [f] ergo gnomon MNX eſt æqualis AD, DB contento. Si LG commune, quod eſt æquale quadrato ex CD, addatur, erunt MNX gnomon, & LG æqualia contento AD, DB, & illi quod ex CD fit quadrato. Sed gnomō MNX, & LG ſunt totum CEFB quadratum, quod eſt quadratum ex CB: ergo AD, DB contentum, cum quadrato quod fit ex CD, æquale eſt quadrato ipſius CB. Si ergo recta linea ſecetur, &c. Quod oportuit demonſtrare.

e prop. 2. Coroll. 1.

f ax. 4.

SCHOLION.

NVmerus par (vt Barlaamus ponit apud Cōmandinū, ſcilicet aptus biſariationi per æqualia, ſine fractionibus) 8 diuidatur in æqualia 4, & 4, atq; inæqualia 6, & 2. ex multiplicatione inter ſe inæqualium partium productum 12 quaſi rectangulum vnà cum quadrato intermedij, ſiue differentiæ 2 (inter dimidium 4, & inter partem inæqualem 6, vel 2) ideſt cum 4, quæ ſumma eſt 16, eſt æqualis quadrato ex dimidio 4, ideſt pariter 16.

§ XII.

Problemata ex theorematis libri 2.

HOc theorema quemadmodum & ſequentia pleraq; in hoc 2 libro, atq; etiam antecedens 4, poſſunt proponi etiam in modum problematum. Anteceden sſi: Datam rectam ita ſecare, vt quadratum totius æquale ſit & partium quadratis, &

rectangulo bis partibus contento. *ſoluitur ſectà vtcumq; rectà, & iuxta constructionē in demonstratione. &c. Pariter hoc 5 fict problema ſic :* Rectam datam lineam ita ſecare in tres partes, vt vnius partis quadratum ſit æquale rectangulo ſub duobus inæqualibus partibus, & quadrato ſegmenti, ſiue differentiæ inter partes inæquales. *Similem in modum theoremata de numeris formari poſſunt in problemata. Quorũ exempla hìc breuitatis gratia omitto.*

§ XIII.

Paradoxa, & problemata ex theorematibus li. 2 præſertim ex 4, & 5 prop. in numeris. Modi varij ex imparibus numeris radices quadratas inueniendi ex eiſd. propoſ.

1 L*Icet etiam per modũ paradoxi ex 4 antecedenti, & 5 hac, & aliquà è ſequentibus, proponere ſequentia problemata in numeris:* Datæ radicis, quaſi lateris, inuenire numerum quadratum, ſine multiplicatione quadrata ipſius radicis. *Quod fit ex 4. Numerus datus quiuis 6 vtcumq; diuidatur in 4, & 2, & partium quadrata 16, & 4, item ex partibus inter ſe ductis geminata producta 8, & 8 in vnam ſummam colligantur 36, qui numerus erit quadratus ex multiplicatione quadratæ radicis 6 in ſe. At verò ex hac 5. duplicetur data radix 6, vt ſit dimidium ipſius 12, fiatq; diuiſio in inæqualia 10, & 2: fiat productum ex partibus inæqualibus inter ſe ductis, idest ex 2 in 10 fiat 20, addatur quadratum differentiæ inter partes 6, 10, 2, ideſt quadratum ipſius 4, quod eſt 16: addantur 20, & 16, fit ſumma 36, quod eſt quadratum quæſitum radicis 6, ſine ductu ipſius 6 in ſe. Rationes, ac demonſtrationes habes à 4, & 5 huius; quibus applica hæc exempla. &c.*

2 *Ex hac etiam 5, vt ex anteced. 4, & ſequentibus 6, & 8 propoſitionibus eliciuntur modi, dato numero impare, inueniendi radices quadratas quadratorum proximè vel minorum, vel maiorum.*

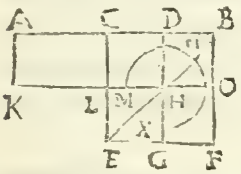
Nobis

Nobis ſat ſunto quæ pro ijs radicibus inueniendis diximus ad quartam, vbi faciliores apparent operationes, ac theoriæ in eius 4 prop. figurà, & in figuris numerarijs. &c.

§XIV.

Corollaria, Theoremata, & Problemata eximia de proportionalitate arithmetica in numeris, & lineis indicata. Singularia etiam in numeris circa proportionalitates harmonicas, & Geometricas comparatas cum arithmeticà ex hac 5 propoſitione elem. hu. li. 2.

1 *IAm verò inſpice mecum, mi Tyro, oculo philoſophicè geometrico figuram huiuſce quintæ propoſitionis, vt ex ea demonſtratà deaucamus præclara in Arithmeticæ philoſophiæ theorijs, atq; operationibus. Ac —*



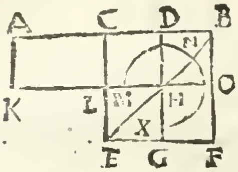
— Quoniam rectæ AB tria ſegmenta facta ſunt, vnum AC, per biſariationem in C, alterum inæqualium maius AD, alterum minus DB, & communis eorum differentia eſt, interiecta inter ſectiones, recta CD, qua trium ſegmentorum minimum DB ſuperatur à medio BC, & medium BC, hoc eſt AC ipſi BC æquale, ſuperatur eadem CD à tertio maximo ſegmento AD; propterea ſectio rectæ AB facta ab hac 5. propoſitione, eſt in proportione arithmeticà inter ſe trium ſegmentorum BD, BC, AD, per eandem differentiam CD. Eſt enim (vt ex Pappo habes à nobis ad 10 ſexti) arithmetica proportio, quæ per eandem differentiam progreditur.

Sectio lineæ in arithmetica proportionalitate ex 5. hac propoſ.

Habes in tabula magna Pythagorica, eiuſq; conſtructione series omnes, & perpendiculares, & laterales progreatentes per eundem exceſſum numerorum vel 1, vel 2, vel 3. &c. In quibus progreſ-

ſionibus ſi ternos ex ordine numeros accipias, prodibũt iucũdæ quædam proprietates numerorum, quales ſequuntur aliquæ in figura hìc indicandæ.

1 Eximia proprietas proportionalitatis arithmeticæ in numeris, & -- -- Oſtēſa in figura prop. 5.



2 Numeris tribus habẽtibus inter ſe proportionem arithmeticam, productũ ex multiplicatione inter ſe extremorum vnà cum quadrato differentiæ eſt æquale quadrato medij numeri. 2, 4, 6: *quadratũ medij 4, quod eſt 16, æquale eſt producto ex 2 in 6, ideſt 12, & quadrato differentiæ 2 (per quã progrediuntur numeri 2, 4, 6) ideſt 4 addito ipſis 12, vnde prodit conflata ſumma 16. Quemadmodum arithmeticè diuiſà AB, quadratum dimidiæ AC æquale eſt rectangulo ſub extremis minima BD, & maximà DA vnà cum quadrato ex cõmuni differentià CD.*

2 Eximia proprietas arithmeticæ proportionalitatis in numeris, & -- -- Oſtēſa in fig. propoſ. 5.

In tribus numeris arithmeticè proportionalibus quadratum medij ſuperat productum ex multiplicatione inter ſe extremorum quadrato differentiæ, ſiue producto ex differentiarum inter ſe multiplicatione. *Quod eſt corollarium ex antecedenti proprietate* 2, 4, 6. *Si quadrato medij 4 æquale eſt productum extremorum vna cum quadrato ex 2 differentia, ergo ademto differentiæ quadrato, quadratum medij 16 maius eſt quadrato extremorum 12 quantitate, ſeu numero quadrato 4 differentiæ 2, ſeu producto ex differentijs inter 2, & 4, & 6. Quemadmodum quadratum ex dimidia AC ſuperat rectangulum ſub AD, DB quadrato intermediæ CD. &c.*

Hìc ex occaſione nullo modo diſſimulandam duco proprietatem trium numerorum in harmonica proportionalitate planè oppoſitam modo poſitæ in Arithmetica; pariterq; non ſilebo proprietatem in geometrica proportionalitate mediam inter oppoſitas Arithmeticæ, & Harmonicæ proprietates.

Proportionalitatum harmonicæ, & geometricæ proprietates cũ arithmetica comparatæ.

3 *Nam* in tribus numeris harmonicè proportionalibus quadratum medij minus eſt producto ex multiplicatione inter ſe extremorum quantitate producti ex multiplicatione differentiarum inter ſe. 2, 3, 6 *ſunt in harmonica proportionalitate iuxta definitiones apud nos ad 9, & 10 propoſitiones lib. 6. Eucl. illuc remiſſe. Quadratum medij 3 eſt 9; extremorum productum ex 2 in*

6, eſt

6, eſt 12: ex differentiâ 1 inter 2, & 3, & differentiâ 3 inter 3, & 6, productum eſt 3. vides ergo quadratum 9 minus eſſe producto 12 quantitate producti 3.

At verò In Geometrica proportionalitate quadratum medij eſt æquale producto ex multiplicatione extremorum inter ſe, *iuxta propoſ. 17 lib. 6.*

Vide hîc prædicta in exemplo quinq; numerorum, qui ſunt in triplici proportionalitate, iuxta § 13 ad 10 propoſ libri 6. 3, 4, 6, 9, 12. Quadratum ex 4 deficit à rectangulo ex 3 in 6. Quadratum è 6 æquale eſt rectangulo ex 4 in 9. Quadratum ex 9 excedit rectangulum è 6 in 12. Itaq; in hac proprietate proportionalitas harmonica vocari poteſt ellipſis, geometrica Parabole, arithmetica Hyperbole, iuxta dicta ad 44 lib. 1, & ad 27, & 28 li. 6. Deficientia, & exceſſus ſunt rectangula ex differentijs. Applica & explica in allato exemplo numerorum 3, 4, 6, 9, 12.

Ellipſis, parabola, hyperbole numeris triũ proportionalitatum.

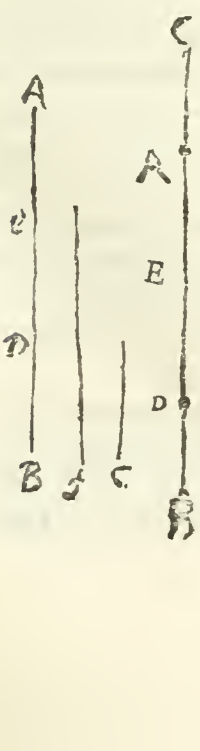
4 *Pariter in figurâ Euclidis agnoſce ſequentem proprietatem.* Trium numerorum arithmeticè proportionalium medius eſt dimidium ſummæ, ſiue compoſiti ex extremis. 2, 4, 6: *iunge extremos 2, 6 in ſummam 8, medius 4 eſt dimidium numeri 8. Quemadmodum totius AB, compoſitæ ex extremis BD, DA, eſt dimidia AC. &c.*

3 Proprietas arithmeticæ proportionalitatis in numeris, & in figura 5 pro.

5 *Hinc problema:* duobus datis numeris medium in proportionalitate arithmetica interponere. *Datorum 2, & 6 ſummam 8 diuide in duo æqualia, & alterutrum, id eſt 4, eſt numerus arithmeticè inter datos proportionalis. Quemadmodũ in fig. Eucl. datæ duæ rectæ AD, DB ſi in vnam AB componantur, dimidia AC eſt media inuenta arithmeticè proportionalis &c.*

Duobus medium numerũ in arithmeticâ proport. inuenire.

Exemplum in fig. Eucl.



Pappus in modum ſequentem. Datis rectis lineis AB, C mediam in Arithmetica medietate inuenire. Datis rectis AB, C, quarum maior AB, mediam in æquali exceſſu inueniemus hoc modo. Ponatur ipſi C æqualis BD, & DA bifariam

Datis duabus rectis, mediam arithmeticè proportionalem apud Pappum, &

fariam ſecetur in E: & ipſi BE ponatur æqualis F; conſtat igitur F rectam lineã eſſe quam quærebamus.



-- apud nos: atq; -- -- etiam in figura propoſ. 5.

Qui modus recidit in eundem cum noſtro de biſariatione compoſitæ ex BA, & C. Quoniam enim iunctâ C ad A indirectũ, & factâ vnâ compoſitâ BC, ſectâque BD æquali ipſi AC, compoſita BC conſtat ex duabus æqualibus BD, AC, & intermediâ AD; ſi AD biſarietur in E, biſariata eſt etiam in æqualia tota BC, nẽpe æqualibus AE, ED æqualis BD, AC dum adduntur. Quam theoricen licet applicare etiam lineæ AB in Euclidis figura. &c.

Aliter medium proportionalẽ inter duos numeros.

Hinc propoſitum problema de inueniendo numero medio in proportione arithmetica inter datos duos numeros, aliter etiã ſic ſoluitur. Differentia inter datos in duos æquales diuidatur, & apponatur minori datorum, compoſitus numerus erit medius arithmeticè proportionalis. Dati ſint 2, & 6, differentia inter eos eſt 4, cuius dimidium 2 additum minori datorum 2 conficit 4, medium arithmeticè; atq; eſt in proportione arithmetica vt 2, ad 4, ſic 4 ad 6.

Datis duabus tertiam in arithmeticà proportionalitate, &c.

6 Inſpice figuram Euclidis ſeq. prop. 6 pro 5, ex qua prodeunt & alia iucunda in arithmetica proportionalitate linearum, & numerorum. Datis duabus tertiam inuenies minorem, vel maiorem in proportione arithmetica facillimè per ſubtractionem, vel additionem differentiæ. Sic vides: datis minore BD, & maiore DC, ſi maiori DC, hoc eſt ipſi AC (cui eſt æqualis ipſa DC) addas differentiam BC, fit tertia maxima AB; &, datis AB, CD, ſi à CD ſubtrahãs differentiam inter ipſammet DC, & inter AB, hoc eſt auferas ex DC ipſam CB, datur tertia minima BD. Per augmentum igitur, vel imminutionem mediæ habentur alterutra extremarum in arithmetica proportionalitate.

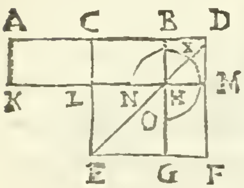
In numeris tertium arithmeticè proportionalẽ. &c.

In numeris 2, & 4, adde maiori 4 differentiam 2, fit 6 tertius maximus: datis 4, & 6, detrahe differentiam 2 ex 4, fit minimus 2. &c.

Pro-

Propoſ. VI. Theor. VI.

Si recta linea biſecetur, eiq́; in directum quædam recta adijciatur, erit rectangulũ, quod fit ex tota compoſita, & adiecta, vna cum quadrato dimidiæ, æquale quadrato quod fit ex dimidia, & adiecta.



RECta AB biſecetur in C, adijciaturq; ei quædam BD in directum. Dico rectangulum AD, DB contentum, cum quadrato rectæ CB, æquale eſſe quadrato quod fit ex CD. a Deſcribatur enim ſuper CD quadratum CEFD, ducaturque DE; & b per B quidem vtrique EC, DF parallela ducatur BG: per H verò vtriq; AD, EF parallela KM. Item per A vtriq; CL, DM parallela AK. Cum igitur AC æqualis ſit rectæ CB; erit & AL æquale ipſi CH: ſed CH c æquale eſt ipſi GF, ergo & AL æquale eſt ipſi HF. Commune addatur CM: d totum ergo AM gnomoni NXO erit æquale: ſed AM eſt quod continetur AD, DB (eſt e enim DM æqualis ipſi DB) & gnomon NXO æqualis eſt AD, DB contento. Commune addatur LG, quod eſt æquale quadrato rectæ CB: ergo

a propoſ. 46.1.
b propoſ. 31.1.
c propoſ. 43.1.
d ax.2.
e deſin. 57.

con-

contentum AD, DB, cum quadrato ipſius BC, æquale eſt gnomoni NXO, & LG. Sed gnomon NXO, & LG ſunt quadratum CEFD, quod eſt quadratum ipſius CD; ergo quod AD, DB continetur, cum quadrato ipſius BC, æquale eſt ipſius CD quadrato. Si ergo recta linea, &c. Quod oportuit demonſtrare,

SCHOLION.

NUmerus par 6 biſarietur in æquales 3, & 3, & addantur 2, productum ex toto 3, 3, 2, ideſt 8, multiplicatũ per adiectum 2, ideſt 16, vnà cum 9 quadrato ex dimidiato 6, ideſt ſumma 25, eſt æqualis quadrato ex dimidio 3, adiecto 2, ideſt ex 5 in ſe multiplicato, cuius quadratum eſt pariter numerus 25.

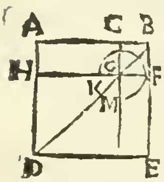
Propoſ. VII. Theor. VII.

Si recta linea ſecetur, vtcumque, quod à tota, quodq; ab vna partium fit, vtraq; quadrata, æqualia ſunt ei, quod bis à tota & dicta parte fit rectangulo, vnà cum alterius partis quadrato.

REcta AB ſecetur vtcumque in C. Dico quadrata, quæ ex AB, CB fiunt, æqualia eſſe bis ſub AB, BC contento, & quadrato quod

quod fit ex A C. a Deſcribatur enim ſuper A B quadratum ADEB, & figura * conſtituatur. Et quia AG, GE æqualia ſunt, ſi commune CF addatur, erunt tota AF, CE æqualia: vtraq; ergo AF, CE dupla ſunt ipſius AF: ſed AF, CE ſunt gnomon K L M, & C F quadratum; gnomon ergo KLM, & CF dupla ſunt ipſius AF. Eſt verò eiuſdem AF duplum bis AB, BC contẽtum; b ſunt enim BF, BC æquales. Gnomon ergo K-L M, & C F æquantur bis A B, B C contento.

a *propoſ.* 46.1.
* *vt in præcedẽtibus.*
b *defin.* 27.



Commune addatur D G, quod eſt quadratum ex AC: gnomon ergo KLM, & quadrata BG, GD æquantur bis AB, BC contento, & quadrato quod ex AC. Sed gnomon KLM, & quadrata BG, GD ſunt totum ADEB, & CF; quæ ſunt ex AB, BC quadrata. Quadrata ergo ex AB, BC æquantur bis AB, BC contento, & quadrato ex AC: ſi ergo recta linea, &c, Quod oportuit demonſtrare.

SCHOLION.

IDem numerus à nobis poſitus in antecedenti propoſitione ponatur & hic 6, & vtcumq; ſit ſectus in duos 4, & 2: quadratum ex toto 6, ideſt 36, & quadratum ex altera parte 2, ideſt 4; ſimul addita conficiunt 40. Productum ex multiplicatione totius 6 per eandem partem 2, ideſt 12, bis factum, ideſt bis 12, quod eſt ſumma 24 vnà cum quadrato alterius partis 4, ideſt 16, ſimul addita conficiunt pariter numerum 40.

Pariter totius 6 quadratum 36, & alterius partis 4 quadratum 16 conficiunt inter ſe addita ſummam 52. Productum ex multiplicatione totius 6 per eandem partem 4, ideſt 24, bis factum, ideſt bis 24, quod eſt 48, vnà cum quadrato alterius partis 2, ideſt 4 ſimul addita conficiunt eandem ſummam 52.

Propoſ. VIII. Theor. VIII.

Si recta linea ſecetur vtcumque, rectangulum quater tota, & vna parte contentum, cum quadrato alterius partis, æquale eſt quadrato à tota & dicta parte, tanquã ab vna linea deſcripto.

Recta AB ſit ſecta vtcumq; in C. Dico rectangulum quater AB, BC contẽtum, cum eo, quod fit ex AC quadrato, æquale eſſe quadrato, quod fit ex AB, BC tanquam ex vna linea. Producatur enim AB in directum, & ſit BD æqualis CB; & a ſuper AD cõſtituatur quadratum AEFD, & dupla figura conſtruatur. Quia igitur CB ipſis BD, GK,



a propoſ. 46.1.

BD verò ipſi KN æqualis eſt, erunt & GK, KN æquales. Ob eandem cauſam erunt PR, RO æquales. Cumq; tam BC, BD, quam GK, KN æquales ſint, b erunt etiam tam CK, KD, quàm

b propoſ. 36.1.

GR,

GR, RN æqualia. ſed CK, RN [c] ſunt æqualia (ſunt enim complementa parallelogrammi C-O) igitur & KD, GR æqualia erunt. Quatuor ergo DK, CK, GR, RN æqualia ſunt: quatuor ergo illa ſunt quadruplicia ipſius CK. Rurſus cùm CB ipſi BD, BD [d] ipſi BK, hoc eſt ipſi CG, & CB ipſi GK, hoc eſt ipſi GP æqualis ſit, erit CG ipſi GP æqualis. Et cùm CG ipſi GP, & PR ipſi RO æqualis ſit, erit & AG ipſi MP, & PL ipſi RF æquale. Sed MP, PL ſunt [e] æqualia, quippe parallelogrammi ML complementa, erunt & AG, RF æqualia. Quatuor ergo AG, MP, P-L, RF ſunt æqualia; quatuor ergo illa quadruplicia ſunt ipſius AG. Oſtenſa autem ſunt & C-K, KD, GR, RN ipſius CK quadruplicia: ergo octo illa, quę gnomonem STY continent, quadrupla ſunt ipſius AK: & cùm AK contento A-B, BD ſit æquale, eſt enim BK, ipſi BD æqualis, erit quater AB, BD contentum quadruplum ipſius AK. Oſtenſus eſt autem & gnomon STY quadruplex ipſius AK; quod ergo quater AB, B-D continetur æquale eſt gnomoni STY. Commune addatur XH (quod æquale eſt quadrato ex AC) quater ergo AB, BD contentum rectāgulum, cum quadrato quod fit ex AC, æquale eſt gnomoni STY, & XH. Sed gnomon, & X-H ſunt AEFD quadratum, quod eſt quadratum

c prop. 43.1.

d Corol. 4. 2. & def. 27.

e prop. 43.1.

ex AD; ergo quater AB, BD contentum rectangulum, cum quadrato ex AC, eſt æquale illi, quod fit ex AD quadrato, hoc eſt, quod fit ex AB, BC tanquam ex vna linea. Si ergo recta linea, &c. Quod oportuit demonſtrare.

SCHOLION.

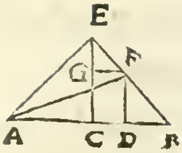
NVmerus 6 ſecetur vtcumq; in 4, & 2. Productum ex toto 6 multiplicato per alteram partem 2, ideſt 12, quater aſſumptum, ideſt 48, vnà cum quadrato 16 ex altera parte 4, conficiunt ſummam 64. Quam eandem etiam conficit totus numerus 6 compoſitus cum numero dictæ partis (ſcilicet per quam totus 6 prius multiplicatus eſt: animaduerte, ne fallare) 2, ideſt 8 quadratè multiplicatus producit 64.

Propoſ. IX. Theor. IX.

Si recta linea ſecetur in æqualia, & non æqualia, quadrata partium inæqualium dupla ſunt & eius quod fit à dimidia, & eius quod fit à linea, quæ inter ſectiones intercipitur, quadrati.

SEcetur recta AB in C æqualiter, in D inæqualiter. Dico quadrata ex AD, DB dupla eſſe eorum, quæ ex AC, CD fiunt. [a] Ducatur

a prop. 21. 1.



tur ex C ipſi AB ad angulos rectos EC, quæ ſit vtriq; AC, CB æqualis, ducanturque EA, EB. Atq; per D ipſi EC agatur parallela DF: per F verò ipſi AB parallella FG, iungaturq; AF. Et quia AC, CE æquales ſunt,[b] erunt & anguli EAC, AEC æquales. Et cùm angulus ad C rectus ſit, [c] erunt reliqui AEC, EAC vni recto æquales, ideoq; ſemirecti. Eandem ob cauſam CEB, EBC ſemirecti erunt: vnde totus AEB rectus erit. Cumq; GEF ſemirectus ſit, [d] rectus EGF (eſt enim interno, & oppoſito ECB æqualis) erit reliquus EFG ſemirectus: Ergo GEF ipſi EFG eſt æqualis; [e] quare & latus EG lateri FG æquale erit. Rurſus cùm angulus ad B ſemirectus ſit; rectus FDB (eſt enim æqualis interno, & oppoſito ECB) erit reliquus BFD ſemirectus. Eſt ergo angulus ad B æqualis DFB angulo. [f] Quare & latus DF lateri DB æquale erit. Et cùm AC, CE æquales ſint, erunt & quadrata ex AC, CE æqualia: dupla ergo ſunt quadrato ex AC: [g] æquale autem eſt quadratis ex AC, CE quadratum ex EA (nam angulus ACE rectus eſt) eſt igitur quod ex EA duplum eius, quod ex AC. Rurſus cùm EG, GF æquales ſint; erunt & quę ex EG, GF quadrata æqualia: dupla ergo ſunt eius, quod fit ex GF, & [h] æqualis eius, quod ex

b propoſ. 5.1.
c propoſ. 32.1.
d propoſ. 29.1.
e propoſ. 23.1.
f propoſ. 6.1.
g propoſ. 6.1.
h propoſ. 47.1.

EF: ergo quod ex EF duplum eſt eius, quod ex GF quadrati (ſunt autem GF, CD æquales) ergo quod ex E F duplum eſt eius, quod ex C D. Eſt autem & quod ex A E duplum eius, quod ex A C: ergo quadrata, quæ ex A E, E F dupla ſunt eorum, quæ ex AC, CD. Quadratis autem AE, EF *i* æquale eſt quod ex AF (eſt enim angulus A E F rectus) ergo quod ex A F quadratum duplum eſt eorum, quæ ex AC, CD: ei autem, quod ex AF *k* æqualia ſunt quæ ex AD, DF fiunt (nam angulus ad D rectus eſt) igitur quę ex AD, DF dupla ſunt eorum, quæ ex AC, CD quadratorum (ſunt autem DF, DB æquales) ergo quę ex AD, DB quadrata dupla ſunt eorum, quæ ex AC, CD. Si ergo recta linea, &c. Quod oportuit demonſtrare.

i propoſ. 47.1.

k propoſ. 47.1.

SCHOLIA.

1 *NVmerus 8 ſecetur in partes æquales duas 4, & 4, & in partes inæquales 6, & 2, quadratum 36 partis inæqualis 6, & quadratum 4 alterius partis inæqualis 2 addita inter ſe conficiunt ſummam 40, quæ eſt dupla ſummæ 20, quæ fit ex additione quadrati 16 (ex parte altera dimidia 4) quadrato 4, quod fit à differentia 2, inter partem æqualem 4, & inæqualem 6, vel 2.*

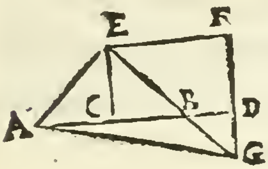
2 *Hanc propoſitionem quaſi ad ſenſum oſtendit pro Tyronibus Ioan. Baptiſta Benedictus in Epiſtolarum ea, quæ eſt ad Petrum Catenam.*

Pro-

Propoſ. X. Theor. X.

Si recta linea biſecetur, eiq; in rectum quædam alia adijciatur quæ a tota cum adiecta, & ab adiecta fiunt quadrata, dupla erũt quadratorum, quæ fiunt à dimidia, & a compoſita ex dimidia & adiecta.

RECta AB biſecetur in C, adijciaturq; ei in rectum BD. Dico quadrata quæ ex A-D, DB, dupla eſſe eorum, quæ ex AC, CD. [a] Ducatur enim ex C ipſi AB ad angulos rectos CE; *a propoſ. 11.1.*

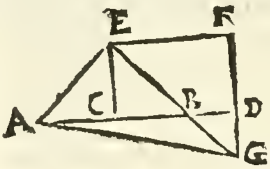


[b] ſitq; CE ipſis AC, CB æqualis; & iungantur AE, EB, atq; [c] per E ipſi AD agatur parallela EF, per D verò ipſi CE parallela DF; & cum in parallelas EC, FD incidat EF, [d] erunt anguli CEF, EFD æquales duobus rectis: vnde FEB, EFD duobus rectis minores erunt. [e] Quæ autem à minoribus quàm ſint duo recti producũtur rectæ lineæ concurrunt: ergo EB, FD ad partes B, D productæ concurrent. Concurrant in G, iungaturq; AG. Et quia AC, CE æquales ſunt, [f] erunt & anguli AEC, EAC æquales; [g] & eſt angulus ad C rectus: ergo EAC, AEC ſunt ſemirecti. Eã-

b propoſ. 2.1. *c propoſ. 31.1.* *d propoſ. 29.1.* *e ax. 11.* *f prop. 5. 1.* *g per ſtruct.*

dem

dem ob cauſam CEB, EBC ſemirecti ſunt: ergo
h propoſ. 29.1. AEB rectus eſt: cumq; EBC ſit ſemirectus, h erit
i propoſ. 15.1. & DBG ſemirectus: eſt verò BDG rectus, i æqualis enim eſt angulo DCE, quòd ſint alterni,
reliquus ergo DGB ſemirectus eſt: quare anguli DGB, DBG æquales ſunt, k erunt igitur & la-
k propoſ. 6.1. tera BD, GD æqualia. Rurſus cum EGF ſemirectus ſit, l rectus qui ad F (eſt enim ad C oppo-
l propoſ. 34.1. ſito æqualis) erit & FEG ſemirectus: ſunt igitur
m prop. 6.1. EGF, FEG æquales. m Quare & latera GF, EF æqualia erunt. Cum ergo EC, CA æquales ſint,
erit & quod ex EC quadratum æquale ei, quod
ex AC. Quadrata ergo, quæ ex EC, CA, dupla
ſunt eius, quod fit ex CA: illis autem, quæ ex C-
n propoſ. 47.1. E, CA n æquale eſt quod ex EA: ergo quod ex EA duplum eſt eius, quod ex AC. Rurſus cùm GF, EF ſint æquales, erunt & quæ ex FG, EF quadrata æqualia.



Sunt ergo quæ ex FG, FE dupla
o propoſ. 47.1. eius, quod ex EF: illis autem, quæ ex GF, FE o æquale eſt quod ex EG: ergo quod ex EG duplum eſt eius, quod ex EF. Sunt autem EF, CD
æquales: ergo quod ex EG duplũ eſt eius quod
ex CD: oſtenſum eſt autem id, quod ex EA duplum eſſe eius quod ex AC: quæ ergo ex EA, E-
G quadrata dupla ſunt eorum, quæ ex AC, CD:

illis

illis autem, quæ ex A E, E G p æquale eſt quod ex A G: ergo quod ex A G duplum eſt eorum, quæ ex AC, CD: ei autem quod ex AG, q æqualia ſunt quæ ex AD, DG: ergo quæ ex AD, DG quadrata dupla ſunt eorum, quæ ex A C, C D; æquales autem ſunt D G, D B, ergo quæ A D, D B quadrata dupla ſunt eorum, quæ ex A C, CD. Si ergo recta linea biſecetur, &c. Quod oportuit demonſtrare.

p propoſ. 47. 1.

q propoſ. 47. 1.

SCHOLIA.

1 *NUmerus 6 diuidatur in duas partes æquales 3, & 3; & addatur numerus 2. quadratum 64, quod fit ab 8, ideſt à toto 6, cum adiecto 2 in vnam ſummam iunctis, & quadratum 4, quod fit ab adiuncto 2, ſimul iuncta conficiunt ſummam 68, quæ dupla eſt ſummæ 34, quæ fit à 9 quadrato numeri 3 dimidij totius 6, & à quadrato 25, quod fit à numero 5 compoſito ex dimidio 3, & adiecto 2.*

2 *Hanc etiam propoſitionem quaſi ad ſenſum oſtendit pro Tyronibus Io. Baptiſta Benedictus in epiſtola ad Catenam.*

PRO PROPOSITIONE XI.

SCHOLION.

AD 30 prop. li. 6. nos in locum opportuniorem noſtræ methodo tranſtulimus 11 huius libri propoſitionem. Ibi aliquos inſignes eius vſus vide.

§XV.

SCHOLION, &

Auctaria ad propoſitiones antecedentes hu. lib. 2.

Loco propoſitionis 11 accipe ſequentes, quæ pertinent ad ſectiones, & potentias linearũ, de quibus hactenus in hoc 2 li. elem. Sunt apud Maurolycum Arithm. li. 1, par. 2, propoſit. 20, 21, 22 vniuerſales de toto genere quantitatis, & eleuatæ etiam ad ſolida. Quas tamen nos & facilius, & breuius oſtendemus in vulgatis notis logiſticis, quàm Maurolycus, qui aliter, prolixius, & difficilius Tyronum euidentiæ, licet ingenioſè illas demonſtrat.

I.

Si quantitas quælibet in duo ſegmenta diuidatur id, quod fit ex vtrolibet aſſumpto ſegmẽto in quadratũ totius, æquum erit his duobus, ſcilicet quæ fiunt ex vtraq; ſectionum in quadratum reliquæ, & ei, quod fit ex quadrato aſſumpti ſegmenti in totam.

Numerus 6 diuidatur in duo ſegmenta 2, 4. Quadratum totius 6 eſt 36; aſſumptum ſegmentum ſit 2: productum ex aſſumpto 2 in quadratum 36, eſt 72. Segmenti 2 quadratum eſt 4; ſegmenti alterius 4 quadratum eſt 16: productum ex ſegmento 2 in quadratum alterius ſegmenti 16 eſt 32: productum ex ſegmento altero in quadratum alterius ſegmenti 4 eſt 16. Productum ex quadrato 4, initio, ac primo aſſumpti ſegmenti 2, in totum numerum 6 eſt 24. Iungantur producta 32, 16, 24, ſit ſumma 72 æqualis producto ex aſſumpto ſegmento 2 in 36 quadratum totius 6.

Si

II.

Si quantitas quælibet in duo ſegmenta ſecetur; cubus, qui ex tota æquus erit his, ſcilicet duobus cubis ſectionum, & triplo eius, quod fit ex quadrato vtriuſq; in reliquum.

SIt 6 ſectus numerus in 2, & 4: cubus ex toto 6 eſt 216: cubus partis 2 eſt 8, partis 4 eſt 64. Ex quadrato partis 2 in reliquam partem 4 productum eſt 16: ex quadrato 16 alterius partis 4 ducto in alteram partem 2, productum eſt 32. Triplum producti 16 eſt 48: triplum producti 32 eſt 96. Iungantur in vnam ſummam cubi 8, 64, & productorum tripli numeri 48, 96, producunt 216 eandem ſummam, ſiue æqualem cubo totius 6.

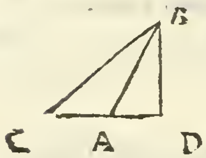
III.

Si quantitas quælibet in duo ſegmenta diſpeſcatur, cubus totius ęqualis erit his, ſcilicet duobus cubis ſegmentorum, & triplo ſolidi ſub totà, & ſingulis ſegmentis contenti.

TOtius 6, diuiſi in 2, & 4, cubus eſt 216. Segmenti 2 cubus eſt 8. Segmenti 4 cubus eſt 64. Solidi ſub toto 6, & ſingulis ſegmentis (id eſt ſub 6, & 2, quæ producunt 12, & ſub 12, & 4 altero ſegmento, vnde prodit 48) triplum, ſcilicet ipſius 48, eſt 144. Igitur addantur inter ſe partium cubi 8, 64, & 144 triplum ſolidi ex toto, & ſegmentis, & fit ſumma 216 æqualis cubo totius 6.

Propoſ. XII. Theor. XI.

In triangulis obtuſangulis quadratum, quod ſit à latere angulum obtuſum ſubtendente, maius eſt quadratis laterum obtuſum continentium, rectangulo bis contento & ab vno latere obtuſum continente, in quod productum perpendicularis cadit, & à linea exterius aſſumpta à perpendiculari ad angulum obtuſum.



SIt triãgulum obtuſangulum ABC, obtuſum angulũ habens BAC. [a] Ducatur ex B ad CA productam perpendicularis BD. Dico quadratum ex BC maius eſſe eis, quæ ex BA, AC, rectangulo bis CA, AD contento. Cum enim recta CD ſecta ſit vtcunq; in A; [b] erit quod ex DC æquale illis, quæ ex CA, AD quadratis; & ei, quod bis CA, AD continetur. Commune addatur, quod ex DB. Ergo quæ ex CD, DB æqualia ſunt illis, quæ ex CA, AD, DB quadratis, & illi, quod bis CA, AD continetur. ſed illis, quæ ex CD, DB quadratis [c] æquale eſt, quod ex CB (eſt enim angulus ad D rectus) illis autem, quæ ex AD, DB [d] æquale eſt, quod ex

a propoſ. 12.1.

b propoſ. 4.2.

c propoſ. 47.1.

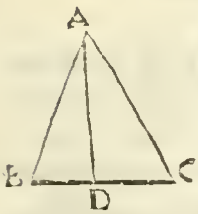
d propoſ. 47.1.

AB

AB quadratum. Quod igitur ex CB æquale eſt illis, quæ ex CA, AB quadratis, & rectangulo bis CA, AD contento. In triangulis ergo obtuſangulis, &c. Quod oportuit demonſtrare.

Propoſ. XIII. Theor. XII.

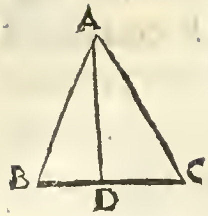
In acutangulis triangulis quadratum lateris acutum angulum ſubtendentis minus eſt quadratis acutum continentibus rectangulo bis contento, & ab vno latere acutũ continente, in quod perpendicularis cadit, & à linea à perpendiculari intus aſſumpta ad angulum acutum.



SIt acutangulũ triangulum ABC, habens acutum B: *a* ducatur ab A in BC perpẽdicularis AD. Dico quadratum, quod fit ex AC, minus eſſe illis, quæ fiunt ex CB, BA, rectangulo bis CB, BD contento. Cum enim recta CB ſecta ſit vtcumque in D; *b* erunt quæ ex CB, BD quadrata æqualia bis CB, BD contento, & illi quod ex DC quadrato. Commune addatur quod ex AD; ergo quæ ex CB, BD, DA quadrata ęqualia ſunt bis CB, BD con-

a *propoſ.* 12.1.

b *propoſ.* 7.2.



tento, & quadratis, quæ ex AD, DC. Sed illis, quæ ex B D, D A, quale eſt quod ex AB (eſt enim angulus ad D rectus) illis verò quæ ex A D, DC æquale eſt quod ex AC. Ergo quæ ex CB, BA æqualia ſunt & illi, quod ex AC quadrato, & illi, quod bis CB, BD continetur. Quare quod ex AC quadratum minus eſt illis, quæ ex CB, BA quadratis rectangulo bis BC, BD contento. In triangulis ergo acutangulis, &c. Quod demonſtrare oportuit.

§ XVI.

Vſus ampliſſimus propoſitionum 12, & 13 in vniuerſa Geometrà practicà. Compendia à nobis organica; & alij vſus.

1 *Ope duarum harum propoſitionum 12, & 13 docetur geometricè, atq; exactiſsimè quantitas lineæ perpendicularis à dati trianguli vertice ad baſem, iuxta exempla apud Comandinum, Clauium. &c., Ex ductu cognitæ perpendicularis in dimidiam trianguli baſim habetur area rectanguli æqualis dato triangulo. Et quoniam quæcumq; figuræ planæ, etiam irregulares, ſecantur in triangula, iuxta dicta à nobis ad 32 primi, ex cognitis triangulorum areis habentur cognitæ etiam omnes areæ omnium planarum figurarum, etiam irregularium. Quin & ex arearum cognita dimenſione prodit etiam cognitio ſoliditatis figurarum, ac magnitudinum omnium, vt ad finem huius libri aliquid indicabimus.*

Dimenſiones planarũ & ſolidarum figurarũ è propoſ. 12, & 13 hu lib. 2.

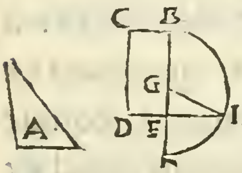
Quoniam vero inuestigatio lineæ perpendicularis à vertice dati

ti trianguli ad baſim in triangulis non rectangulis [illegible] paulo operoſior pro Tyronibus, habes à nobis compendia in § 3 ad propoſ. 10 lib. 1; § 3 ad prop. 41, § 17 ad pr. 47; & alibi in 2 Tom. ad lib. 6, ſcilicet deductà perpendiculari, & inuentà eius quantitate per circinum partium, qualium etiam 100 potes fingere dimidiam baſim. &c.

2 *Ex hiſce pariter 12, & 13 propoſ. patet modus cognoſcendi* quantum ſit quadratum cuiuſuis lateris trianguli cum quadratis aliorum duorum laterum comparatum, nempè an ſit illis æquale, an maius, minuſue, & quanto maius ſit, aut minus, prout videlicet angulus aſſumpto lateri oppoſitus fuerit rectus, vel obtuſus, aut acutus. *Clauius.*

Propoſ. XIV. Probl. II.

Dato rectilineo æquale quadratum cõſtituere.



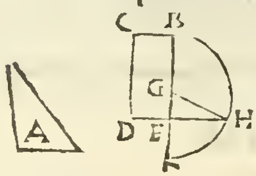
ESto rectilineũ A, cui oporteat æquale quadratum conſtituere. [a] Fiat rectilineo A ęquale parallelogrammum rectangulum BD. Si igitur BE, ED fuerint æquales; factum eſt quod petitur; erit enim rectilineo A æquale quadratum BD. Si non, erit vna ipſarum BE, ED maior. Sit maior BE, quæ producatur in F, [b] fiatq; FE ipſi ED æqualis; [c] biſeceturq; FB in G, & centro G, interuallo GB, aut GF, deſcribatur ſemicirculus BHF, & producatur DE in H, ducaturq; GH. Cùm itaq; recta BF ſe-

a propoſ. 45.1.

b propoſ. 2.1.

c propoſ. 10.1.

d prop 5. 5.2. F ſecta eſt æqualiter in G, inæqualiter in E,[d] erit quod BE, EF continetur, cum eo quod ex EG quadrato, æquale ei, quod ex G F quadrato. Sunt autem GF, GH æquales. Quod ergo BE, EF continetur cum eo quòd ex GE, æquale eſt
e propoſ. 47.1. illi, quod ex GH: illi verò quod ex GH,[e] æqualia ſunt quæ ex HE, GE quadrata: ergo quod BE, EF continetur, cum eo quod ex GE, æquale eſt illis, quæ ex HE, GE. Commune auferatur,



quod ex GE, & erit reliquum, quod BE, EF continetur; æquale ei, quod ex EH quadrato: ſed quod BE, EF continetur eſt ipſum BD, ſiquidem EF, ED ſunt æquales: parallelogrammum ergo BD æquale eſt ei, quod ex HE, quadrato. Eſt autem BD æquale rectilineo A: ergo rectilineum A æquale eſt quadrato ex EH deſcripto. Dato ergo rectilineo A æquale quadratum conſtituimus, id nimirum quod ex EH. Quod facere oportuit.

§ XVII.
Vniuerſalitas, vtilitas ad vniuerſam Geometriam ſpeculatiuam, & practicam huius 14 propoſ.

1 F*iguram rectilineam quamlibet (vniuerſaliſsimè loquendo) etiam irregularem dum transformat in quadratum, ac facil-*

facillimè, propoſitio hæc 14 facillimam etiam viam aperit pro dimenſione planarum rectilinearum figurarum. Quæ per hanc prop. 14 transferũtur in quadrata, & multiplicato latere quadrati in ſe, habetur area figuræ per quadratula. Quam ad rem facilius exercendam habes à nobis ſubſidia ex ijs, quæ ad 2, & 3, & præcipue ad 4 prop. huius lib. 2 expoſuimus. Itaq; aperit hæc propoſitio campum transformationis geometricæ rectilineorum in quadrata, & dimenſionis omnium earum figurarum.

2 Præterea cùm hæc eadem propoſitio tacitè doceat inuentionem lineæ mediæ proportionalis non diſsimili modo à propoſ. 13 libri 6 (eſt enim hic in fig. Eucl. EH media proportionalis inter rectanguli BD latera BE, ED, ſiue EF æquale ipſi ED) ſimul clauem affert geometricam vniuerſaliſsimam ad infinita problemata, quæ in philoſophia Geometrica ſoluuntur ope mediæ proportionalis, & ad vſus præclaros transferuntur in omni mathematicarum ſcientiarum, & aliarum artium genere.

Vide nos ad lib. 6, vbi de mediæ proportionalis vſibus.

§ XVIII.
Locus Ariſtotilis inſignis elucidatur ex hac 14 propoſ.

IN 2 lib. de anima tex. 12 docet Philoſophus duplex eſſe genus definitionis, ſcilicet formalis, & cauſalis. Vt hic: Quid eſt quadratio? &c. eſt effectio rectanguli æquilateri, ideſt quadrati, quod ſit æquale rectangulo altera parte longiori. hæc formalis eſt. Cauſalis verò docens cauſam efficientem huius quadrationis, eſt ſi dicas: Quadratio rectilinei eſt inuentio mediæ proportionalis, quæ dat latus quadrati. Nam eius mediæ inuentio cauſa eſt efficiens quadrati conſtruendi è quatuor rectis lineis ipſi mediæ, atq; inter ſe æqualibus. Ex hiſce lege, & intellige verba Philoſophi. Huc plura ad eruditionem eius loci è penu geometrico de tetragoniſmo apponant Doctores Geometrici ſuis Auditoribus. Satis hæc nunc ſapienti.

SCHOLION.

Adiumenta ad praxim huius 14 propoſ.

Noſtra Methodus firmatur.

Vide Clauium ad hanc 14 propoſ. Eundem melius lib. 4. Geom. Pract. cap. 4 num. 4 vbi, licet nonnihil ſupponatur è lib. 6 elem. tamen iuxta noſtram methodum Tyro non priuatur eà cognitione, quam iam habet à 6 lib. in antecedenti 2. tomo, vt poſsit aſſequi perfectam ſcientiam pro praxi vertendi quamcumque figuram rectilineam etiam irregularem in quadratum ad vſus, quos in anten. § 17 indicauimus. Itaq. diuiſo rectilineo in triangula, vt docuimus ad 32 propoſ. lib. 1, & ex hac 14 translatis triangulis in quadrata, & per praxim in Probl. 6 ſub § 11 ad 47 propoſ. lib. 1, omnibus ijs quadratis in vnum redactis, habetur intentum.

§ XIX.

Problematis eximij, ac vniuerſalis ex hac 14 propoſ. indicata ſolutio.

Problema quod Clauius ad hanc 14 propoſ. ponit ſolum de quadrato, ſoluit etiam in lib. 8 Geom. pract. propoſ. 14, & aliter, & vniuerſalius etiam de Rhombis, de Rectangulis, de Rhomboidibus, ſcilicet: dato exceſſu diametri ſupra latus, inuenire latus, ſuper quo conſtituantur quadratum, rhombus, rhomboides, rectangulum, quorum ſint diametri habentes illum exceſſum. *&c. Problema ſolutũ vniuerſalius in Geom. pract. licet ſupponat aliquid è lib. 6 elem. tamen Tyronibus nihil officit imbutis cognitione libri 6 è noſtra methodo, iuxta prædicta in antec. Schol.*

Noſtræ Methodi vſus.

§ 20.

§ XX.

Campus Geometricus circa quadrationes curuilineorum.

QVemadmodum docet hæc propoſitio quadrare rectilinea, ſic extendi etiam poteſt ad quadrationes curuilinearum, vel mixtilinearum figurarum, vt circuli quadraturæ proludatur. In hoc campo nos non pauca, ſiue ſeuimus, ſiue demeſſuimus, ac quidem facillimis modis, præſertim in Apiar. 1, pr. lib. 3, vbi habes Proteum Geometricum; & Apiar. 3, progym. 5, & 6, vbi curua rectis æqualia exhibuimus. Vnde haberi poſſunt quæ ornent, & condiant Tyronibus hanc 14 prop. eamq́; extendant in latiſsimum, & paradoxicum campum quadrandi etiam non rectilinea.

SCHOLION.

Pro noſtra Methodo.

I*N* § 14 *antec. vides rectè præmiſſum lib.* 6, *vbi de proportionibus, vt intelligantur quæ in hoc* 2 *lib. ad propoſ.* 5 *ponuntur de triplici genere proportionalitatum.*

§ XXI.

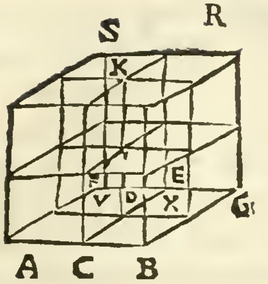
APPENDIX,

Pro ſeptimo Ærarij Tomo(præter algebratica) & campi Planimetricus,& Stereometricus è nouo vſu geometrico centri grauitatis, quo liber hic ſecundus eleuatur ad parallelepipeda, & ad alia ſolida rotunda cōponenda, reſoluenda, dimetienda, inter ſe comparanda. &c. Quorum omnium radices in hoc ſecundo libro ſunt.

1 *PLeraſq; propoſitiones, quas in hoc 2. libro habet Euclides, à ſectionibus linearum ad rectangulorum compoſitionem traductas, licet (aliter etiam, quàm fecimus in aliquibus exemplis ad eas) eleuare, & transferre à ſectionibus ſuperficierum rectangularum ad compoſitionem ſolidorum parallelepipedorum, quadratorum, &c. ſuppoſita cognitione, ac vi geometricà centri grauitatis à noſtro Guldino proditá in lineis, & ſuperficiebus planis tam rectilineis, quàm curuilineis. Exempla dabimus circa aliqua faciliora pro Tyronibus.*

2 *Rectæ AB centrum grauitatis eſt medium punctum C, ſi AB concipiatur moueri horizontaliter, vt poſtulat centrum grauitatis C, (à quo ſuſpenſa æqualiter, ac perpendiculariter tota diſtat ab horizonte) id eſt æquabiliter, ſignabit punctum C rectam perpendicularem; verbi gratia, ipſam CE, (quæ obliqua eſt in figura obiecta oculis lateraliter ex optica deſcriptione, vt eius partes oculis appareant) quam finge æqualem ipſi AB; itaq; primi generis quantitas, id eſt linea AB mota, ſi ducatur in viam CE, perpendiculariter factam à centro E, producit quadratum AG. Cuius centrum grauitatis eſt medium punctum D, ex quo imaginariè ſuſpenſum*

æqua-



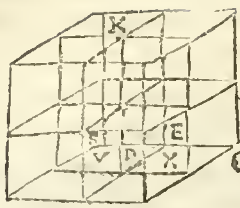
æqualiliter diſtat planum quadratum AG ab horizonte. In ea igitur æqualitate ſi fingas AG eleuari, centrum D imaginariè ſignat viam perpendicularem DK, quam finge æqualem eſſe vni laterum, puta ipſi AB. Quantitas igitur ſecundi generis, ideſt ſuperficies rectangula AG, ducta in viam DK, perpendiculariter factam à centro D, producit ſolidum cubicũ BS.

3 *Quibus poſitis vtamur exemplo 2 propoſ. huius libri, illudq́; transferamus à planis ad ſolida. Alia exempla alij addent ex alijs huius libri propoſitionibus. Propoſitio ſic formetur.* Si datum quadratum ſecetur in minora rectangula habentia vnum latus æquale alteri lateri inſecto dicti quadrati, parallelepipeda, facta à minoribus rectangulis perpendiculariter eleuatis ad altitudinem lateris inſecti, æqualia erunt cubo, quod fit à dato quadrato. *Propoſitio 2 hu. formata pro ſolidis.*

Quadratum AG, ſecetur, exempli gratia, in duo æqualia rectãgula AE, CG, quorum centra grauitatis finge in V, X, quibus perpendiculariter eleuentur ad longitudinem inſecti lateris AF, vel BG, fient parallelepipeda duo CS, CR quibus æqualis erit cubus BS factus à quadrato BF eleuato per centrum D perpendiculariter vſq; ad K altitudinem æqualem vni laterum AB quadrati BF.

Demonſtrationem afferam ex vſu geometrico centri grauitatis, eamq; confirmabo oſtenſione in numeris. Quoniam duo rectãgula CF, BE ſunt æqualia quadrato AG, immò ipſum conficiunt, & viæ perpendiculares centri grauitatis rectangulorum, & quadrati ponuntur æquales, nempè vni, eidemque DK; ergo cubus conflatus ex ductu quadrati AG in altitudinem DK, erit æqualis duobus parallelepipedis conflatis ex ductu rectangulorum CF, BE in eandem altitudinem DK, iuxta corollarium Guldini ad finem propoſitionis 3, cap. 8, lib. 2 de vſu geometrico centri grauitatis. Quando enim quantitates motæ ſunt æquales, & viæ centrorum grauitatis ſunt æquales, figuræ conflatæ ex ductu motarum quantitatum in vias centri, ſunt æquales. Si enim partes componentes ſunt æquales, quis dubitet & compoſita eiuſdem generis eſſe æqualia? Accipe & in numeris.

4 *Qua-*



4. *Quadratum AG 4 diuide in duo, puta æqualia rectangula, quorum vtrumq; ſit 2, & 2, rectangulum EF 2 ductum in altitudinem DK 2 conficit parallelepipedum CS 4; pariter rectã-gulum CG 2 ductum in DK 2 conficit parallelepipedum 4, hoc eſt duo illa parallelepipeda continent ſingula 4 cubos, & ſimul compoſita conficiunt 8 cubos. Pariter quadratum BF 4 ductum in viam centri DK 2 conficit 8 cubos eoſdem. &c.*

SCHOLION.

Q*Vuod facilitatis gratia pro Tyronibus propoſuimus de quadrato, & cubo, licet vniuerſalius proponere de quolibet rectangulo, & parallelepipedo, cuius † omnis notionem (quæ hìc patet in figuris) vide apud Eucl. lib.* 11, *def.* 30. *Omnis cubus eſt parallelepipedum, at non contra; cubi enim parallelæ oppoſitæ ſex figuræ planæ, non ſolum quadrilatera, & rectangula, ſed & quadrata ſunt.*

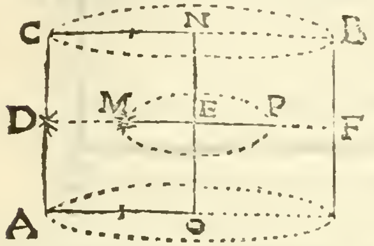
§ XXII.

Parallelepipedorum, atq; etiam omnium aliorum ſolidorum rotundorum compoſitio, & reſolutio ad hunc lib. 2.

1 Q*Vemadmodum centrum grauitatis recto, & perpendiculari motu dat viam, in quam recta linea ducta ſuperficiem rectangulam, ſuperficies rectangula parallelepipedum producunt; ſic idem centrum grauitatis circulariter motum dat viam circularem, in quam ducta linea vel recta, vel circularis, vel mixta producunt ſuperficies circulares, ſiue rotundas; ac pariter ſuperficies quælibet plana regularis, vel irregularis, ducta in motum centri circularem, producit ſolida circularia, ſiue rotunda cuiuslibet figuræ, vt iam habes exẽ-*

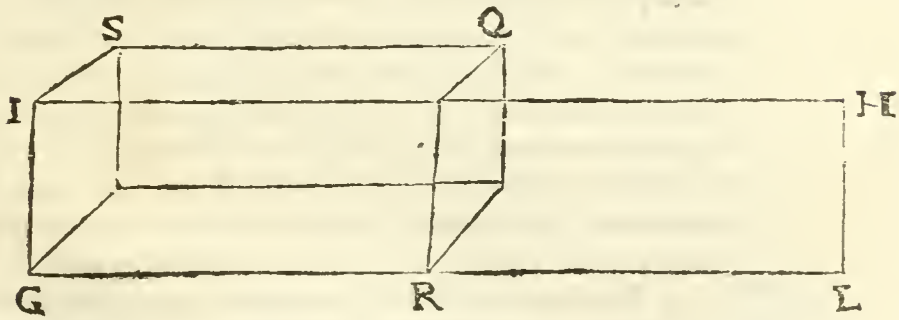
pla

pla à nobis aliqua in vtroq; huius Ærarij tomo ad 1, & 6 libros, & ad finem libri tertij, & in Breuiario Stereometrico ad finem huius to. videbis. Illuc viſe, ne repetamus iam non ſemel dicta.



Interim hìc vide in exemplo Cylindri AB. Cuius ſuperficies ſine baſibus producitur ex ductu lateris AC in lineam circularem, quam ſignat centrũ D ipſius rectæ AC, dum recta ED, fixa in E medio perpendicularis NO, rotat extremum D. Itaq; ſuperficies ea cylindrica, ſine baſibus, eſt æqualis rectangulo ſub CA, & ſub rectà æquali peripheriæ ſignatæ à D, hoc eſt, iuxta Archimedis calculos (omitto, facilitatis gratia pro Tyronibus, ſeptimam illam partem acciſam vltra triplicatam diametrum. &c.) triplicatæ à diametro DF. Quale rectangulum pono GH, ſub GI æquali ipſi CA, & ſub

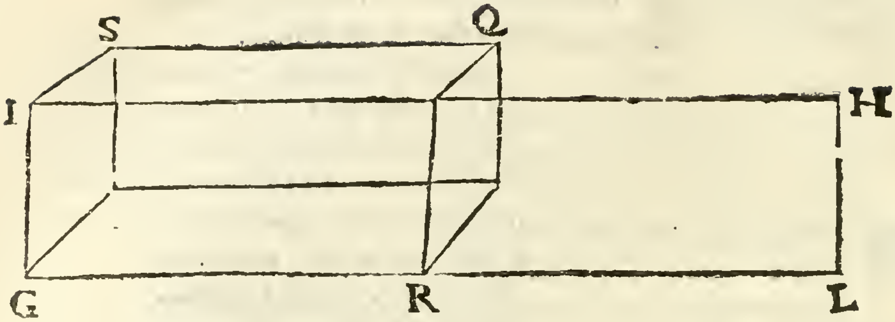
Superficiei cylindricæ reſolutio in rectãgulum.



GL tripla ipſius DF; Quare vides ſuperficiem curuilineam redactam ad rectangula huius lib. 2. Pari ratione quæcumq; alia rotunda ſuperficies, facta ex ductu lineæ cuiuslibet in viam circularem centri grauitatis, reducitur ad rectangulum. &c.

2 *Quod verò ad ſoliditatẽ attinet, quoniã (in fig. 1) ea conflatur ex ductu rectanguli AN in viã circularẽ factam à centro grauitatis M in eodem rectangulo AN, dum id moueri fingitur circa latus NO;*

Cylindri ſoliditas reſoluta in parallepipedũ.



NO; ergo ea cylindrica ſoliditas erit æqualis parallelepipedo ſub rectangulo AN, habente pro altitudine, ſiue longitudine latus, ſiue rectam æqualem peripheriæ factæ à puncto M, hoc eſt rectam triplam (neglecta in hoc exemplo acciſa ſeptimà. &c.) diametri MP. Siue aliter: ſoliditas cylindri eſt æqualis parallelepipedo ſub rectangulo (facto à ductu altitudinis cylindri in ſemidiametrum baſis) & ſub altitudine æquali diametro, & ſemidiametro baſis; neglecta ſeptimà. &c. Quale parallelepipedum vides GQ, in quo GR latus, ac reliqua tria parallela, ponũtur tripla ipſius MP, ſiue ſunt æqualia diametro CB, & ſemidiametro CN. Rectangula verò oppoſita, & parallela GS, RQ concipienda ſunt æqualia ipſi AN. Pariq́; ratione quæcumq; alia ſolida rotunditatem habentia erunt æqualia parallelepipedis contentis ſub plano rotato, & ſub recta æquali peripheriæ factæ à centro grauitatis plani rotati. Quare vides quemadmodum etiam ſolida rotunda reducantur ad librum hunc ſecundum, quem à planis rectangulis eleuauimus ad parallelepipeda.

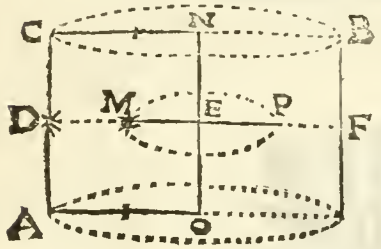
E reſolutionibus curuarum ſuperficierũ, & ſoliditatum, earum dimenſiones, proportiones, &c.

3 Eàdem opera, quà vidiſti compoſitionem planorum rectangulorum, vel rotundorum ex lineis motis, & ex motu centri grauitatis, compoſitionem vero ſolidorum parallelepipedorum, vel rotundorum ex planis vel rectangulis, vel curuilineis ductis in viã rotationis factã à centro grauitatis, vides etiam reſolutionem ſolidorum in plana, & rectangula vel rotata, vel perpendiculariter motã à centro grauitatis, ac ſimul etiam habes dimenſiones eorumdem vel planorum, vel ſolidorum. Planorum enim dimenſio fit ex ductu lineæ motæ in viam vel perpendicularem, vel circularẽ à

centro

centro grauitatis motæ lineæ factam. Solidorum verò dimēſio fit ex ductu plani vel rectanguli, vel curuilinei in viam vel perpēdicularem, vel circularem à centro grauitatis moti plani factam, iuxta indicata in antecedentibus. Vide exempla apud nos in fine hu. 3 Tomi, in Breuiario Stereometrico, Sectione 2.

4 Proportiones vero (de quibus, iuxta noſtram methodum, aptè poſt librum ſextum licet in hoc 2 libro ſermonem facere) & comparationes, ac differentiæ planorum, vel ſolidorum conflatorum ex motis lineis, vel planis, & ex vijs vel perpendicularibus, vel circularibus à centro grauitatis, habentur ex proportionibus, ac differentijs tum quantitatum motarum, tum ex differentijs motuum à centro grauitatis; poteſtq; regula vniuerſalis eſſe: figuræ inter ſe ſunt, vt ea, à quibus ſunt. Itaq; cum motæ quantitates ſunt æquales, & viæ à centro grauitatis ſunt æquales, ſunt etiam æqualia vel plana, vel ſolida. &c. Sic, in exemplo, quia tam in cylindro AB, quàm in parallelepipedo GQ mota rectangula AN, GS, &c. ſunt æqualia, & motus circularis à centro M eſt æqualis motui directo GR, propterea ſolida circulare AB, & parallelepipedū GQ ſunt æqualia. Cùm motæ quantitates, & viæ reciprocantur, ſunt etiam tunc figuræ æquales, vt vidiſti in exemplis apud nos ad propoſ.



14, & 15, & videbis inferius in noſtro Breu. Stereom. Cum motæ quantitates, & viæ differunt, figuræ habent compoſitam proportionem. &c. vt vidiſti apud nos in exemplis ad propoſ. 20, & 23 lib. 6, & videbis in citato Breuario Stereometrico in fine hu. 3 To. Vide corollaria citata ex Guldino. &c.

5 Ex hactenus dictis habes campum immenſum planimetricum, & ſtereometricum ad hunc, & ex hoc 2 libro, eumq; nouum ex nouo vſu geometrico cētri grauitatis, non ſolùm pro curuilineis, & rotundis infinitis numero quantitatibus, ſed etiam pro planis rectangulis, & ſolidis ſub planis rectangulis, ad quæ reducuntur ro-

tunda. &c. Quæ omnia propoſuimus hìc ſaltem in aliquo exemplo indicata. Plura vide in citato Breu. Stereometrico.

Interim à nobis habe quantus ſit exiguus hic 2 libellus geometricorum elementorum pro vtraq; quantitate diſcreta, & continuà, pro Arithmetica, pro Planimetrià, & pro Stereometria. &c.

6 *Aptiſsimè igitur poſtremo loco elementum hoc geometricum (quod, iuxta antiquam methodum, eſt ſecundum) poſuimus, in quod pene vniuerſa philoſophia de quantitate reſoluitur; & aptiſſimè huius extremi libri extremum occupat locum figura quadrata, quæ, per antedicta, radix eſt pro recondita, & multiplici cognitione theoretica, & problematicà penè omnium figurarum (irregulares enim quælibet planæ figuræ (à quarum gyratione fiunt rotunda ſolida verſiformia) vertuntur in quadrata, vt pateat proportio rotatarum quantitatum, &c.) Quare & nos hìc aptiſsimè finem facimus theoriarum, & problematum noſtræ, atq; elementaris (etiam vltra elementa eleuatæ) planimetricæ Philoſophiæ.*

EPILOGVS
PLANIMETRICVS,
IN QVO

Præcipua aliqua Theoremata,

Præſertim Librorum I, II, VI

ELEMENTARIORVM
DE PLANIS FIGVRIS

Aliter ex earum ortu, & ex vſu Geometrico centri grauitatis breuiſſimè, ac facillimè demonſtrantur, & confirmantur,

Et à Pſeudogeometriæ fucis propugnantur; ac tranſitus fit à planis ad ſolida.

EPILOGI PLANIMETRICI

PARS PRIMA

In vſu Geometrico centri grauitatis circa aliqua Elem. Plan.

AMICO LECTORI.

De primis principijs, quibus nititur nouus vſus geometricus centri grauitatis. De cauſis, & modo huius Epilogi Planimetrici.

1 *Noſter Guldinus in vſu geometrico centri grauitatis circa vel ſuperficies rotundas, vel ſolida rotunda, quæ ſcilicet progignuntur è circulariter gyratis vel lineis, vel ſuperficiebus, ſatis habuit ſua firmare ab effectu, ideſt oſtendere vſum illum geometricum centri grauitatis eſſe legitimum, & quòd theoremata per eum prolata, & probata congruunt cum theorematibus ab antiquis Philoſophis Geometricis indirectè, vel aliter demonſtratis.*

Nos quemadmodum centro grauitatis in lineis, & ſuperficiebus geometricè vtimur etiam extra rotunda, velut in priſmatum, parallelepipedorum.&c. ſuperficiebus, & ſoliditatibus; ac præterea ſolidorum aliquorum rotundorum (velut cylindrorum &c.) ſuperficies, & ſub ipſis ſoliditates prodimus non à gyratione circulari, ſed à motù recto tam linearum vel rectarum, vel circularium, vel mixtarum, quàm ſuperficierum planarum variè terminatarum; ſic ampliati à nobis vſus geometrici centri grauitatis veritatem ſcientificam oſtendimus non ſolum ab effectu congruentiæ cum alienis antiquorum

Ampliatus à nobis vſus geometricus cētri grauitatis.

theorematibus ritè demonſtratis, ſed etiam à primis principijs, quibus nititur motus linearum, vel ſuperficierum in progignendis ſuperficiebus, & ſolidis. Ea verò prima principia paucis hic indicata ſunt ſequentia.

2 *In element lib.1. ad defin 15. §.2. & lib.11. defin.14, 18, 21, habes & circuli, & ſphæræ, & coni, & cylindri definitiones, ac formationes à gyratione lineæ circa alterum eius extremum ſemicirculi trianguli, rectanguli &c. Guldinus tranſtulit ad omnium rotundorum, & ſuperficierum circa ea procreationem. Nos traducimus etiam ad motum rectum, & ad procreationem figurarum planarum, & ſolidarum non rotundarum.*

Ampliationes circa ortus figurarũ.

Quoniam igitur, (iuxta ingenioſè ab antiquis pronuntiatum in abſtractione geometrica) à motu puncti linea, à lineæ ſuperficies, à ſuperficiei ſolidum progignitur; vt ſuperficierum, & ſoliditatum quantitates, proportiones, & alia eas figuras conſequentia cognoſcantur, inueſtiganda eſt cognitio non ſolum quantitatum motarum, ſed etiam motùs ipſius, quo quantitates motæ figuras producunt. Quantitas ipſius motus petenda eſt à menſura certa, qualis eſt ſola perpendicularis, vt demonſtrauimus non ſemel in 1. To. hu. Aerarij. Perpendicularem verò motionem ſignat in lineis, & ſuperficiebus certum, ac vnicum tantùm punctum, quod eſt centrum grauitatis, quo (quemadmodum grauia, iuxta prima principia machinariæ philoſophiæ, de quibus nos in To. 2. Apiar. 10.) lineæ, ac ſuperficies liberè defluentes (in abſtract à geometrica conceptione) feruntur, per lineam breuiſſimam; quam in Machinaria lineam directionis ad mundi centrum appellant. At ratio cur ſolum centrum grauitatis, per breuiſſimam eam lineam deferatur eſt, quia circa id centrum (iuxta illius definitionem) æqualiter ponderant omnes partes rei grauis, nec eſt quod earum aliqua nitatur magis quàm alia, vt punctum centri grauitatis à linea directionis dimoueat. Primum verò & vniuerſaliſſimum prædictorum omnium principium eſt, Natura non impedita operatur per breuiſſima, *vt quamcitiſſimè fines ſuos aſſequatur, nec fruſtra faciat per plura quod (cæteris paribus) poteſt per pauciora.*

Que-

3 *Quemadmodum igitur à centro grauitatis petenda eſt (propter prædicta) legitima menſura motus liberi, ac recti; ſic ab eodem puncto centri grauitatis petenda eſt certa menſura motus non liberi, nec recti, quando graue, ſiue linea, & ſuperficies in motu detinentur in aliquo ſui extremo, ac termino, qualis eſt motus circularis vel rectæ lineæ altero ſui extremo manente, vel ſemicirculi, vel trianguli, vel rectanguli, vel cuiuſcunque alterius pluriformis lineæ, ac ſuperficiei rotatio pro formatione ſuperficierum circularis, vel aliarum, vel ſolidorum ſphæræ, coni, cylindri, vel aliorum quorumcunq; rotundorum. In illis enim rotationibus rotatorum centra grauitatis habent circa ſe partium æquiponderantiam, & nituntur per quàm poſſunt breuiſſimam etiam dum in ſui extremo aliquo circa vel punctum aliquod, vel axem à recto motu impediuntur, & coguntur in circularem flectere rectam, & breuiſſimam ſui motus lineam, vt, verbi gratia, pro parallelepipedo producant cylindrum, vel pro rectangulo ſuperficiem cylindricam. &c. Ea propter menſura eorum rotundorum rectè ſumitur ab ea circulari linea, quæ æqualis eſt rectæ breuiſſimæ motus liberi, & menſuræ certæ, ac determinatæ à certo, ac determinato vnico puncto centri grauitatis.*

Itaque noua, & mirifica doctrina de vſu geometrico centri grauitatis nititur non ſolum effectu congruentiæ cum theorematibus antiquis, ſed etiam causà originarià, & primis principijs geometricis, ac etiam phyſicis. Quibus niſi niteretur (ac multo magis ſi ijs repugnaret, vt repugnant indiuiſibilia, quod inferius videbis in 2. par. hu. Epil.) non prorſus validè ſe firmaret ſolà congruentià cum antiquis theorematibus.

4 *Nec illi faueret vulgatum illud*, ex falſo verum non prodit, *ergo, ſi veri ſunt partus geometrici, & congruentes cum antiquis, vera etiam eſt regula, vnde prodeunt. Reſponderi enim poſſet poſſe etiam à falſo per accidens verum prodire; ac diſtinguendum eſſe inter rei & ſcientiæ veritates. Poteſt enim aliquod verum, ac demonſtratum ab antiquis* Cõgruẽtia cum ritè demonſtratis nõ arguit bonam demonſtrationem.

attin-

attingi falſà ſcientià, ideſt adiri per ratiocinationem nitentem falſis principijs, ac tunc qualia ſunt principia talis & ratiocinatio, & ſcientia. ſcilicet falſa circa rem perſe veram. Aliud eſt habere veram rei cognitionem, aliud rem eſſe veram. Itaque quemadmodum principia falſa ſunt, (velut per indiuiſibilia contra 4. defin. l. 5.) ſic falſam producunt ſcientiam circa rem, cuius veritas aliunde conſtat. Ac ſi non conſtet aliunde rei veritas, conſtare non poteſt è ratiocinio prodeunte à falſis principijs.

Itaque quemadmodum vſui geometrico centri grauitatis fauet id; Verum nonniſi ex vero, *propter, & iuxta prædicta; ſic nullo modo fauet ijs, qui in geometrica philoſophia nituntur falſis principijs (verbi gratia, contra 4. definit. lib. 5. elem.) tamen putant ſe legitimè geometricè, demonſtratiuè, ſcientificè philoſophari. Quod nemo vnquam verè ſcientificus conceſſerit. Nam verum (ſi tamen liceat) per falſa cognoſcere, ac ſcire eſt ignorare. ac neſcire.*

Inane cõfugiũ geome-tricè paralogizã tium.

4 *Nos igitur in hoc Epilogo geometrico poſt vulgatum modum demonſtrandi ſingulas propoſitiones librorum ſex elementarium de planis, cenſuimus è re geometrica futurum, & varietatis, & nouitatis iucunditatem non defuturam, tibi, Amice Lector, ſi planarum figurarum, præcipuè regularium, pracipuas affectiones facillime breuiter, ac aliter, quam apud Euclidem, demonſtremus, videlicet cum vſu geometrico centri grauitatis, quaſi à primo figurarum ortu cognità quantitate tum linearum motarum, tum viarum à centro grauitatis perpendiculariter ſignatarum, vnde planæ figuræ conſtantur. Ac meritò geometricæ philoſophiæ pręcipua aliqua elementa de planis figuris in hoc Epilogo, & de ſolidis in Breuiario Stereometrico poſt hunc epilogum, geometrico centri grauitatis vſu firmamus, vt ab hac geometrica grauitate non parum ponderis, decoris, ac maieſtatis ipſimet geometricæ philoſophiæ accedat.*

5 *Suppoſitis tamen ijs, quæ circa eius centri vſum geometricum, & regulas ab eo deductas non ſemel adhuc diximus in 1. & 2. huius Eraij Tomo, ad propoſ. 10. l. 1. §. 8. ad pro. 45.*

§. 3.

§.3. Et in lib.6 ad prop. 14,15,20,23. Et ad finem lib.3.& l.2. Quibus adde ea, quæ in Breuiario Stereometrico ſolidis exemplis adfirmamus ſub finem huius 3. Tomi.

6 *Intellige autem, mi Tyro, in huiuſce planimetrici Epilogi demonſtrationibus cum vſu geometrico centri grauitatis nos ita verſari, vt licet pro Euclide, ſint tamen extra Euclidem; ideſt ſuppoſitis iam Euclideis planis elementis. Ac ideo, poſt eorum finem, loco Epilogi geometrici, hæc apponimus, in quibus liberum eſſe nobis voluimus vti promiſcuè propoſitionibus, quas apud Euclidem iam in antecedentibus expoſuimus.*

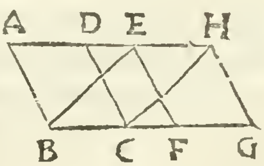
Nihilominus Doctores Geometrici, ſiue Tyrones Auditores, poterunt hinc ſibi aſſumere aliquas ad faciliorem demonſtrationis euidentiam pro aliquibus Euclidis propoſitionibus aliter demonſtrandis, modò eas hinc aſſumant, quæ, applicatæ propoſitionibus aliquibus Euclidis, non egeant cognitione poſteriorum.

Pucula hìc exempla in hoc Epilogo planimetrico deducant Tyrones per plures alias elementares propoſitiones de planis figuris; atq; interim æqui, boniq; faciant apud nos hanc demonſtrandi formam in figuris planis planè planam.

§ I.

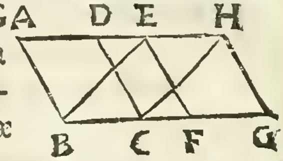
THEOREMA I, & II.

Libri primi Elem. propoſitiones 35. & 36.



PArallelogrammorum AC, EG, ſuper eadem, vel æqualibus baſibus, eiuſdem quantitatis ſunt rectæ BC, FG, & ſunt inter eaſdem parallelas, ideſt habent eandem perpendicularem altitudinem, iuxtà defin.4. lib.6. Hoc eſt ſi fingas per

per centra grauitatis media inter B C, & inter F G, eleuari perpendiculariter æquales B C, F G ad parallelam A H, ſignabunt ea centra æquales vias. Cum ergo parallelogrammorum A C, F H ſint & æquales viæ perpendiculares centri grauitatis, & æquales motæ quantitates B C, F G, conſtituent duo rectangula & æqualia inter ſe, & æqualia duobus parallelogrammis B D, F H, quorum eædem ſunt lineæ B C, F G motæ, & eædem motiones perpendiculares, ſiue altitudines inter eaſdem parallelas. Figuræ enim ſunt inter ſe vt quantitates motæ, & viæ perpendiculares à centris grauitatis, per quas ductæ quantitates conſtituunt figuras.



SCHOLION I.

IN obliquo B H recta E H, dum à perpendiculari deſcenſu obliquatur verſus B C, habet in mixto eo, ſiue obliquo motu perpendicularem, à centro grauitatis medio inter E H, quaſi concisam in minutiſſimas partes, & gradatim distractas verſus B C, eſtque eadem quæ fieret perpendicularis menſura à medio inter E H ad (verbi grat.) F. ac proinde rectè etiam in obliquo B H producitur areæ quantitas à ductu rectæ E H in perpendicularem, quemadmodum fit in parallelogrammo non obliquo, ſiue rectangulo.

SCHOLION II,

ET COROLLARIVM.

LIcet eaſdem propoſ. 35, & 36 eleuare ad ſolida, ſi, pro baſibus linearibus, ſubſtituas plana parallelogramma, quæ in eàdem altitudine producunt parallelipipeda æqualia ſuper æqualib. baſib. vnde patent propoſitiones 29, 30, 31, lib. 11 elem. Ac poteſt fieri oſtenſio etiam in numeris. &c. Habes in hoc corollario multa paucis indicata.

§ II.

§ II.

THEOREMA III, & IV.

Propoſit. 37, *&* 38. *lib.* 1. *Elem.*

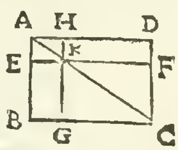
PAtet ex antedemoſtratis. Nam in eadem proportione ſunt tota, & totorum dimidia. Sunt parallelogramata, per antecedentem propoſ. æqualia, ergo & triangula, æqualium dimidia, ſunt & ipſa inter ſe æqualia.

§ III.

THEOREMA V.

Propoſitio 43. *lib.* 1. *Elem.*

PArallelogrammi B D parallelogramata G F, E H, quæ circa diametrum, ſunt ſimilia, per 24. ſexti, hoc eſt, iuxta defin. 1. eiuſdem libri, circa angulos æquales habent latera proportionalia, vt F K ad KG, ſic EK ad KH; ergo complementorum B K, K D latera reciprocantur, hoc eſt, iuxta defin. 2 eiuſdem ſexti, in K D ſunt antecedens F K primæ proportionis, & conſequens K H ſecundæ proportionis; ſicut in B K eſt antecedens EK primæ proportionis, & conſequens GK ſecundæ proportionis. GK ſit pro via perpendiculari ipſius E K motæ vſque ad BG. At verò KH ſit pro via ipſius K F motæ vſq; ad H D. Ergo quantitates motæ EK, KF, & viæ GK, KH reciprocantur; ergo, per 14 lib. 6, complementa BK, KD ſunt æqualia. Quantitates enim planæ ſunt æquales, quarum lineæ motæ, & viæ motùs perpendiculares ſunt æquales, vel ſaltem reciprocantur; iuxta dicta ad citat. propoſ. 14. lib. 6.



§ IV.

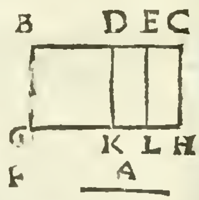
THEOREMA VI.

Libri 2 propoſitio 1.

IN propoſitionibus Libri Secundi, quæ verſantur pene omnes circa rectangula, expreſſior, & facilior erit via perpendicularis ſignata à centro grauitatis lineæ motæ, ac conſtituens cum eà rectum angulum, quàm fuerit in libro primo, pro demetiendis æqualitatibus triangulorum, vel parallelogrammorum obliquorum. Erit hoc à nobis ſingulare geometricum beneficium leuandis difficultati, ac tædio, quæ Tyronibus afferre videntur libri 2 demonſtrationes, quæ longe faciliores ſunt ab vſu geometrico centri grauitatis.

Condimentum lib. 2.

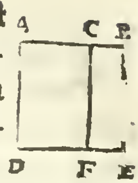
Itaq; in figura primæ propoſitionis, quoniam rectangulum totale G C fit ex ductu motæ G H perpendiculariter in viam perpendicularem, cuius quantitas eſt recta A, ſiue G B; itemque rectangula partialia fiunt ex ductibus partium GK, KL, LH perpendiculariter motarum per vias ſingulas æquales eidem A, ſiue ipſi GB. Eſt autem èadem via quantitatis perpendicularis A, & motæ partes G K, K L, L H ſunt æquales motæ toti G H; ergo partium producta G D, KE, L C ſimul ſumpta erunt æqualia producto totali G C.



§ V.

THEOREMA VII.

Libri 2 Propoſitio 2.

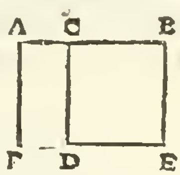


PAriter quadratum ex tota D E æquale eſt rectangulis ſub eadem DE, ſiue ſub illi çquali DA, & ſub partibus DF, FE quia eſt èadem via DA motæ DE ad productionem totalis quadrati DB, & partium DF, FE motarum ad productio nem rectangulorum DC, F B, & ſunt etiam æquales quantitates motæ partiales DF, FE totali DE; ergo. &c.

§ VI.

THEOREMA VIII.

Lib. 2 Propoſitio 3.

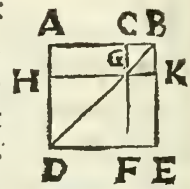


PAriter ſectâ A B in C, & facto rectangulo BF ſub tota AB, & ſub parte CB, hoc eſt ſub illi æquali A F; facto item quadrato B D ex altera parte C D, & facto rectangulo C F ſub vtraque parte A C, C B, hoc eſt ſub illi æquali A F, ſunt quadratum D B, & rectangulum C F æqualia rectangulo F B; quia æquales ſunt viæ, ſiue èadem F A, & quantitates motæ partiales FD, DE ſunt æquales totali motæ F E; ergo &c.

§ VII.

THEOREMA IX.

Lib.2 Propoſitio 4.



QVadrati A E quantitas producitur ex perpendiculariter mota DE, & ex via motùs D A in ſe ductis. Quadrata HF, CK lateribus HG, GK æquant integram quantitatem totius lateris HK æqualis lateri DE maximi quadrati AE; At quadratum FH quantitate HA, quadratum CK quantitate KE deficiunt ab æquatione totius integræ viæ DA, vel BE. Dum ergo latus HG perpendiculariter progrediendo per reliquam quantitatem HA, addit ſibi rectangulum HC, & dum latus GK minimi quadrati perpendiculariter progrediendo per reliquam quantitatem KE addit ſibi rectangulum GE, ſic æquantur & viæ, & motæ quantitates tam maximi quadrati EA, quàm reliquorum duorum quadratorum FH, CK additione rectangulorum HC, KF ſub partibus AC, CG, GK, KE ſectæ AB.

SCHOLION.

PRoportionali modo licebit (non pari tamen facilitate Tyronum cognitioni, ac in quatuor antecedentibus) reliquas ſubſequentes vſq; ad vndecimam reuocare ad eandem formam demonſtrandi, quà vſi ſumus in quatuor antecedentibus propoſitionibus.

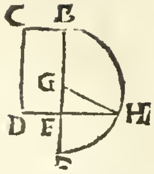
§ VIII.

§ VIII.

THEOREMA X.

Propoſitio 14. *lib.*2.





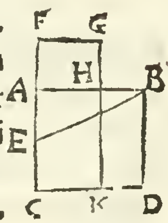
QVoniam in ſemicirculo BHF perpendicularis H E eſt, per 13 ſexti, media proportionalis inter BE,EF, ideſt ED, &, per 17. ſexti, quadratum ex HE eſt æquale rectangulo ſub BE, EF, ideſt E D, ideſt rectangulo DB; ergo vt BE ad E H, ſic E H ad E F, ideſt ED; ergo in quadrato ex E H, & in rectangulo D B ſunt antecedentia, & conſequentia proportionum; ergo reciproca ſunt latera rectanguli, & quadrati; & vtraq; fiunt ex moto altero latere, & ex altero tamquam via perpendiculari moti alterius lateris; ergo vt in altero latus motum ad viam in altero, ſic via alterius ad latus motum alterius; ergo, per 14, ſexti, ſunt æqualia rectangulum DB, & quadratum ex EH.

§ IX.

THEOREMA XI, XII, XIII.

SCHOLION.

Ad propoſ. 11 *lib.* 2. *& ad* 35, *&* 36 *l.* 3.



EAdem ſolertià geometricà in 2 propoſ. eiuſdem libri 2 probãdum erit latus vnum quadrati AG eſſe medium proportionale inter rectanguli HD latera, & propterea reciprocari quantitates motas, & vias earum perpendiculares, ac propterea producta ex illis eſſe æqualia.

Pariter in libri tertij propoſitionibus 35. & 36. inuenienda erit reciprocatio in rectangulis rectarum ſecantium ſe in circulo, vel in quadrato tangentis, & rectangulo ſub ſecante, & ſegmento extra circulum, & inde æqualitates eliciendæ rectangulorum inter ſe vel quadrati, & rectanguli; Vide figuras earum propoſitionum.

§ X.

THEOREMA XIV.

Libri ſexti propoſitio 1.



QVoniam parallelogrammorum FC, CE quantitates producuntur ex baſium BC, CD ductu in perpendiculares vias à baſibus ad parallelam FE; igitur æqualibus exiſtentibus inter eaſdem parallelas vijs perpendicularibus, ſi qua ſit inæqualitatis proportio in parallelogrammis, non poteſt ea prodire niſi ex inæqualitate baſium, ductu ſuo perpendiculari producentium inæquales areas parallelogrammorum. Ergo æqualibus exiſtentibus altitudinibus (ideſt inter eaſdem parallelas) ſiue vijs perpendicularibus, parallelogrammata habent inter ſe proportionem baſium.

§ XI.

COROLLARIVM I.

ÆQualibus exiſtentibus baſibus parallelogrammorum, inæqualibus altitudinibus perpendicularibus, parallelogrammata ſunt inter ſe, vt altitudines. Quod ex Commandino aliter, ac modo vſitato demonſtratum appoſuimus ad 1 prop. ſexti, expedimus hìc modo geometrico à motu perpendicu-

diculari lateris vnius in parallelogrammis. Nam ſi baſes, ideſt latera perpendiculariter mota, ſunt æqualia in vtroq; parallelogrammo, nec tamen duo parallelogrammata ſunt æqualia, differentia, & proportio inæqualitatis non poteſt peti niſi ab inæqualitate viarum perpendicularium (ideſt altitudinum) in quas ductæ baſes æquales producunt tamen parallelogrammata inæqualia.

COROLLARIVM II.

QVod demonſtratum eſt de parallelogrammis patet etiam de triangulis tamquam de dimidijs parallelogrammorum. Eadem enim eſt proportio dimidiorum, quæ totorum.

COROLLARIVM III.

In quo exemplum demonſtrandi vniuerſaliter de omni quantitate. &c.

MAurolyc. in fine lib. 1. Arith. etiam in numeris: *Si aliquis numerus duos ſingulos multiplicet, producta erunt multiplicatis proportionalia.* Eadem altitudo (ſiue baſes æquales) ſit 2, & multiplicet 3, & 4; vt 3 ad 4, ſic productum 6 ad productum 8, areæ ſunt inter ſe vt baſes. &c. Valet & pro ſolidis, ſi idem numerus altitudinis multiplicet duos diuerſos numeros pro planis baſibus, erunt enim producta ſolida vt baſes; iuxta propoſitiones lib. 11, & 12 citatas in § 4, ſect. 1 Breuiarij Stereometrici. Vniuerſaliſſima ergo propoſitio ſit: *Si eadem quantitas duas ſingulas multiplicet, producta erunt multiplicatis proportionalia.* In numeris oſtenſa valet pro planis, & ſolid.s. &c.

SCHO-

SCHOLION.

Qvod in hac 1 ſexti geometricè, in lib.7 habes arithmeticè, propoſ.17,18.

§ XII.

Ex propoſ.14, & 15 lib.*6.* —

—COROLLARIVM.

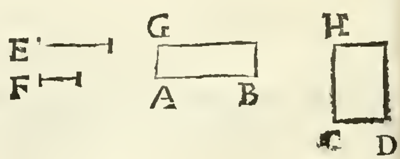
De æqualibus figuris, quarum viæ perpendiculares centri grauitatis, & motæ quantitates reciprocantur.

Nam viæ illæ perpendiculares, & motæ illæ quantitates (velut in planis figuris lineæ æquabiliter motæ) ſunt latera reciproca rectangulorum, quæ conflantur ex lineis perpendiculariter motis, ac ductis in vias perpendiculares, iuxta alibi dicta in vtroque To. hu. Ærar. de ortu figurarum ex ductu quantitatis in viam perpendicularem.&c.

§ XIII.

THEOREMA XV.

Propoſitio 16 lib.16.



Qvoniam in figura propoſ.16, rectangulum HD, contentum ſub medijs CD, & E, habet latera CD conſequens proportionis primæ, & E antecedens ſecundæ, ideo in eo, & in rectangulo GB reciprocantur latera, ideſt vt quantitas mota AB ad quantitatem motam CD, ſic via perpendicularis motùs

CH

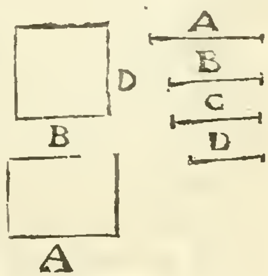
CH ad viam GA æquales. Ex quibus vijs, & motis quantitatibus quoniam producuntur rectangula GB, HD; ergo & motarum quantitatum motibus perpendicularibus reciprocatis, ideſt lateribus rectangulorum, ſunt ea æqualia, per 2.par.propoſ.14.

§ XIV.

THEOREMA XVI.

Propoſ.17.lib.6.

IN propoſitione vero 17 patet in quadrato ex media proportionali B, ſiue D eſſe anteced. & conſeq. proport. & reciprocari in illo, & in rectangulo ex AC latera, ideſt vias, & motas quantitates producentes quadratum, & rectangulum; ac propterea quadratum ex media, & rectangulum ſub extremis æqualia ſunt.



§ XV.

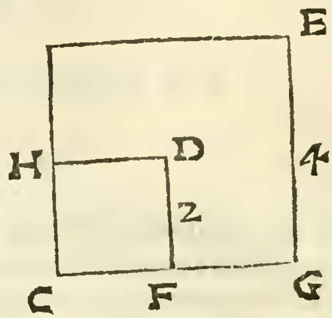
THEOREMA XVII.

Propoſitio 20. lib.6.

De duplicata proportione laterum homologorum in polygonis ſimilibus. &c.

QVoniam in polygonis, quæ non ſint vel rectangula, vel quadrata, non apparet ex qua lineà motà producatur area, & quantitas dati polygoni, nec facile videtur ex vſu geometrico centri demonſtrare duplicatam proportionem laterum homologorum, ideo auxilium peten-

dum eſt à ſolertia geometrica, quæ te docebit, mi Tyro, (vt aperta hìc omnia videas) reducere datum polygonum ad quadratum, (vel ſaltem ad rectangulum) ex vſu 14 propoſ. lib. 2 vel ex modis demonſtratis in libro ſexto. Finge igitur data duo polygona multilatera ſimilia, ſimiliterq; poſita trasſormata eſſe in quadrata CD, CE. Quæ & ipſa polygona ſunt ſimilia, ſimiliterq; poſita. &c. Dico quantitatem, ſeu proportionem areæ, ver. gra. minoris CD eſſe duplicatam laterum puta ipſorum FD, GE.



Quadrata producuntur ex ductu vnius lateris in viam perpendicularem, ſiue quantitatem eiuſdem lateris. Finge moueri CF perpendiculariter per CH, producit quadratum CD. Finge moueri CG perpendiculariter per GE, producit quadratum CE. Hic & quantitates motæ CF, CG, & viæ perpendiculares CH, GE, quæ ſunt producentes quadrata, quoniam inæquales ſunt, igitur producta ex ijs quadrata habebunt inter ſe inæqualem eam proportionem, quam habent inter ſe viæ, & mota latera, ideſt via ad viam, & motum latus ad latus, ideſt compoſitam, ſeu duplicatam ex proportionibus viarum, & motarum linearum; At eæ viæ, & ea latera in ſimil. polyg. ſunt, iuxta defin. 1. ſexti, & permut. proportionalia, vt CF ad CG, ita FD ad GE, ideſt proportio motarum quantitatum CF, CG èadem eſt, quæ viarum FD, GE, ergo proportio eſt eiuſdem generis, & ſub eodem genere duplicata ipſarum CF, CG, FD, GE; quod erat demonſtrandum breuius, ac facilius ex hoc vſu geometrico motarum quantitatum, & viarum perpendicularium à centro grauitatis, quàm apud Euclidem in prop. 20.

§ XVI.

§ XVI.

COROLLARIVM.

De ſimilium triangulorum proportione duplicata ex lateribus. Propoſ.19.lib.6.

NVllà, (præter proximè antecedentem apud nos,) eget nouà demonſtratione propoſitio de triangulis ſimilibus habentibus proportionem duplicatam laterum. Eodem enim modo, quo polygona, reducenda ſunt ad quadrata, ſeu rectangula (quod erit facile duobus eorum lateribus ad rectum conſtitutis.&c.) in quibus patebit veritas propoſitionis apud Euclidem, per proportiones ſimiles, id eſt duplicatam viarum, & motarum quantitatum producentium in quadrato aream æqualem areę triangulari.

§ XVII.

THEOREMA XVIII.

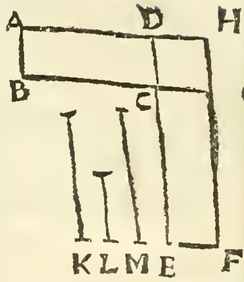
Propoſitio 23. lib.6.

De parallelogrammorum æquiangulorum proportione compoſita ex laleribus.

HIc non erit opus, vt in § 15 anteced.transformatione vllà figurarum, & èadem erit forma demonſtrationis quæ in cit. § 15 niſi quòd proportio, quæ ibi erat duplicata, ideſt geminata in eodem genere propter laterum homologorum ſimilem proportionem, hìc erit compoſita, ideſt conflata ex proportionibus diuerſi generis in lateribus circa æquales angulos parallelogrammorum etiam non ſimilium.

Igitur affirmo æquangula parallelogrammata BD, CF habere inter ſe proportionem compoſitam ex lateribus; ideſt

eam, quam habent inter ſe BC ad CG, & DC ad CE.



Quantitas parallelogrammi BD fit ex mota, finge, BC in viam perpendicularem vſq; ad parallelam AD. Quantitas ipſius CF fit ex mota, finge, CG in viam perpendicularem vſq; ad parallelam EF. Producentium igitur parallelogrammata BD, CF, id eſt motarum BC, CG, & viarum perpendicularium inter AD, BC, & inter CG, EF proportiones (quæcumq; illæ ſint, etiam diſſimiles) compoſitæ dabunt proportiones ſuorum productorum BD, CF. Quam enim habent proportionem producentia, eandem habent & producta. Si vtraq; producentia vnius producti proportionem habeant diuerſam à producentibus vtriſque alterius producti, neceſſe eſt producta conſtare ex proportionibus illis diuerſis vtrorumq; producentium.

SCHOLION.

Confirmatio prædictorum etiam apud alios.

C*Onſonant prædicta, præſertim in proximè antecedenti* § 17, *cum ijs, quæ Commandinus geometricè demonſtrat in Theor. 2. ad propoſ. 23. lib. 6; quod apud nos in* § 14 *ad eandem propoſitionem eſt Corollarium ex ijs, quæ apud Euclidem demonſtrata ſunt. Theorema igitur id eſt*: Triangula, & parallelogrammata habent inter ſe proportionem compoſitam ex proportione baſium, & proportione altitudinum. *Idem eſt ac ſi dicas, ex vſu geometrico centri grauitatis: habent proportionem compoſitam ex proportione linearum in baſibus motarum perpendiculariter, & ex proportione motuum, ſiue viarum perpendicularium in quas eleuatæ ſunt baſes. &c.*

§ XVIII.

THEOREMA XIX.

Libri 12. Propoſ.2.

De circulorum proportione, vt diametrorum quadrata.

LIcet apud Euclidem ſit in libris de ſolidis hæc propoſitio, tamen eſt de plana figura circulari, ac ſpectans ad hunc noſtrum epilogum planimetricum.

Vide demonſtrationem ex vſu geometrico centri grauitatis apud nos in 2 parte ~~huius~~ 2 Tom.§ 8 ad 20 propoſ.li.6. In antecedentibus demonſtrationibus huius Epilogi Planimetrici, vſus fuit linearum perpendiculariter motarum ad quantitates, & proportiones figurarum planarum; in hac verò indicatur pro plana circulari figura vſus centri grauitatis lineæ circulariter motæ, ac ſignantis peripheriam. &c. Quamuis poſſit etiam reduci ad vſum lineæ perpendiculariter motæ, vt dictum eſt ad finem 2 libri, quia pro peripheria motùs centri grauitatis quæritur peripheriæ ipſi æqualis recta linea. Quod & commune eſt in omnibus rotationibus centri grauitatis, quæ ad rectam reducuntur non ſolum in planis, ſed etiam in ſolidis figuris, vt in fine cit.lib.2 elem. dictum eſt.

Hic fauſtè opinor, Epilogi Planimetrici orbem claudemus merifica, & perfectiſſima figura circulari.

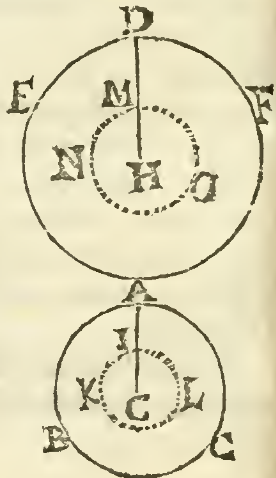
Ali-

§ XIX.

Aliter, ſcilicet ex ortu circuli, ſine vſu centri grauitatis, demonſtrare circulorum duplicatam proportionem à ſemidiametris, vel diametris.

LEMMA — Ex ortu peripheriarum demonſtratum. Peripheriæ inter ſe ſunt vt ſemidiametri, vel diametri.

QVod Pappus, ac aliquis alius vſitato antiquo more demonſtrarunt, & à nobis ſuppoſitum eſt in antecedentibus in To.1, & 2 parte To.2, licet ne hic nouo modo à nobis ex ortu ipſarum peripheriarum breuiſſimè, facillimè, ac euidenter demonſtratum apponere?



Reponatur hic fig. § 8 ad propoſ. 28 lib.6. dico peripherias EDF, ABC habere inter ſe proportionem ſemidiametrorum DH, AG. Quoniam enim peripheria oritur à puncto extremo lineæ circulariter motę, hoc eſt duo concurrunt ad peripheriarum ſignationem, ſcilicet ſemidiameter, & eius alterum extremum, circulariter mota (dum enim circulariter mouentur DH, AG, altero extremo fixo in centris H, G, alterum D, & A circulariter mota ſignant EDF, & BAC;) ergo proportio peripheriarum erit èadem, quæ eſt eorum, à quibus generantur; ideſt extremorum D, & A, & linearum circulariter motarum DH, AG. At proportio extremorum D, A, nempe indiuiſibilium, ac punctorum vel èadem, ac æqualitatis, vel nulla eſt, iuxta deducta à nobis ex definit.4 lib.5; ergo reliqua eſt proportio, vel differentia ſemidiametrorum DH, AG generantium peripherias. Habent

bent ergo peripheriæ inter ſe proportionem ſemidiametrorum. Hoc præmiſſo lemmate, ſequitur —

— THEOREMA.

CIrculi ſub peripherijs EDF, ABC generantur à ſemidiametris DH, AG motis circulariter, & extremis D, A ſignantibus orbes, ſiue peripherias EDF, BAC, ac terminantibus areas. Ergo circulares ſuperficies habent inter ſe proportionem ſuorum generantium, ſiue conflantium, ſcilicet peripheriarum, & ſemidiametrorum; at, per antecedens Lemma (vel à Pappo, vel à nobis) proportio peripheriarum eſt ſemidiametrorum; ergo habent bis proportionem ſemidiametrorum, hoc eſt duplicatam ſemidiametrorum, ſiue diametrorum.

EPI-

EPILOGI PLANIMETRICI

PARS SECVNDA

In qua recenſio primorum aliquot principiorum, & elementorum geometricorum ad diſtinctionem, & propugnationem legitimæ à fucatà Geometrica Philoſophia.

APem geometricam habes apud nos in veſtibulo Apiariorum, ſiue hortorum Mathematicæ Philoſophiæ. Hìc fucos aliquos abigendos indicabimus, ne, pro ſcientifico mellificio, à geometrico veneficio inficiaris. Propugnamus veram, & ſæculis omnibus probatam Geometricam Philoſophiam à manifeſtà iniuria contra ipſius certitudinem, ac euidentiam, quas fucatis abuſibus nituntur ſubruere, qui contra ipſius prima principia, & demonſtratas veritates pſeudogeometriam inſtituere moliuntur. In priore parte huius Epilogi Planimetrici nouà ſcientificà, ac verà formà, ex vſu geometrico centri grauitatis, præcipua aliqua planimetrica elementa ditauimus, & in ſecunda parte huius 3 To: vniuerſam Stereometriam per eundem vſum centri traducemus. Reliquum, & neceſſarium erat interea hìc in ſecunda parte Epilogi Planimetrici indicare latentem, ac doloſum ſcopulum nouæ alterius, ac fucatæ formæ geometricæ; ne incauti geometrici Tyrones naufragium ſcientificæ, ac demonſtratæ certitudinis paterentur.

§ XX.

SCHOLIA

—Ad libri primi elementorum definitiones de puncto, linea, plana ſuperficie. Punctorum genera. Rectæ lineæ definitio indiuiſibilem lineam excludit.

PRimæ definitiones ſunt de puncto, linea, ſuperficie abſtractis, & conceptis ſine ſuis ſubiectis, quibus nituntur, de puncto ſine lineà, lineà ſine ſuperficie, ſuperficie ſine corpore, ſiue ſoliditate. Tertia, & ſexta definitiones ſunt de punctis concretis in linea, cuius termini ſunt, & de lineis concretis in ſuperficie, cuius termini ſunt. &c.

Puncti, lineæ, ſuperficiei definitiones geometricæ abſtractæ, & cõcretæ.

2 *Secundæ definitiones de puncto, & linea in concretis indicant vſum, & fundamentum aſſertionis de lineæ productione à puncto, ſiue extremo lineæ motæ, & de ſuperficiei productione à linea, ſiue termino ſuperficiei motæ ſecundum ſui termini latitudinem. Qua de re nos non ſemel in antecedentibus, præſertim initio huius Epilogi planimetrici vbi etiam de productione ſolidorum à motu planorum.*

Geometrica productio lineæ, & ſuperficiei à motu puncti, & lineæ.

3 *Punctis, lineis, ſuperficiebus geometricis, ac mathematicis hic definitis adde & alia genera, quorum cognitio proderit noſtræ huic geometricæ propugnatoriæ recenſioni. Sunt igitur & puncta phyſica, quæ minimum lineæ ſunt, diuiſibilia quidem geometricè, ac abſtractè, at indiuiſibilia phyſicè propter rationes, quas phyſici aliqui ponunt dum conſtare putant quantitatem phyſicam ex indiuiſibilibus phyſicis. Quarum rationum vna ea ſit, quòd non poſſit rei forma perſtare ſine aliquo minimo quantitatis, quo per vlteriorem diuiſionem imminuto, forma rei pereat. Lineæ phyſicæ habent latitudinem, licet minimam, ſuperficies phyſicæ habent minimum craſſitiei, ac ſoliditatis.*

Puncta phyſica diuiſibilia geometricè, non phyſicè.

4 *Iuxta prædicta nos interpretati ſumus paradoxum in § 5 ad definit.1, in To.1, de puncto æquali lineæ, & in fine huius tertij Tomi de puncto æquali ſuperficiei, in Parergo geometrico, § 29, Schol.1. Vbi habes etiam è corollarijs noſtris ſtereometricis demonſtrationem de Scaphio, quod æquale eſt cono.&c. quam apud alios ſuppoſueramus in cit. § 5. ad 1. def.lib.1.*

5 *Aliqui dum de rarefactione diſputant, in ſcenam phyſicam induxere puncta quædam, quæ vocant* inflata. *Hic, opinor, caneret Horatius:*

In art. poet.

Spectatum admiſſi riſum teneatis amici?

Lege aliquà medicà ſanciendum cenſeo quatenus inflari poſſint, ne, dum indefinite inflantur, aliquando diſrumpantur. Inflatas etiam lineas addunt. Sed in quantitate geometricà, ideſt abſtractè conceptà, & immuni à phyſicis paſſionibus, non eſt locus eiuſmodi tumoribus. Eiuſdem enim denſitatis intelligitur, & inalterabilis geometrica quantitas concipitur ab animo philoſophicè abſtrhaente, ac abſtracto.

Puncta, & lineæ inflata nulla in Geometria.

6 *Definitionis 4 verba:* Recta linea eſt, quæ ex æquali ſua interijcitur puncta, *oſtendit implicantiam rectæ lineæ indiuiſibilis, iuxta veritatem, & ſententiam acutam Ariſtotelis in lib.de lin.inſecab.* Nam (*inquit ille*) neq; lineæ, neque rectæ lineæ definitio cum inſecabili linea conſentit, vt quæ nec inter duo puncta extenſa ſit, nec medium vllum habeat. *Ideſt, ſi eſt quæpiam linea indiuiſibilis, ſiue, ſi linea conſtat ex indiuiſibilibus lineolis, indiuiſibiles illæ, ſi ſunt lineæ, ſunt inter ſua extrema, habent extrema, inter quæ ſunt illæ mediæ, ergo in medio, inter duorum extremorum punctorum terminos, diuidi poterunt; ergo non ſunt indiuiſibiles.&c.*

In definitione rectæ lineæ implicantia indiuiſibilitatis.

Fuci

§ XXI.

Fuci ageometrici circa antecedentia principia geometricæ philoſophiæ.

REctè tu quidem (inquit Pſeudogeòmetra quiſpiam Tyro) fundamenta præcipua ieciſti, ac indicaſti Geometriæ, ac Stereometriæ in antecedentibus hìc, & alibi, dum linearum, & figurarum ortu detecto ex motu puncti, lineæ, plani, earum proportiones, dimenſ. & plura alia præclara facillimè demõſtraſti, ac demonſtraturum te ſpero in tua ſtereometria ſcilicet in parte ſecunda huius tertij Tomi. At ego nunc præclarius tibi prodam inuentum, quo èadem nouo alio modo conſequaris. Scilicet ex vſu eius opinationis phyſicæ, quæ arbitratur quantitatem ex indiuiſibilibus conſtare; quidquid in antecedentibus attuleris ex Ar. ad 4. definitionem. Linea igitur, ſuperficies, ſolidum non tam producuntur, vt tu affirmas, quàm conſtant ex indiuiſibilibus, punctis, lineis, ſuperficiebus. Itaq; (in animum altè reconde præclaram hanc doctrinam, atq; in vſus geometricos, & Mathematicos alios traducito) vniuerſaliſſimà regulà immenſum tibi campum geometricum aperio, atq; affirmo: lineæ habent inter ſe proportionem ſuorum omnium punctorum collectiuè, & diſtributiuè ſumptorum. *Similia intellige de proportionibus inter ſe planarum figurarum ex earum lineis, & de proportione ſolidorum è ſuperficiebus. Vt enim tu rectè affirmaſti, genita geometrica habent inter ſe proportionem ſuorum genitorum; Sic & ego pariter affirmo compoſita, ſiue aggregata geometrica, velut punctorum in lineis, habent inter ſe proportionem ſuorum omnium indiuiſibilium ipſa aggregata conſtituentium. Sed, ò pſeudogeometra, qui hæc ingeris, tibi negotium erit cum cit. Ar. ad definit. 4 in anteced. & cum cætaris, quæ in ſeqq. § § leges, & cum pluribus apud plures alios.*

Axiomata fucatæ Geometriæ.

§ XXII.

Labefactatio, & damna, quæ in vniuerſam geometricam veram philoſophiam à fucatà, ſiue pſeudogeometrià inferuntur.

Differũt quantitas producta, vel conflata ex indiuiſibilibus. Quomodo indiuiſibile in motu poſſit producere diuiſibile.

ALiud eſt, ò pſeudogeometrice Tyro, affirmare produci lineam (paria intellige de ſuperficie, ſolido.&c.) à motu puncti in linea ſecundum ſui extremum ſe mouente, aliud verò eſt aſſerere lineam geometricam è punctis geometricis conſtare. Primum ego affirmo cum antiquis ritè geometricè philoſophantibus, dum concipitur indiuiſibile punctum in motu ſemper eſſe (vt & cætera mota) in loco maiori ſe, ac diuiſibili, ac proinde à puncto quantitatem diuiſibilem lineę in longum produci. Paria intellige de motu lineæ, ſuperficiei.&c. Secundum verò de quantitate conſtante ex indiuiſibilibus, itaut punctum geometricum, hoc eſt indiuiſibile ſine motu occupet ſpatium quantum, & cum alijs indiuiſibilibus componat diuiſibile, ac quantum, id ego pernego propter myriadas rationum, ac demonſtrationum phyſicarum, ac in primis geometricarum, partim apud cit. Ariſt. de lin. inſec. partim apud alios neotericos (quorum hac de re integra extant volumina) & hìc partim inferius apud nos. Itaq; opinatio de quantitate conſtante ex indiuiſibilibus geometricis, non ſolum ſpeculatiuè aſſerta, ſed multo magis in abuſum geometricum traducta —

Volumina rationum, & demõſtrationũ contra indiuiſibilia.

Indiuiſibilia contra dignitatem certitudinis geometriæ.

— 1 Deſtruit dignitatem, & certitudinem illius philoſophiæ, quæ, iure ſemper demonſtratæ, ac euidentis veritatis, principem ſibi locum certitudinis inter humanas ſcientias vindicauit, dum à fucata geometria vocatur in diſputationem, & in incertitudinem, quam produnt contrariæ ſententiæ hinc affirmantium, illinc negantium quantitatem ex indiuiſibilibus conſtare. In qua tamen opinionum contradictione illud certiſſimum eſt neutram quidquam officere geometricæ abſtractæ veritati, ac firmitati, in qua (quidquid diſſen-

diſſentiant phyſici in quantitate phyſicà) per ſe notum, ac primum principium eſt, conceptum quantitatis quantumuis minimæ inuoluere extenſionem, & conſequenter diuiſibilitatem ſemper in infinitum; licet in phyſicæ materiæ incommodis nequeat fortè continuari. Cuius abſtractæ veritatis geometricas plures habes apud nos demonſtrationes in tribus huius Aerarij Tomis pro varià oblatà occaſione corollariorum, aut theorematum.

Contrariæ ſententiæ circa indiuiſibilia non officiunt geometricæ veritati contra indiuiſibilia.

Si tamen etiam extra inexpugnabile propugnaculum abſtractionis geometricæ pugnandum eſſet phyſicè pro vera geometria, ſtant pro ea (vt in anteced. indicaui) omnes rationes etiam phyſicæ negantium quantitatem conſtare ex indiuiſibilibus; Stant (quod caput eſt) volumina integra demonſtrationum geometricarum etiam apud neotericos. Sed præ alijs ducit inexpugnabile agmen aureus libellus Ariſtotelis de lineis inſecabilibus. Cuius demonſtrationes tot ſæculis nunquam ab aduerſarijs ſolutæ, nec in poſterum, propter euidentiam veritatis (modo intelligantur ab ageometris) vnquam ſoluendæ, tuenrur, ac firmant fundamenta, & ſtructuras omnes veræ geometricæ philoſophiæ; cui fucata ageometria iniuriam nititur irrogare diſceptatoriæ incertitudinis.

Demonſtrationes geometricæ contra indiuiſibilia inſolubiles.

2 Deſtruit vniuerſam, & admirandam Geometricæ Philoſophiæ partem de proportionibus irrationalibus, quæ verſatur circa quantitates incommenſurabiles. Ac (vt exemplum indicem in lineis) nullæ erunt lineæ incommenſurabiles, quarum tamen plurimas demonſtrant elementa geometrica in lib. 10. Nam iuxta veritatem, & ſententiam Ariſtot. il lib. de lin. intecab. *omnes lineæ commenſurabiles erunt, & omnes ab indiuiduis lineis dimetientur. Indiuiduæ autem lineæ ſibi ipſis commenſurabiles ſunt, cum inter ſe ſint æquales.* &c. ideſt (iuxta ea, quæ habes apud nos in § 1 ad axioma 10 in 1. To. hu. Aerarij, & in Schol. veteri græco apud Commandinum in initio lib. 10 elem.) *oportet menſuras minores eſſe ijs, quæ menſurantur.* &c. *neceſſe eſt omnium minimam eſſe menſuram: quare & magnitudinum, ſi omnes menſura communi menſurantur, neceſſe eſt minimam eſſe.* Cum igitur

Indiuiſibilia contra incommenſurabiles quãtitates.

tur

tur in omni genere, quæ ſunt extrema, & minima ſint inter ſe æqualia, velut indiuiſibilia, ſeu puncta in lineis, &, iuxta fucatam geometriam, linea conſtet ex punctis indiuiſibilibus, poterit indiuiſibilis quæcunque, ac minima linea, tanquam certa, & communis menſura, metiri quaslibet lineas, velut in quadrato diametrum, & latus; quæ tamen in extrema prop. lib. 10. demonſtrantur eſſe lineæ incommenſurabiles. Itaq; iuxta fucatam regulam in antec. § 21, quoniam lineæ habent proportionem omnium ſuorum indiuiſibilium, & ex hic antedictis, indiuiſibilia habent proportionem commenſurabilem, ſiue rationalem; ergo & lineæ omnes habent inter ſe proportionem rationalem.

Per indiuiſibilia omnes quãtitates ſunt commenſurabiles.

Si reſpondeas comparari à te aggregatum indiuiſibilium omnium vnius lineæ cum aggregato indiuiſibilium omnium alterius lineæ, atq; ideo, licet indiuiſibilia ſingula inter ſe habeant proportionem rationalem, tamen aggregata vnius lineę habere proportionem irrationalem cum aggregatis alterius lineæ; contra te facis ipſe dum doces, vt ſciatur proportio linearis aggregati, inueſtigandam eſſe proportionem ipſorum indiuiſibilium punctorum, licet non omnium, ſaltem aliquorum, & ex ijs concludendum de cæteris, ac de toto lineæ aggregato. Comparas igitur re ipſâ non aggregata, ſed diſgregata, & ſeorſim inter ſe indiuiſibilia puncta. Quæ dum habent proportionem inter ſe rationalem, iuxta hic prædicta; ergo & aggregata habebunt proportionem rationalem. Vide & num. 3 ſequentem. Ac puncta diſtributiuè commenſurabilia non poſſunt eſſe vel collectiue, vel potentiâ (ideſt quadratis, quæ nulla ſunt ex punctis) incommenſurabilia.

Effugium inane in comparatione omnium indiuiſibilium in quantitatibus.

Quoniam autem iuxta ea, quæ habeſ. in § 17 ad prop. 20. lib. 6. in to. 2. hu. Acrarij, & iuxta ea, quæ leges inferius in fine paralipomeni, quod eſt in calce huius Tertij Tomi, non ſolum aliquæ lineæ ſunt incommenſurabiles, ſed & ſuperficies, & ſolida; ſi ergo eas ſuperficies, & ea ſolida (velut & lineas) fingas conſtare ex indiuiſibilibus, quoniam ſunt commenſurabilia, erunt, propter hic prædicta, omnes ſuperficies, omnia ſolida commenſurabilia, nec vlla erit irrationalis Geometria, & Stereometria. De-

3 Deſtruit omnes commenſurabilitates potentià incommenſurabilium longitudine. Verb.gr. quoniam in quolibet quadrato, ex lib. 1. propoſ.47, potentia, ideſt diametri quadratum eſt duplum potentiæ, ſiue quadrati lateris; ergo, licet diameter ſit incommenſurabilis coſtæ quadrati, tamen earum linearum incommenſurabilium potentiæ, ideſt quadrata, habent proportionem commenſurabilem 1 ad 2. At ſi proportionem eorum quadratorum ſpectes ex indiuiſibilibus, ideſt ex lineis quaſi ipſa quadrata conflantibus, quoniam ſingulæ lineæ quadrati ex diametro ſunt æquales, & prima, ideſt ipſa diameter, eſt incommenſurabilis primæ, ideſt coſtæ quadrati ex coſtà, & ſecunda ſecundæ, & ſic reliquæ omnes vnius quadrati lineæ ſunt reliquis omnibus alterius quadrati lineis incommenſurabiles, ergo & quadrata erunt incommenſurabilia, contra propoſ.47 lib. 1.

Indiuiſibilia contra quantitates potentia cõmenſurabiles.

Ac multo magis vrget argumentum ſi affirmes (quoniam omnes lineæ, quæ infinitæ numero ſunt in vtroq; quadrato, numerari, & comparari non poſſunt) ſatis eſſe comparari aliquas alterius cum totidem alterius quadrati lineis, & ſic de reliquis lineis, & totis quadratis concludi. Ex antecedentibus enim incommenſurabilibus non poteſt de reliquis concludi niſi incommenſurabilitas; in vtroq; enim quadrato ſingulæ ſunt æquales incommenſurabilibus, ideſt diametro in altero quadrato, & coſtæ in altero.

At dices in vtroq; quadrato duas extremas complere quadrata, & commenſurabilia ea facere. Reſpondeo extremas haberi non poſſe. Cum enim ſint in vtroq; quadrato infinitæ numero lineæ, extrema in neutro haberi poteſt. Et ſi concludas de reliquis, ac de extremis iuxta proportiones antecedentium aliquarum, quoniam antecedentes ſunt incommenſurabiles ſingulæ vnius ſingulis alterius quadrati, redit argumentum antepoſitum, & concluſio, ergo & reliquæ, ac poſtremæ (quæ tamen non poſſunt haberi, vt prædictum eſt) ſunt incommenſurabiles, & incommenſurabilia ex ijs quadrata.

Ac quod dictum eſt in exemplo diametri, & coſtæ intellige

lige de alijs etiam quæcunq; ſint lineæ incommēſurabiles longitudine, ſeu potentià, ideſt quadratis, commenſurabiles. Quarum commenſurabilitas potentià deſtruitur, iuxta prædicta, ſi quadratorum proportio ſpectetur ex linearum proportione.

Quãtitates etiam citra, vel vltra potentiã cõmenſurabiles.

At verò nos in Octauo Aerarij huiuſce Tomo ſuo tempore prodemus etiam de incommenſurabilibus aliqua præter vulgata, quemadmodum adhuc fecimus in tribus hiſce Tomis Aerarij, & in vtroq; Tomo Apiariorum circa quantitates commenſurabiles. Verbi gratià: *ſuper datis rectis lineis incommenſurabilibus erigere, per* 18 *libri* 6, *polygona ſimilia.&c. commenſurabilia*: atque indicabimus linearum incommenſurabilium aliquarum non ſolum potentias commenſurabiles, ideſt quadrata, vt docet tertia definitio lib. 10, ſed etiam, vltra eam definitionem, pandemus campum figurarum pluriformium commenſurabilium ſuper incommenſurabilibus lineis, quas vocabimus ſimilitudine commenſurabiles, ſiue citra, & vltra potentiam commenſurabiles. Exempli causà, ſuper quadrati diametro, & coſtà erigi poſſunt non ſolum quadrata, ſed polygona quęcumq; numero, & ſpecie, ſeu formis infinita ſimilia.&c. quæ vi propoſitionis 35 libri 6, erunt inter ſe commenſurabilia; èaq; minora, vel æqualia, vel maiora quadratis ex diametro, & coſtis, ac ideo voco citra potentiam, & vltra potentiam commenſurabiles lineas, ideſt eas, ſuper quibus maiora, vel minora quadratis conſtituuntur. Infinitam iſtam multitudinem polygonorum ſimilium commenſurabilium ſuper incommenſurabilibus diametro, & coſtà funditus euertunt indiuiſibilia, ſeu lineæ ea polygona, iuxta fictionem aliquorum, componentes. E' quorum collectiuà, vel diſtributiuà proportione ſi polygonorum illorum proportiones ſunt ſumendæ, aut nunquam ſciri, ac finiri poterunt, aut fallaciter cognoſcentur, iuxta nuper prædicta de quadratis.

4. Deſtruit non ſolum irrationalem, ſed etiam labefactat ſolidum, ac primarium firmamentum, rationalis, ac omnis omnino proportionis inter lineas, ſuperficies, & ſolida, & eorum om-

omnium quæcunq; in libris Elementaribus, in Archimede, Pappo, Apollonio, atq; apud quoſcunq; alios verè geometricos philoſophos demonſtrata ſunt circa quaslibet figurarum, & linearum proportiones. Nam rectà impetit, & deficientiæ arguit definitionem 4 lib. 5 elem. quæ regula eſt cognoſdendi quænam in Geometrica philoſophia quantitates, ſeu magnitudines habeant inter ſe proportionem, ſcilicet *quæ multiplicatæ poſſunt ſe mutuo ſuparare*. Dum enim altera, exempli cauſa minor, aucta æquat, ac etiam alteram ſuperare poteſt, patet inter illas duas quantitates poſſe eſſe proportionem æqualitatis, vel inęqualitatis, & alterutram, ſeu potius vtranq; neceſſario debere eſſe finitam. Relege apud nos adnotata ad primas illas definitiones libri 5, & hìc inferius in § 29.

Indiuiſibilia contra fundamentum proportionũ omnium geometricarum.

At verò venari, & ſtatuere proportionem linearum ex proportione omnium punctorum in lineis, ſicuti ſuperficierum ex omnibus lineis, & ſolidorum ex omnibus ſuperficiebus, eſt quaſi traducere proportiones ad ea, quæ ſunt numero infinita; & re ipſa eſt inficere, &, quaſi deficiens, ex anguſtijs finiti producere ad infinitorum prportiones primum illius 4 definit. principium. Quis verò neſciat ex ea definit. vulgatum illud conſectarium: *finiti, & infiniti ad infinitum non eſt proportio?* Quoniam igitur in linea, ſuperficie, ſolido indiuiſibilia ſunt infinita puncta, lineæ, ſuperficies, ideo iuxta 4 defin. lib. 5, non poteſt eſſe, vel agnoſci per indiuiſibilia, præſertim omnia, proportio linearum, ſuperficierum, ſolidorum.

An iterabis id effugium: comparare te inter ſe aggregatum vnum indiuiſibilium cum aggregato altero, eaq; aggregata cum ſint finita, in ſpatio finito, terminata. &c. non eſſe extra legem 4 definitionis? Inſtabo & ego: rectè tu quidem, mi homo; ſed vt oſtendas proportionem inter ſe duorum aggregatorum reſilis à finito aggregati in infinitum numerum indiuiſibilium in aggregatis, & vteris omnium indiuiſibilium proportionibus in vtroq; aggregato, vt ex ijs agnoſcas, & concludas aggregatorum proportiones. Itaq; verbo ag-

Effugium inane ad comparationẽ omnium indiuiſibilium. &c.

gregati finiti te ipſe contines intrà legitimos geometriæ limites à definit.4 ſancitos, at verò re ipſa extra vagaris in infinitorum numero indiuiſibilium omnium ſeriem nunquam exhauriendam.

Comparatio quantitatū nō poteſt fieri per partes proportionales. &c.

Hìc dicta intellige etiam contra comparationem linearum, vel figurarum per partes proportionales, aut poſſibiles, quæ & ipſæ infinitæ ſunt in infinita diuiſibilitate abſtractæ geometricæ quantitatis, vt ſæpe dictum, & demonſtratum habes in toto hoc noſtro Aerario.

Effugium inane ad comparationē aliquorū indiuiſibilium in quantitatibus.

An rurſus affirmabis te non ire per infinita, nec eſſe neceſſe conferre inter ſe omnia indiuiſibilia, veluti omnia puncta vnius lineæ cum omnibus alterius, ſed ſatis eſſe aliqua comparare, & concludere dereliquis omnibus, quoniam èadem ratio eſt omnium? Ego vero affirmo neceſſe eſſe ſingula, & omnia cum ſingulis, & omnibus indiuiſibilia indiuiſibilibus comparare. Nam ignotus, ac incertus eſt numerus reſiduorum indiuiſibilium, veluti punctorum in vtraq; linea, atq; ideo neſciri poteſt an reſidua ſint in eàdem proportione antecedentium. Idem enim reſiduum, quemadmodum & tota linea, modò pluribus, modò paucioribus punctis refertum eſſe, æquari, & comparari poteſt, cuius rei apertum exemplum habes inferius in § 25.

Exempla paralogiſticæ illationis per indiuiſibilia.

Exemplum in lineis.

Hìc interea exemplum apponam de linea quadratrice. Si quis .n. comparet lineam circularem vnius quadrantis cum linea quadratrice (erit autem inter omnes lineas proportio, & comparabilitas per indiuiſibilia propter rationes de incommenſurabilitate, in num.2 præced.) & progrediatur vel per puncta, vel per ſimilium ſegmentorum proportionem, & poſt ſimilia aliqua ſegmenta, interat: *ſic de reliquis*; ideſt ſunt in eadem proportione puncta reliqua ad finem lineæ quadrantis extremæ cum punctis reliquis lineæ quadratricis, in manifeſtum incidit paralogiſmum contra 4 definit. lib. 5, & ponit proportionem finiti cum infinito; quia lineæ quadratricis extremum dari non poteſt; eſt enim aſymptotos ad ſemidiametrum quadrantis, vt habes apud nos in Analectis ad 4 editionem noſtrorum Apiar. Analecto 9, num. 1. Infinitè ſemper ma-

magis quadratrix accedit ad ſemidiametrum quadrantis per additionem infinitorum punctorum, neq; tamen attingere poteſt, atq; ideo eius extremum neſciri, nec dari poteſt, nec valet illatio de eius extremo reliquo cum reliquo extremo lineæ quadrantis, licet antecedentia ſegmenta in vtraq; linea quadrantis, & quadratricis in eadem ponantur proportione.

Exēplum in ſuperficiebus.

Quod ad lineas in planis attinet, recole exempla paullo ante allata in n.3 hu.§ 22, vbi euidēter apparet quam periculoſus ſit ſaltus: *ergo & ſic de reliquis.* Ingerit enim affirmantem in foueam fallacis ageometriæ, & ex lineis in citato exemplo incommenſurabilibus antecedentibus concludit de reliquis, & de totis quadratis, vel polygonis ſimilibus incommenſurabilitatem, contra propoſ.47 lib.1, & 31 lib.6.

Exēplum in ſolidis.

Quod ad ſuperficies attinet (ſic habes exempla à nobis in omni genere indiuiſibilium, punctorum, linearum, ſuperficierum.&c.) recole id abſurdum, contra quod habes § 6, qui eſt ad definitionem 4,lib.5, ſub initio hu.tertij Tomi Aerarij; ſcilicet per falſam illationem de reliquis in eadem cum antecedentibus proportione falsò oſtendi reſiduum finitum terminatæ figuræ æquale ſpatio infinito, & figuræ ſolidæ inter aſymptotos imaginariæ, hoc eſt figuræ infinitæ, hoc eſt figuræ non figuræ. Relege ibi. Quare cùm neceſſe ſit, ad cognitionem non fallacem proportionis inter omnia indiuiſibilia, omnia comparare, èaq; ſint numero infinita, nunquam poterit perfici cognitio proportionis eorum, & linearum, & ſuperficierum, & figurarum ex ipſis conſtantium.

Indiuiſibilia contra præcipua theoremata Geometriæ.

5 Deſtruit præcipua alia principia, & admiranda theoremata, problemata, corollaria de planis, & ſolidis in vera, & ſolida Geometrica Philoſophia, vt inferius exemplis aliquot prodam in reliquis recenſionibus ad aliqua elementa planimetrica, & ſtereometrica. Quæ tamen, cùm demonſtratiua firmitate nitantur omnibus retrò ſæculis inconcuſsà, ita ſe tuentur, vt intentatam deſtructionem meritò in ipſammet antigeometriam reuoluant, Ad inferius ponenda exempla te prouoco.

6 Deſtruit, deterit, decipit ingenia ſtudioſorum, & ea

Indiuiſibilia conſtruunt inanes moles ſine firmis fundamētis. auertit ab antiquâ inconcuſsè demõſtratiuâ Geometricâ philoſophiâ, & inducit in geometricâ demonſtratione fruſtratos voluminum labores, & ad inanes adigit ſubſtructiones dolosè fundatas in indiuiſibilium infidis arenis; nec audit apud Bòetium monentem philoſophiam.

Lib. 2. Metr. 4.

Quiſquis volet perennem
Cautus ponere ſedem,
Bibulas vitet arenas,
Quæ pendulum ſolutæ
Pondus ferre recuſant:

Scilicet in quantitate indiuiſibilia traducta in abuſum Geometricæ philoſophiæ, ſiue in aliam quamlibet mathematicarum ſcientiarum partem, pondus ſolidarum demonſtrationum à veteri vera Geometrica philoſophia impoſitarum non ferunt, & miſerè còncidunt. Nutantibus enim incertà opinione fundamentis, atq; etiam à robore veritatis geometricæ, cui manifeſtè opponuntur, deſtitutis, neceſſe eſt quæcumq; ſuperſtruuntur, atq; ab illis, quaſi corollaria, vel abſtractè, vel in vſus quoslibet traducuntur, inania, & falſa de inanibus, & falſis prodire; vt vero veritatem induant, deſtractis fucatis inuolucris, traducenda eſſe per principia, & elementa vſitatæ, antiquæ, demonſtratiuæ geometricæ philoſophiæ, quam nos hic libenter, ac, vt ſpero, non inaniter tuemur. Deniq;, ac rurſus, affirmo, propter antedicta in hoc toto § 22, & per inferius dicenda, quæcunq; tandem ſit ars, & facultas, cuius exemplo fucatæ Geometriæ ſectatores ſe tutentur (præſertim ſi quid Arabicæ leuitatis, ac ſemipriſcę inuentionis ſuboleat) quæ in ſuis theorijs, ac operationibus vtatur modo ſimili eius, qui eſt in abuſu indiuiſibilium, & verſetur circa ignota, & comparet inter ſe quæ numero ſunt infinita, pari ratione tanquam auerſam, & aduerſam demonſtratoriæ veræ Geometricæ Philoſophiæ procul, ac prorſus abijciendam.

Deducta ex abuſu indiuiſibilium falſa de falſis.

Indiuiſibiliũ manca geometria. 7 Deſtruit, ſeu mutilat non ſolùm veram pſeudogeometria indiuiſibilium, ſed etiam ſe ipſam mutilatam prodit, imperfectam, & non ſolùm indigam firmamentis demonſtra-

ſtratæ veritatis, ſed etiam deficientem in præcipuà, & admirandà parte Geometricæ Philoſophiæ, hoc eſt in cognitione, & proportionibus, & dimenſionibus, & alijs geometricis affectionibus circa ſuperficies curuas, ad quas indiuiſibilium ope inope pertingere non valet. Curua planis comparare, æquare, commutare, &c. magis mirum, ac iucundum eſt, quàm curuilineis terminata plana rectilineis planis æqualia oſtendere, velut circulum quadrare. Cuius ſolertiæ quadratoriȩ curuarum ſuperficierum breue ſpecimen inferius in § 29 apud nos per modum corollarij habebis, vt opes legitimæ, & inopiam fucatæ Geometriæ paucis indicatas diſpicias. Præter plura alia circa id argumentum in ſect. 1, & 2 ſtereometrici noſtri Breuiarij, in 2 parte hu.3 Tomi.

Hanc verò partem Geometricæ philoſophiæ de curuis ſuperficiebus excolere (quod fieri nequit per indiuiſibilia, & quod facillimè fit à centro grauitatis in infinitis numero, & ſpecie mixtis lineis gyratis, & curuas pluriformes ſuperficies producentibus) cuius in Geometricis Elementis nulla, & extra elementa vix aliqua extant veſtigia, id verè eſt Geometricam Philoſophiam promouere, præſertim propter præclariſſima corollaria inde deducta, qualia habes inferius apud nos in priore parte ſectionis 2 cit. Breuiar. Stereom.

Promota in infinitam Geometria ex vſu geometrico centri grauitatis.

§ XXIII.

Contra definitionem 15 de circulo fucus ageometricus.

1 *ANtiqua tua iſta geometrica elementa, quæ profiteris, ac tantoperè tueris, manifeſtè vtuntur indiuiſibilibus. Dum enim definitur circulus ad cuius peripheriam* omnes lineæ à centro ſunt æquales, *manifeſtè ſupponunt, & vſurpant ad circuli cognitionem indiuiſibilia omnia, ideſt lineas omnes, in quas minimas ſecabilis eſt circularis ſuperficies.*

2 *Paria etiam habes in lib. 11. elem. defin. 3. dum definit. lineam*

lineam rectam ad planum eſſe perpendiculariter erectam, quæ ad rectas omnes lineas ſubiecti plani rectos angulos efficit.

3 *Ac quod præcipuum eſt pro vſu indiuiſibilium, in eiuſdem lib. 11 prop. 4, oſtendit, & demonſtrat lineam rectam, quæ cum duabus rectis in plano ſe mutuò ſecantibus angulos rectos efficit, efficere etiam cum omnibus eiuſdem plani lineis; demonſtrat, inquam, id modo illo noſtro per comparationem cum duabus, aut aliquot alijs lineis in plano, & de reliquis omnibus plani lineis concludit.*

§ XXIV.

Propugnatio definitionis de circulo, & ſimilium, &c. in geometricà philoſophià contra fucos ageometricos.

1 *QVod ad circuli definitionem, reſpondeo primo intelligendam eam eſſe eodem modo, quo nos intelligendi ſumus ſi quando de cylindro, cono, ac de aliquibus alijs figuris pronuntiauimus, eas conſtare ex circulis, vel triangulis, vel rectangulis, ſcilicet cum additione verbi à nobis ſemper vſurpati:* quaſi: quodammodo: exempli gratia, &c. *Itaq; definitio illa eſt ex ſuppoſitione, ac pro exemplo: ſi fingas (quaſi dicat) aream circularem conflatam ex infinitis quodammodo lineis, ea eſt, quæ eas omnes lineas æquales habet in orbem à puncto medio, &c. Reſp. 2. caſtigatæ magis Geometriæ definitionem de circulo alteram illam eſſe, quam habes apud nos in 1 To. ad 15 def. quæque ortum circuli prodit, ſcilicet eſſe figuram, quam producit recta linea, altero extremo manente, in orbem acta. Confirmantur prædicta, quòd Euclides dum demonſtrat proportionem inter ſe circulorum, non eam prodit ex indiuiſibilibus, ſeu lineis, ſed ex proportione, quam habent quadrata diametrorum, lib. 12. prop 2.*

Exempli, non veritatis, gratia vſus aliquis indiuiſibiliũ ſimulatus.

Caſtigata circuli definitio.

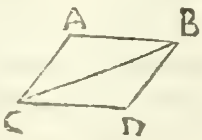
2 *Prædictam de circuli definitione noſtram interpretationem applicare licet definitioni 3 libri 11 elem eamq; confirmat Euclides ipſe in propoſ. 4 eiuſdem 11 libri, dum pro omnibus*

bus plani lineis apertè affirmat, traducto plano *per duas lineas eſſe rectam quampiam perpendiculariter erectam*. *Vide in rem hanc apud nos infertus in* § 32 *Schol.* 3 *ſub finem huius noſtri Epilogi Planimetrici*, *vbi eam prop. reponimus*.

Quapropter non eſt quòd puritatem geometricæ antiquæ Philoſophiæ inficere tentes nouitio iſtoc tuo indiuiſibilium abuſu, in quem nuſquam illa incidit, ne ſibi ipſa repugnet.

§ XXV.

Axiomatis 9, totum eſt maius ſua parte, *veritas arguit fucum pſeudogeometriæ.*



REpone hìc figuram propoſ. 33 lib. 1. Elem. & ſuppone diametrum C B eſſe maiorem (vt vere eſt in figura) quolibet ſeorſim ſumpto latere, velut ipſo A C, ita vt AC ſit pars ipſius C B; ſi linearum quantitatem, & proportionem venaris ex indiuiſibilibus, ſeu punctis, quoniam ab omnibus punctis totius C B duci poſſunt rectæ parallelæ ipſi A B ad ipſam AC, ergo totidem erunt puncta in A C, quot in BC, ergo ęquales erunt BC, CA, totum, & pars. Quid reſpondes? non concludere noſtrum argumentum, quia accipiuntur puncta linearum non in eodem ſitu collocatarum? quia ſcilicet altera obliquius, quàm altera, iacet. Quod ſi vtraque in eodem ſitu collocentur, apparebit altera maior minore, & in maiore plura eſſe puncta, quàm in minore. Ita ne? Igitur èadem linea modo maior, modo æqualis eſt ſuę parti, ſcilicet pro varietate collocationis cum altera; & axioma vniuerſale erit intelligendum in lineis cum præclara iſta exceptione, & acciſione. *Per indiuiſibilia totum nō eſt maius ſua parte.*

Atq; hic affirmabis, opinor, inflationem illam punctorum, vt èadem linea quaſi ſuillum inteſtinum modò infletur, ac diſtendatur, modò detumeat, & contrahatur. Relege in § 20, num. 5 quę indicauimus de inani, ac nulla iſta inflatione in geometrica vniformi abſtracta quantitate linearum, ſuper- *Effugium inane ad puncta, & lineas inflata.*

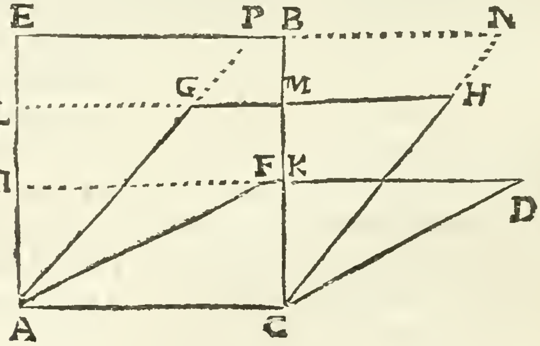
perficierum, &c. Huc alia aliqua ſpectantia vide inferius in § 26 ſeq. numer. 3, ad propoſ. 35.

7

§ XXVI.

Pſeudogeometrię fuci contra propoſ. 35, & 36 lib. 1 Elem. de planis; & contra alias propoſit. de ſolidis in libris 11, & 12 elem.

1 *PRopoſitiones 35, & 36 lib. 1. elem. in quibus oſtenduntur æqualia parallelogrammata tam rectangula, quàm obliqua etiam in infinitum, ſuper èadem, vel ſuper æqualibus baſibus in iiſdem parallelis, an non falſa ſunt, quandoquidem (inquit nouitiæ pſeudogeometriæ ſectator quiſpiam) inconcuſſa eſt doctrina de planarum figurarum quantitate conſtante, & ſpectanda; & comparanda pro numero linearum? Duorum enim parallelogrammorum habentium communem,*



vel æquales baſes profecto alterum erit maius, quod è pluribus conſtat lineis. Velut, comparatis inter ſe parallelogrammis E C, P C quoniam latera obliqua A P, C N longiora ſunt perpendicularibus E A, C B, è pluribus etiam conſtant punctis, ac proinde per plura puncta laterum P A, C N plures commu-

ni

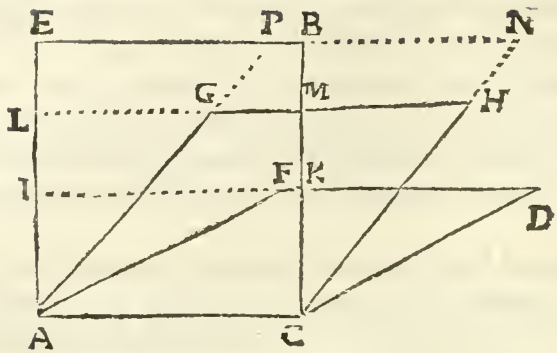
ni baſi A C parallelæ duci poſſunt, quàm per pauciora puncta laterum E A, B C; atq; ideo parallelogrammum obliquum P C, quod è pluribus conſtat lineis, maius eſt parallelogrammo E C, quod conſtat è paucioribus lineis. Ergo ruit hæc 35 propoſitio, & ſequens 36, quas tamen Euclidei reponunt inter admirandas. Scilicet præclara doctrina de indiuiſibilibus, traducta in vſum geometricæ philoſophiæ, oſtendit fallacias elementares antiquæ, & iam per veritatem indiuiſibilium antiquatæ Geometriæ.

Similes intellige noſtras oppoſitiones contra lib. 11 propoſ. 29, 30, 31 de parallelipipedis, & lib. 12 prop. 11, & corollar. de conis, cylindris, & è 7 de priſmatibus æqualibus ſuper æqualibus baſibus planis inter parallela plana, &c. Obliqua enim ſolida conſtant è pluribus planis ſuperficiebus, quàm minus obliqua, ideoq; inæqualia inter ſe ſunt. Quidquid veteres elementarij ſcriptores, vel tu ipſe inferius aliter demonſtraturum te exiſtimes ex vſu geometrico centri grauitatis in ſect. 1, § 2 Breuiarij tui Stereometrici.

§ XXVII.

Propugnatio prædictarum admirandarum elementarium propoſitionum de planis, & ſolidis.

1 FVcus fucum ſibi à me fieri conqueritur, qui ſpecioſam illam eius vniuerſalem regulam de indiuiſibilibus vel non intelligam, vel diſſimilem. Intelligenda enim eſt, (inquit) proportio planarum figurarum ex lineis, ſolidarum è planis omnibus, ſi accipiantur lineæ, vel plana ſecundùm eundem ſitum ducta. V.g. in repoſita hic figura, parallelogrammata E C, P C habent inter ſe proportionem æqualitatis, quia omnes rectæ lineæ alterius ſunt æquales omnibus alterius collectiuè, & diſtributiuè, ſcilicet omnes ſimul omnibus, ſingulæ alterius ſingulis alterius (nempe latera oppoſita in ſemper æqualibus partialibus parallelogrammis) lineæ, inquam, ſpectatæ ſecundum eundem ductum, ſiue ſe-



cundum ſectiones lineæ perpendicularis (v. g. lateris E A) factas baſi AC parallelas, velut ſunt rectæ L G H, I K D: ſic enim totidem lineæ ſunt in vtroq; parallelogrammo rectangulo EC,& obliquo CP, ac ideo ſunt æqualia. Quare noſtra geometria non contradicit, vt fingis, ſed conſentit, & aſſentitur veteri Geometriæ.

2 Nihil agis cum hoc effugio, & cum hac exceptione. Quæro enim, ductis omnibus (quod tamen eſt impoſſibile, cum ſint numero infinitæ, &c. iuxta demonſtratiuè indicata in § 22 anteced.num.4.) lineis per omnia puncta laterum perpendicularium E A, B C, an eæ lineæ traducantur etiam per omnia puncta laterum longiorum obliquorum A P, C N? Negabis profecto, quia patentiſſimum eſt in obliquis longioribus lateribus plura eſſe puncta, per quæ traduci poſſunt plures lineæ baſi communi AC parallelæ. Igitur in obliquis longioribus A P, C N, præter lineas traductas ex omnibus punctis laterum rectorum E A, B C, ſunt aliqua intermedia ſpatia vacantia, per quæ duci poſſunt aliæ lineæ, ac proinde maior eſt extenſio, & quantitas obliqui parallelogrammi P C. Ergo, contra hanc propoſ.35, non ſunt æqualia.

Demonſtratio cõtra comparatione figurarũ per indiuiſibilia,

Præterea ſi ex lineis traductis ex omnibus punctis laterum rectanguli E C, & traductis per latera obliqua PA, N C paral-

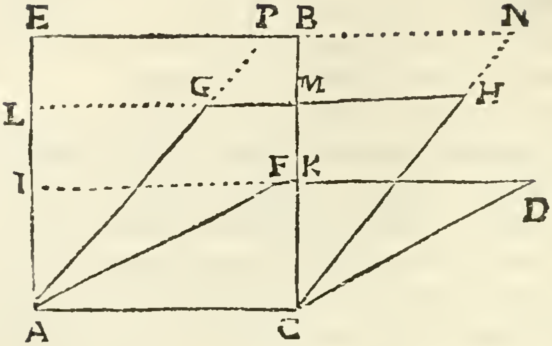
rallelogrammi P C, arguenda eſt æqualitas parallelogrammorum rectanguli, & obliqui; ergo ex eiſdem lineis arguenda erit æqualitas laterum rectorum, & obliquorum, velut ipſorum E A, P A; quod eſt abſurdum contra axioma 9; & huc faciunt quæcunq; obieci in § 25 antec.

3 At habes aliud effugium, & reſpondes cum ſimilitudine telæ geminæ, in quarum vtraque ſint totidem fila, ſed altera extenſa ſit magis, & rarior, quàm altera; ſpectatà itaque quantitate, & numero eodem filorum in vtràq;, ſunt æquales, licet raritate, & denſitate inæquales; ſic in obliquo parallelogrammo CP totidem ſunt lineæ, quot in recto C E, & præterea ſunt ſpatia inter lineas vacantia, quaſi ſit C P obliquum rarius recto denſiore CE. Sunt igitur æqualia propter numerum æqualem linearum omnium ductarum per omnia puncta laterum rectorum, & traductarum etiam per latera obliqua, licet differant in raritate, & denſitate.

Aranearum tela in Geometria per indiuiſibilia.

Reſpondeo hoc verè eſſe in geometrica philoſophia per indiuiſibilia telas aranearum texere, quæ minutiores muſcas capiant, non ſolidas mellificas Apes Geometricas. Ac interim miror cur, dum affirmas totidem lineas in vtroq; parallelogrammo, non etiam ingeras inflatas, tumentes, ac humentes in obliquo, ſiccas verò in rectangulo. Sed memento iam dictorum in § 20, num. 5. & in § 25, ſcilicet raritatis, & denſitatis differentias eſſe nullas, nullas inter ſe diſcretas lineas, nullos (ſicut nec punctorum) linearum nec in lõgum, multo minus in latum (eſt enim linea, ex eius geometrica defin. latitudinis expers) tumores in continuà, & vniformi geometricà abſtractà quantitate. Si nobiſcum in Apiar. 1. præli bam. 2 araneam geometrizantem inducas, illa non telas, ſed retia filis parallelis extenta elaborat, quibus geometricas multiplices proportiones explicet; & ſicut inter araneæ noſtrę geometrizantis fila parallela poſſunt duci alia fila, ex quibus omnibus tela continua conficeretur, & eius quantitas eſtimaretur, non autem è ſolis filis diſcretis, & parallelis; ita in obliquo parallelogrammo, præter lineas traductas è punctis omnibus laterum rectorum, & minorum per puncta non om-

In quantitate geometrica inane effugiũ ad raritatẽ, vel denſitatem.



Demonſtratio cõtra paralogiã indiuiſibiliũ. nia laterum obliquorum maiorum A P, C N, ſunt & aliæ lineæ ductæ, atq; intermediæ, ex quibus additis ad traductas è rectanguli lateribus, ſcilicet è maiori numero, arguitur neceſſariò maior quantitas obliqui P C, quàm rectanguli E C, ſi ex indiuiſibilibus, ſeu lineis, & earum numero, ac multitudine æſtimanda eſt quantitas figurarum. Vnde abſurdum adhuc viget contra 36 propoſit.lib. 1.elem. & alias eiuſdem libri, & librorum ſtereometricorum. Quæ tamen, cùm euidentiam demonſtrationis habeant, arguunt paralogiam fucatæ per indiuiſibilia geometriæ.

Lux à vera geometriâ. 4 Nam vera geometria docet eandem figuræ quantitatem eſſe poſſe ſub maioribus, vel minoribus terminis, è quorum punctis ducendæ lineæ fallaciter metirentur, & variam oſtenderent quantitatem, vt in exemplo figuræ hic habes ad 35 propoſ.lib. 1 elementorum. Ex qua propoſitione veram regulam habes æqualium parallelogrammorum, partim propter ſegmenta communia, partim propter æqualia triangula (reuiſe demonſtrationem li. 1 propoſ. 35) quorum æqualitas non ex eodem numero æqualium linearum fallaciter proditur, ſed ex congruentibus extremis eorum terminis etiam terminatæ quantitates æquales demonſtrantur, iuxta ax. 8.

5 Ex hactenus in antec. § 26, & hoc 27 prolatis habes vnde

vnde tuearis æqualitatem non ſolum parallelogrammorum, & triangulorum rectorum, & quantumuis obliquorum ſuper æqualibus baſibus inter eaſdem lineas parallelas, ſed etiam ſolidorum rectorum, & obliquorum ſuper æqualibus planis inter plana parallela. Quorum quantitates, & proportiones fallaciter arguunt plana (indiuiſibilia ſecundum profunditatem,) traducta per eorum ſolidorum ſuperficies baſibus parallelas. In figura enim appoſita pro exemplo cylindrorum recti, & obliqui eſſe poſſunt parallelogrammata E C, P C, & rectæ traductæ L G H, I F D ſtant pro planis ſolida ſecantibus. Quæ rectæ in antedictis quemadmodum paralogiſticè arguunt proportiones parallelogrammorum planorum, ſic per eas ducta plana fallaciter.&c. ſolidorum.&c. Quare elementaria antiqua, & noſtra plana, & ſolida planè, ac ſolidè ſe tuentur, & fucos geometricos non admittunt.

SCHOLION.

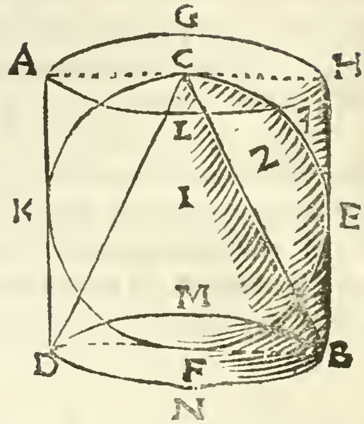
Propugnatio propoſitionum 47, & 31 lib.6 contra fucum indiuiſibilium.

H*IC tantùm recole numerum 3 antecedentis* § 22. *Nam ex ibi dictis, ſi proportiones figurarum ſimilium ſunt iuxta proportiones collectiuè, vel diſtributiuè ſumptarum omnium linearum; & lineæ figurarum ſuper diametro ſunt incommenſurabiles lineis figurarum ſimilium, &c. ſuper coſtà, ac proinde ſunt etiam illæ figuræ, vi per indiuiſibilia illatiuà, incommenſurabiles; ergo falſæ ſunt citatæ propoſ. lib.1, & 6, quæ demonſtrant figuras eas ſimiles, &c. ſuper diametro, & coſtà commenſurabiles, nempe ſuper diametro duplam figuram figuræ ſuper coſtà quadrati. At duæ illæ propoſitiones verè, & ſolidè demonſtrant, ergo illis oppoſita indiuiſibilia fucatè, ac leuiter ageometrizant, & ſimili cum leuitate geometrizantes decipiunt.*

Fu-

§ XXVIII.

Fucatum Corollarium.



1 QVoniam figuræ habent proportionem omnium ſuorum indiuiſibilium, ſi fingas cylindrum A B ſecari planis parallelis baſi D B, fient per eas ſectiones infinita numero plana circularia. Rurſus ſi ſecetur planis parallelis alterutri laterum A D, fient per eas ſectiones infinita numero plana rectangula; & quoniam eundem cylindrum complent plana tam circularia, quàm rectangula, erunt omnia plana circularia omnibus planis rectangulis æqualia. Ergo hic habes infinitas circulorum quadraturas, nempe totidem quot ſunt circuli æquales rectangulis, vertendis deinde in quadrata.

Quadrationes vix duorum parallelogrãmorum, ac ignotæ malè pro infinitis ſomniatæ.

Sed fucatæ ſunt iſtæ quadrationes. Nam omnia quidem plana circularia ſimul ſumpta (ſi tamen, infinita cum ſint, ſimul ſumi poſſint, & contra 4 definitionem libri 5. elem. proportio fingatur inter infinita) ſunt æqualia omnibus ſimul ſumptis rectangulis; ſed tamen, cùm ſingula plana circularia ſint eiuſdem quantitatis, ac diametri A H, ſingula verò rectangula ſint ſemper minora, ac minora, & bina tantùm inter ſe æqualia, ſcilicet vtrinque æqualiter diſtantia, & plano per axem imaginatum C F traducto parallela; inter tot rectangula vix tantum bina fortaſsè fuerint, quibus accidat æqualitas cum circulo A G H L. At quænam illa, ſi tamen vlla?

Sic etiam, cylindro ſecto per axem, fiunt infinita rectangula omnia inter ſe æqualia, quorum vnum A D B H; quo tamen minor eſt circulus incluſus C K F E æqualis diametri cum A H,

A H, & conſequenter nulli reliquorum rectangulorum per axem vllus æqualis eſt circulus ex parallelis ipſi A G H L.

Et ſi fingas cylindrum factum è gyrato rectangulo circa axem, tunc verò multo minus verùm fuerit affirmare circulum vllum parallelum ipſi A G H L æqualem eſſe vlli rectangulo dimidio ipſius D H; ſemper enim circulus quilibet ſectionis parallelæ baſi D M B F erit maior quolibet rectangulo, velut ipſo A C F D habente cum alijs commune latus in axe imaginario C F. Quare conciſo cylindro tot modis in infinita numero rectangula, & in circulos, falſum eſt ex ijs conciſionibus prodire totidem circulos totidem rectangulis ſuperficiebus æquales, & numero infinitas circulorum quadraturas. Huius farinæ, ſeu fùrfuris alia corollaria è falſo principio hic afferre non eſt otium. Crimine ab vno diſce omnes, *cecinit ille.* Virg.2 Æn.

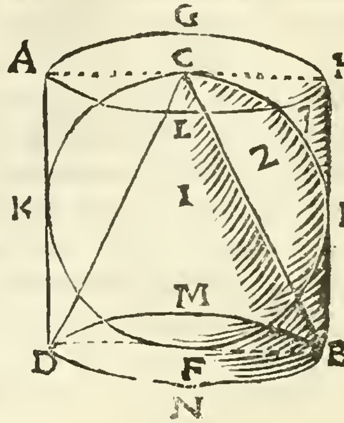
§ XXIX.

Campus quadratorius, in quo legitimæ Geometricæ Philoſophiæ corollaria de numero infinitis quadraturis ſphæricarum, & cylindricarum ſuperficierum, triangulorum ſphæricorum, circulorum.

QVemadmodum è falſis in antecedenti corollario falſæ, ſeu nullæ, ſeu vix ad bina rectangula, ignotæ, ac incertæ, pro aſſertis infinitis, prodierunt quadrationes; ſic verſa vice è legitimæ geometricæ Philoſophiæ ſancitis, & demonſtratiuè firmaris theorijs verè, ac facillimè prodeunt quadrationes numero infinitæ; ac longe admirabiliores, quàm plenarum figurarum quadrationes, ſcilicet curuarum, quæ duplici genere diſtant à planis, nempe terminis, & totis ſuperficiebus recedentibus à rectis. Ad quarum curuarum ſuperficierum admirandas theorias pertingere non poteſt mancus, & fucatus indiuiſibilium abuſus geometricus, iuxta indicata in num.7, § 22 anteced.

1 Itaq; ſuppoſito hìc quod apud nos habes inferius in ſect.2. Breuiarij noſtri Stereometrici demonſtratum, non ſolum

lum indirectè ex Archimede, ſed etiam ex ipſo ortu ſuperficiei ſphæricæ, & cum vſu præclaro geometrico centri grauitatis, ſcilicet ſuperficiem ſphæræ æqualem eſſe ſuperficiei ſine baſibus cylindri ſphæram circumſcribentis, velut hìc habes in figurà A B; facillimè patet etiam (ex demonſtratis, & ex ortu ſuperficiei cylindricæ in citat. Breuiar. Sect. 2) ſuperficiem ſphæræ C K F E æqualem eſſe rectangulo ſub diametro imaginatà C F, (ſiue ſub latere A D) eiuſdem ſphæræ, & ſub rectà æquali peripheriæ vtriuſuis baſis cylindricæ, velut ſub rectà æquali ipſi A L H G; in quod rectangulum explicatur ſuperficies cylindri A B, vt habes inferius in cit. ſect. 2 Breu. Stereom.

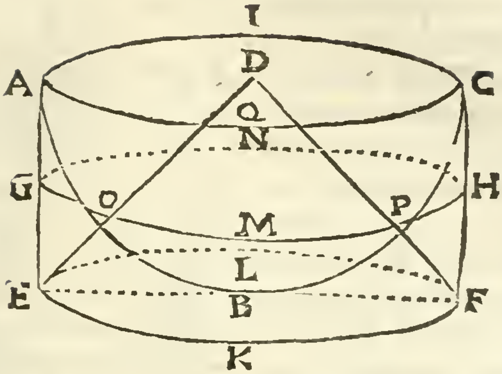


2 Rurſus in alterà hìc figurà ſuperficies hemiſphærica ſub I A Q C B A erit æqualis rectangulo ſub ſemidiametro imaginatà D B (ſiue ſub latere A E) ſphæræ, & ſub rectà æquali peripheriæ E K F L, in quod rectangulum explicatur ſuperficies cylindri A F, cui æquatur ſuperficies hemiſphærica.

3 Item quarta pars ſuperficiei ſphæricæ ſub A Q C B A æqualis eſt rectangulo ſub ſemidiametro ſphæræ, ſeu ſub cylindri latere A E, & ſub rectà æquali ſemiperipheriæ E K F, in quod rectangulum explicatur dimidium ſuperficiei cylindricæ A F, cui æqualis eſt quarta pars ſuperficiei ſphæricæ.

4 Pariter octaua pars ſuperficiei ſphæricæ ſub A B, & ſub imaginatà Q B, ideſt triangulum ſphæricum eſt æquale rectangulo ſub ſemidiametro ſphæræ, ſiue ſub latere A E, & ſub rectà æquali quartæ parti peripheriæ E K, in quod rectangulum explicatur quarta pars cylindricæ ſuperficiei ſub A E, & ſub imaginatà K Q.

Sic

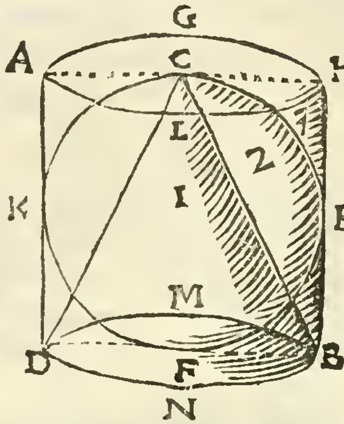


5 Sic conciſà totà peripherià A I C Q in quotlibet partes in infinitum, & iunctis curuis à quolibet puncto ſectionum ad punctum B, fient infinita numero triangula ſphærica æqualia ſingula ſingulis ſegmentis cylindricæ ſuperficiei ſimilibus, & rectangulis, in quæ ſegmenta cylindricæ ſuperficies explicantur. Velut in exemplo, ſectà A Q in puncto medio inter A, & Q, & iunctà curuà à puncto ſectionis ad B, fit decimaſexta pars ſuperficiei ſphæricæ, cuius ſemidiameter eſt imaginata D B, ideſt triangulum ſphæricum dimidium antecedentis trianguli ſphærici A B Q, cui dimidio æqualis eſt ſuperficies cylindrica ſub A E, & ſub rectà ductà per puncta inter A Q, E K, hoc eſt rectangulo ſub A E, & ſub rectà æquali octauæ parti paripheriæ, in quod rectangulum explicatur octaua pars cylindricæ ſuperficiei ambientis cylindrum A F; & ſic in infinitum infinitæ fieri poſſunt quadrationes triangulorum ſphæricorum, & ſegmentorum cylindricæ ſuperficiei. Aliter tamen, ac facilius, & copioſius (additis hic quadraturis ſuperficiei cylindricæ) quàm docuimus in Appendice poſt lib. 3 element. § 3, & docebimus in ſect. 2 Breu. Stereom. ſub finem § 1, in corollar. ſeu problemate 12, & in Schol. 2.

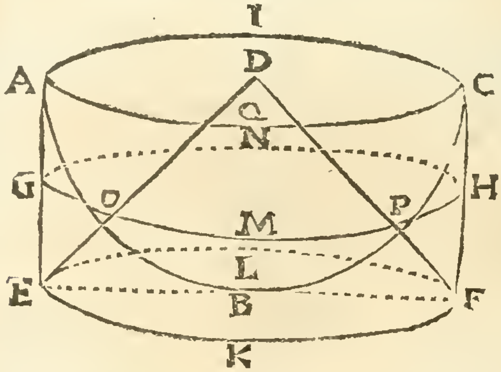
Infinitæ quadrationes ſuperficierũ cylindricarum, & ſphæricarũ, triãg. ſphær. &c.

6 Pariter in priore hic figurà, conciſà ſphæræ C K F E ſuperficie in quotlibet partes in infinitum, peripherijs nume-

ro infinitis ſe mutuò ſicantibus per puncta extrema eiuſdem diametri, velut per C, & F, fient ſegmenta ſuperficiei ſphæræ intercepta inter lineas conuexas ſemiperiphericas (qualia in Aſtronomia ſunt duodecim ſegmenta intercipientia 12 ſigna Zodiace, & habentia angulos ad vtrumque polum) quæ ſegmenta ſuperficiei ſphæricæ erunt æqualia ſingula ſingulis ſimilibus ſegmentis cylindricæ ſuperficiei ſectæ parallelωs vtrilibet laterum AD, HB; & conſequenter etiam æqualia erunt ſimilibus rectangulis ſub altero laterum AD, & ſub rectà, quæ ſit æqualis ſegmento peripherię ALHG, in quę rectangula explicantur ſegmenta ſimilia ſuperficiei cylindricę. Quare hìc etiam habes numero infinitas quadrationes ſegmentorum ſphęricę, & cylindricę ſuperficierum.



7 Ex numero hìc antecedente 3 habes aliter, quàm apud Archimedem, theoricam circuli quadraturam. ——



Quo-

— Quoniam enim, in alterà hìc figurà, quarta pars ſuperficiei ſphęricę ſub AQCBA, ex citatis in antecedenti n. 1, eſt æqualis circulo ſphęrę maximo, & in cit. num. 3, ea eſt ęqualis rectangulo ſub AE, ſiue ſub ſemidiametro imaginatà D B, & ſub rectà ęquali ſemipherię E K F (hoc eſt triangulo ſub A E, & rectà peripheriæ ęquali, iuxta Archim.) erit ergo & circulus ſphæræ maximus quadratus; & pręterea oſtenſum erit cui ſegmento cylindricæ ſuperficiei ęquetur idem circulus. Videbis plura in cit. ſect. 2 Breuiar. Stereom. §§, 1, & 2.

Circuli quadratura aliter, quam ab Archimede.

8 Hìc interim (in alterà priore figurà) ex anteced. & inferius ex cit. Breu. poſitis ſuperficiebus ęqualibus ſphęricà, & cylindricà ſine baſibus, patet quartam partem ſphæricæ, ſeu circulum maximum C K F I, & baſim alterutram cylindri circularem ALHG (ęqualem ipſi CKFI) eſſe ęquales quartę parti cylindricę ſuperficiei ſub latere A D, & ſub quartà parte (ver. gr. ſub A L) peripherię ALHG, hoc eſt rectangulo ſub A D, & ſub recta ęquali quartę parti peripherię A L H G; in quod rectangulum explicatur quarta pars peripherię cylindricæ, ſine baſibus. Quoniam verò ſectà ſphęrà in infinitis peripherię punctis, & traiecto per ea, & per axem plano, fiunt infiniti circuli maximi ſphæram conflantes, qualium vnus eſt C K F E; & ſecto cylindro A B per infinita axis puncta à plano baſibus cylindri parallelo, fiunt infiniti circuli ſinguli ęquales alterutri baſi ALHG; habes ergo hìc in ſphęrà, & in cylindro bis infinitas quadraturas infinitorum circulorum ſingulorum æqualium rectangulo ſub A D, & ſub rectà ęquali quartę A L. &c.

Infinita quadrationes circulorum.

9 Ex hìc hactenus dictis habes vnde intelligas quod indicatum videbis in fine hu. 3 Tom. in Parerg. Geometr. de infinitis numero quadraturis curuorum ſegmentorum ſuperficiei extimę, & intimę in ſcaphijs. &c.

§ XXX.

Fucus ageometricus contra definitionem 4 lib. 5 elem.

1 *Habet Philoſophia Geometrica præclarum hoc auctarium (inquit fucatæ geometriæ ſectator quiſpiam) ex indiuiſibilium vſu, vt quæ adhuc proportiones arctarit inter finita, iuxta hanc 4 definit. nunc tandem protulerit etiam ad ea, quæ, ſi non prorſus infinita, ſaltem media ſint inter finita, & infinita. Et conceſsà etiam excluſione per hanc 4 definitionem infiniti cathegorematici, tamen ſaltem ſyncathegorematicum admittat, infinitè finitum, figuras finitas comparatas per indiuiſibilia, vel per partes in infinitum poſſibiles in continuatà in infinitum quantitatis diuiſione. Dilatatis igitur anguſtijs huius definitionis, ampliata eſt etiam in infinitum quodammodo Geometrica Philoſophia. Sed apage, ò ageometra, cum fucato iſtoc tuo auctario, ſeu potius deſtructorio pſeudogeometrico; & pro hac 4 definit. relege ea, quæ ad eam notauimus contra paralogiſmos, & fucos. Quibus etiam detegendis, & abigendis recole quæ in antec. § 22, nu. 4. Hìc tantum reſpondeo.*

Infinitum ſyncategorematicum partim excluditur à definitione 4 l. 5 elem.

Infinitum, quod vocant ſyncategorematicum, partim finitum quidem eſt, quatenus (in exemplo noſtræ materiæ) appellat figuram, & aggregatum indiuiſibilium, & partium omnium poſſibilium, & ex hac parte vt terminatum, & determinatum, ſcilicet vt quantitas figurata, ſubit affectionem proportionis cum altero finito; at quatenus ſignificat numerum infinitum indiuiſibilium, & partium in infinitum poſſibilium, habet rationem infiniti, & eijcitur ab hac 4. defin. à proportione geometrica. Dum verò linearum, vel figurarum proportiones vel conſtituuntur, vel quæruntur per indiuiſibilia omnia, & per partes omnes poſſibiles, quæruntur in finitis, ac figuratis ex ea parte, ex qua ſunt infinita, & ſecabilia, vel ſecta in numero infinita. Relege in § 22 antec. num. 4.

2 *Cæterum ſatis iam, ac doctè vrſerunt hoc caput propugna-*

gnatorium huius 4 def. viri in Philoſophia geometrica inſignes, ac de ea immortaliter benemeriti. Quibus pro reſponſione verba quidem dari poſſunt; an verò rebus factum ſit ſatis, erit iudicium (etiam ex antecedentibus hìc noſtris) apud ſolidè philoſophantes, verè ſcientificos, nec perſonarum affectatè ſtudioſos, ſed ſynceræ veritatis amicos (quales abſentes, ac poſteros geometrica ſperat veritas,) nec apud eos, quibus erubeſcendum ſit in ſuis theoriјs fucata ſpecie deceptos (quod eſt in fabulis) pro vera Iunone inanes nubeculas captaſſe.

Verba data pro pugnatoribus veræ Geometriæ.

Inanes nubeculæ Geometricæ. &c.

EPI-

EPILOGI PLANIMETRICI
PARS TERTIA

§ XXXI.

A planis ad ſolida tranſitus immediatus, iuxta noſtram methodum.

1 *IMbuti iam cognitione, theorijs, praxibus, applicationibus, vſibus planarum elementarium figurarum Tyrones, recto ex ordine, ac iure inhiant theorijs, ac praxibus figurarum ſolidarum. Quarum cognitionem nos in noſtra methodo non differendam cenſuimus propter cauſas, quarum aliquas habes in præfatione ad te, mi lector, initio ſequentis mox poſt hunc Epilogum Breuiarij Stereometrici. Ac modus demonſtrandi à nobis inſtitutus in Vltraelementari noſtra Stereometria non eget libris Arithmeticis locatis inter planas, & ſolidas elementares figuras. Supponimus tantùm vſum aliquem apud Tyrones elementarium logiſticarum quatuor operationum, Additionis, Multiplicationis, Subtractionis, Diuiſionis, quæ vulgo in promptu ſunt. Itaque cenſemus nos hìc interim à planis ad ſolida gradum eſſe faciendum, ac poſt noſtrum Breuiarium ſtereometricum animo iam ditato, ac hilarato iucundà ſolidarum figurarum cognitione, facilius, ac lubentius Tyrones vorabunt ſi quæ moleſta ſunt in de incommenſurabilibus. Quorum contemplatio planè ſterilis eſt, nec vſum vllum practicum habet, ideo à nobis reponitur indicanda in extremis.*

Theoriæ de incōmēſurabilibus pro praxi ſteriles.

2 *Interim tamen habes etiam apud nos in antecedentibus cognitionem demonſtratiuam præcipuorum theorematum, ac* pre-

problematum, quæ in libris 7, 8, 9, arithmeticis proſtant (vt ſæpe ad varias propoſitiones lib.6, & ad ipſum lib.5 notauimus.) eoque facilius apud nos, quòd arithmetica in planis, & ſolidis figuris vſurpauimus in vulgatis characteribus numerarijs, & operationibus vulgatis logiſticis. Quare propoſitiones & quas hìc citabimus, & alias in libris elementaribus arithmeticis poteris ſolà, & ſimplici vel expoſitione, vel inductione oſtendere, ac demonſtrare.

Igitur ab expoſitis apud nos in lib.5 patent libri 7 propoſitiones 12, 13, 14, 22, & Scholia in quibus per numeros demonſtrantur præcipua, quæ de magnitudinibus geometricè probantur in lib.5. Propoſitiones arithmeticæ elementares apud nos expeditæ.

E' ſexti libri propoſitionibus 1, 11, 12, 16, 17, 20, 22, 23 patent libri ſeptimi propoſitiones 17, 18, 19, 20; & libri octaui propoſitiones 5, (& Scholia poſt propoſitionem 10) 11, 13, 19; & libri 9 propoſ. 18, 19. Confer inter ſe, & videbis geometricas propoſitiones citatas libri ſexti oſtendi per numeros logiſticos propoſitionum citatarum in lib. 7, 8, 9; & viciſſim citatas in lib. 7, 8, 9 demonſtratas eſſe à geometricis citatis in lib. 6. Adde prop. 33 lib 11, & lib. 12 prop. 12. Præterea è numerarijs oſtenſionibus libri 2 habes auctarium ad lib. 7, 8, 9. Vide & in fine Breuiarij ſtereometrici indicata apud nos pro lib. 10 elem. Quare in noſtra methodo etiam quæ transferuntur, non interim auferuntur, dum eorum præcipua habes etiam in antecedentibus compendioſè demonſtrata.

In hoc ad ſolida tranſitu præmitto tria theoremata ſequentia elementaria, ob cauſas, quas mox leges.

SCHO-

§ XXXII.

SCHOLION I.

Geminę propoſitiones de planis è lib. 11, pro Gnomonicis, & vnica de ſolidis è lib. 12.

ANtequam proximum gradum mox faciam ad ſolida, lubet hic reponere tres elementares propoſitiones è li. 11, & 12 elem. in quarum primâ eſt demonſtratio praxis gnomonicæ, quam habes apud nos in To. 1. hu. Aerarij ad propoſ. 12, § 14, vtraque verò, cum alibi, tum præcipuè in Gnomonicis plurimi ſunt vsûs, ſiue ſtylos perpendiculariter in planis vel horizontalibus, vel quoquomodo erectis lubeat excitare ſcientificè, ſiue in theorijs, & praxibus analemmatis vtaris planorum circularium ſectionibus pro lineis varijs horarijs, & Aſtronomicis. Reliquæ propoſitiones lib. 11 vſq; ad 25 ſunt de planis, non autem de ſolidis, quæ præcipuè quæruntur à ſtudioſis in eo libro. Ac in noſtra quidem methodo nullius vſûs ſunt ad ſolida, quorum nos cognitionem theoricam, & practicam multiplicem trademus in proximè ſequenti Breuiario Stereometrico è primis principijs, ex vſu centri grauitatis, ex ortu figurarum ipſarum ſolidarum ſine vlla neceſſitate propoſitionum de planis, quas permultas intermiſcet Eclides ſuis ſolidis. Pro quibus tamen hìc etiam è lib. 12 apponemus prop ſeptimā ob cauſas, quas hic inferius leges in fine Scholij 2 ſub § 33. Eas verò propoſitiones è lib. 11, & 12 dabimus proximè græco de fonte à Commandini verſione. Nam qui à græco prototypo diuagati ſunt, Euclidem inducunt loquentem, & probantem aliqua è principijs, quæ non ſunt apud Euclidem, vt videbis in Scholijs poſt appoſitas propoſitiones è li. 11. Quas non antè ſex libros priores elementares de planis attulimus, ſed nunc hìc primum, quia ſupponunt aliqua è libris antecedentibus,

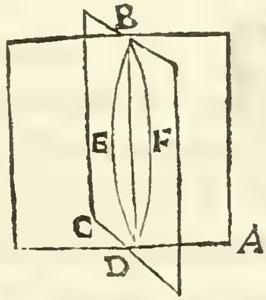
In lib. 11 ele. propoſitiones de planis inter ſolida.

Interpretum Euclid. hallucinatio.

bus, quos iam habes expoſitos à nobis. Reliquas etiam propoſ. de planis inter ſolida Euclidis facile iam intelliges demonſtratas ex hactenus à nobis poſitis in antecedentibus, & in hoc tomo 3.

THEOREMA I.

Si duo plana ſe inuicem ſecent, communis ipſorum ſectio recta linea erit.

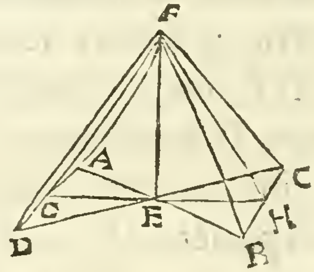


DVO enim plana AB, BC ſe inuicem ſecent, communis autem ipſorum ſectio ſit D B linea. Dico lineam D B rectam eſſe. ſi enim non ita ſit, ducatur à puncto D ad B in plano quidem A B recta linea D E B; in plano autem B C recta linea D F B. erunt vtique duarum rectarum linearum DEB, DFB ijdem termini, & ipſæ ſpatium continebunt, quod eſt abſurdum. non igitur DEB, DFB rectæ lineæ ſunt. Similiter oſtendemus neque aliam quampiam, quæ à puncto D ad B ducitur rectam eſſe, præter ipſam D B, communem ſcilicet planorum A B, B C ſectionem. ſi igitur duo plana ſe inui-

cem ſecent, communis ipſorum ſectio recta linea erit.

THEOREMA II.

Si recta linea duabus rectis lineis ſe inuicem ſecantibus in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat, etiam ducto per ipſas plano ad rectos angulos erit.

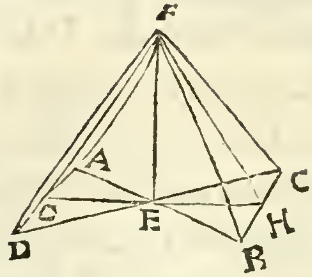


RECta enim linea quædam EF duabus rectis lineis AB, CD ſe inuicem ſecantibus in E puncto, ab ipſo E ad rectos angulos inſiſtat. Dico EF etiam plano per AB, CD ducto ad rectos angulos eſſe. ſumantur enim rectæ lineæ AE, EB, CE, ED inter ſe æquales: perq; E ducatur recta linea GEH vtcumque, & iungantur AD, CB; deinde à quouis puncto F ducantur FA, FG, FD, FC, FH, FB. Et quoniam duæ rectæ lineæ AE, ED duabus rectis lineis CE, EB æquales ſunt, & angulos æquales continent, erit AD baſis baſi CB æqualis, & trian-

4 primi.

triangulum A E D triangulo C E B æquale:
ergo & angulus DAE æqualis eſt angulo EBC:
eſt autem & angulus AEG æqualis angulo B-
EH. Duo igitur triangula ſunt AGE, BEH duos
angulos duobus angulis æquales habentia, al-
terum alteri, & vnum latus A E vni lateri EB
æquale, quod eſt ad æquales angulos. quare & *26.primi.*
reliqua latera reliquis lateribus æqualia habe-
bunt; ergo G E quidem eſt æqualis E H, A G
vero ipſi B H. Quòd cum A E ſit æqualis E B,
communis autem, & ad rectos angulos F E;
erit baſis A F baſi F B æqualis. Eadem quoq; *4.primi.*
ratione & CF æqualis erit F D. Præterea quo-
niam AD eſt æqualis CB, & AF ipſi FB, erunt
duæ FA, A D duabus F B, B C æquales, altera
alteri; & oſtenſa eſt baſis D F æqualis baſi F C.
angulus igitur FAD angulo FBC eſt æqualis. *8.primi.*
Rurſus oſtenſa eſt AG æqualis B H. ſed & A F
ipſi FB eſt æqualis. duæ igitur FA, AG duabus
FB, BH æquales ſunt, & angulus FAG æqua- *4.primi.*
lis eſt angulo F B H, vt demonſtratum fuit.
baſis igitur G F baſi F H eſt æqualis. Rurſus
quoniam G E oſtenſa eſt æqualis E H, com-
munis autem FE, erunt duæ GE, EF æquales
duabus HE, EF; & baſis H F eſt æqualis baſi
FG. angulus igitur GEF angulo HEF eſt ęqua-

lis, & idcirco rectus eſt vterq; angulorum GEF, HEF. ergo F E ad GH vtcumque per E ductam rectos efficit angulos. Similiter oſtendemus FE etiam



ad omnes rectas lineas, quæ ipſam contingunt, & in ſubiecto ſunt plano, rectos angu-
3.diffi. los efficere. recta autem ad planum recta eſt, quando ad omnes rectas lineas ipſam contingentes, & in eodem exiſtentes plano rectos efficit angulos, quare F E ſubiecto plano ad rectos angulos inſiſtit: at ſubiectum planum eſt quod per A B, C D rectas lineas ducitur. ergo F E ad rectos angulos erit ducto per AB, CD plano. Si igitur recta linea duabus rectis lineis ſe inuicem ſecantibus in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat, etiam ducto per ipſas plano ad rectos angulos erit.

SCHO-

SCHOLION II.

TErtia definitio libri 11, quæ ſub finem antecedentis demonſtrationis in theor. 2 citatur, patet in verbis ipſius demonſtrationis, nec vllam patitur difficultatem apud excipientem verba ipſa vt aperte ſignificant.

SCHOLION III.

Aliter ex per ſe notis expedire theorema proximè antecedens.

MOdus apud Euclidem demonſtrandi proximè antecedens theorema, (ne quis putet fucatam fieri demonſtrationem per indiuiſibilia, & lineas numero infinitas in plano deſſignabiles) intelligendus eſt iuxta interpretationem noſtram, quam habes in anteced. § 24, *ſcilicet per modum exempli, quaſi acciperentur (ſi fieri poſſet) omnes lineæ deſſignabiles in plano, ad quas erecta ſit perpendicularis. &c.*

Itaque & definitio 3 & propoſ. hæc 4, lib. 11 caſtigatè geometricè ſic exponi, & expediri ex per ſe notis poſſunt. Recta linea inſiſtens ad angulos rectos communi ſectioni duarum rectarum, eſt etiam perpendicularis toti plano ab ipſis lineis gyratis producto, &c. *quemadmodum eſſet & circulo producto à ſemidiametro, cui eſſet perpendicularis. Quod in idem rècidit cum Euclide, dum ait*: plano per ipſas traducto. *Eſt autem per ſe notum rectam perpendicularem ad alteram producentem planum, & eſſe perpendicularem ad productum planum. Pauca hæc ſapientibus, non cauillatoribus, indicata ſatis ſunt.*

SCHO-

SCHOLION IV.

Rectè à nobis affirmatum in To. primo Aerarij Axioma 13 apud Euclidem non eſſe.

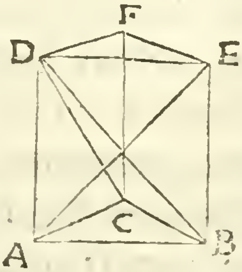
HI'C pro noſtro munimento, & pro alieno documento ex occaſione duarum præcedentium elementarium propoſitionum diſſimulandum non cenſeo id, quod notaui olim dum legerem primam propoſitionem citati lib. 11, quam aliqui, dum iure neſcio quo ſuo, non è græco prototypo Euclide, interpretantur, fingunt ab Euclide demonſtrari rectæ lineæ partem vnam in vno plano, partem alteram in altero plano eſſe non poſſe, quia duarum rectarum eſſet commune ſegmentum contra, vt ipſi affirmant, pronuntiatum decimum. Qua in probatione fingunt Euclidem vti pronunciato, quod apud ipſum non eſt, ſed à Proclo contra Scepticos ponitur ad 1 lib. 1 propoſit. Quaſi verò nos temerè, in § 1 *ad axioma apud nos 13, affirmauerimus, eius pronunciati nullum eſſe vſum apud Euclidem. Non ſic Commandinus, & alij caſtigatiores, & cautiores, & religioſiores in transferendis bona fide verbis è græco Euclidis in latinum. Nam Euclides affirmat non eſſe commune ſegmentum duarum linearum non quaſi axioma, ſed id vlterius demonſtrat dum addit apud Commandinum:* recta enim linea non conuenit in pluribus punctis, quàm vno. *Meliuſq; ex Græco Theor. apud Zambertum, quàm apud Commandinum, ſequentia:* ſi ad inuicem ipſæ rectæ lineæ congruentes non fuerint. *Hoc eſt ſi duæ rectæ conueniant, & non congruant, non conueniunt niſi in vnum punctum; ſi congruant conueniunt in omnibus. &c. Hæc ſatis pro noſtra affirmatione in cit.* § 1 *ad axioma apud nos 13.*

Cur non ſit duarum rectarũ cõmune ſegmentum.

THEO-

THEOREMA III.

Omne priſma triangularem habens baſim diuiditur in tres pyramides æquales inter ſe, quæ triangulares baſes habent.



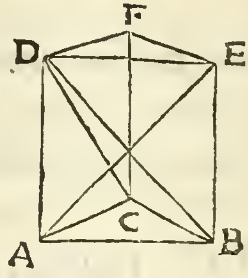
SIT priſma, cuius baſis quidem triangulum ABC, oppoſitum autem ipſi DEF. Dico priſma ABCDEF diuidi in tres pyramides æquales inter ſe, quę triangulares habent baſes. Iungantur enim BD, EC, CD. Et quoniam parallelogrammum eſt ABED, cuius diameter BD, erit ABD triangulum triangulo EBD æquale. ergo pyramis, cuius baſis triangulum ABD, vertex autem punctum C, æqualis eſt pyramidi, cuius baſis EDB triangulum, & vertex punctum C. Sed pyramis, cuius baſis EDB triangulum, & vertex punctum C, eadem eſt pyramidi, cuius baſis triangulum EBC, & vertex D punctum, ijſdem enim planis continentur. Ergo & pyramis cuius baſis triangulum ABD, vertex au-

54.primi.

5.huius.

tex au-

tex autem punctum C æqualis eſt pyramidi, cuius baſis E B C triangulum, & vertex punctum D. Rurſus quoniam FCBE parallelogrammum eſt, cuius diameter C E, triangulum E C F triangulo C B E eſt æquale. ergo & pyramis, cuius baſis B E C triangulum, vertex autem punctum D, æqualis eſt pyramidi, cuius baſis triangulum E C F, & vertex punctum D. Sed pyramis, cuius baſis quidem B C E triangulum, vertex autem punctum D, oſtenſa eſt æqualis pyramidi, cuius baſis triangulum A B D, & vertex C punctum. quare & pyramis, cuius baſis triangulum C E F, & vertex punctum D, æqualis eſt pyramidi, cuius baſis triangulum ABD, & vertex C punctum. Priſma igitur A B C D E F diuiditur in tres pyramides inter ſe æquales, quæ triangulares baſes habent. Et quoniam pyramis, cuius baſis A B D triangulum, vertex autem punctum C, eadem eſt pyramidi, cuius baſis triangulum CAB, & vertex D punctum, ijſdem namque planis continentur: pyramis autem, cuius baſis triangulum ABD,



& ver-

& vertex punctum C, tertia pars oſtenſa eſt priſmatis, cuius baſis ABC triangulum, & oppoſitum ipſi DEF. & pyramis igitur, cuius baſis triangulum ABC, vertex autem D punctum, tertia pars eſt priſmatis eandem baſim habentis, videlicet ABC triangulum, & oppoſitum ipſi triangulum DEF.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt omnem pyramidem tertiam partem eſſe priſmatis baſim habentis eandem, & altitudinem æqualem: quoniam etiam ſi baſis priſmatis aliam quandam figuram rectilineam obtineat, & oppoſitam ipſi eandem, diuiditur in priſmata, quæ triangulares baſes habent, & quæ ipſis opponuntur.

SCHOLION I.

Aliter corollarium proximè antecedens demonſtratum.

PRoximè præcedentis elementaris propoſitionis corollarium nos in Breuiarij noſtri Stereometrici ſectione 1, theor. 15 aliter facillimè, ac breuiſſimè ſoluemus, poſito theoremate de pyramide, & cono æqualibus ſuper æqualibus baſibus, & ſub æqualibus altitudinibus. Ibi, ne prolixitate importuna incommodemus demonſtrationis breuitati, ac perſpicuitati, omittemus theorica firmamenta, quæ lubet hic nunc paucis exponere.

§ XXXIII.

SCHOLION II, AC—

—THEOREMA

Aequalium altitudinum, & baſium Pyramis, & Conus æqualia ſunt ſolida, ex eorum ortu.

NE figuras abſque neceſſitate multiplicemus, inſpice hìc antecedenter, figuras ſub numero 3 in tabella ſectionis 2 Breuiarij Stereometrici poſt hunc Epilogum. Dico pyramidem A B F, & conum C D H ſuper poſitis æqualibus baſibus AB, CD, & æqualibus perpendicularibus altitudinibus EF, GH eſſe æqualia inter ſe ſolida.

Axioma noſtrum eſt vſurpatum in Epilogi huiuſce planimetrici antecedentibus, & in Breuiario Stereometrico vſurpandum ſæpius. *Si partes componentes ſiue conſtituentia ſunt æqualia, etiam compoſita, ſiue conſtituta ſunt æqualia.* Quod quidem facile apparet in ijs ſolidis, quæ, iuxta noſtras theorias, conficiuntur ex eleuatione æqualium, ac non imminutarum

rum baſium in æquales altitudines, vt patet in citatæ tabellæ fig. 1, & 2, poſitis parallelipipedi C G, & Cylindri E H æqualibus baſibus C D, E F, & æqualibus altitudinibus DG, FH, in quibus (iuxta theoremata, quæ habebis in § 2, ſect. 2 Breuiarij Stereometrici) baſium æqualium eleuationes æquales (ex quibus conflantur) produnt veritatem propoſiti theorematis de eorum æqualitate. At in pyramidibus, & conis, quorum baſes æquales dum eleuantur, iminuuntur etiam magis, ac magis per altitudines æquales vſque ad puncta vtriuſq; verticis F, H, quonam pacto noſtrum id principium ſibi conſtet, ac firmet æqualitatem inter ſe pyramidis A B F, & coni CDH? ſcilicet, mi Tyro, e ſequenti ratiocinatione, qua conficitur vt intelligas etiam Pyramides, & Conos æqualium altitudinum, & baſium conflari ex æqualium baſium eleuatione in æquales altitudines.

Quoniam enim æquales ponuntur baſes A B, C D, ergo & æqualium baſium partes ſimiles ſunt æquales, ipſius A B tertiæ, quartæ, ſextæ, octauę, &c. tertijs, quartis, ſextis, octauis, &c. ipſius C D. At in æqualibus altitudinibus E F, G H baſis vtraq; A B, C D, dum per ſimiles, & æquales eas partes vſque ad puncta verticis vtriuſq; F, H imminuuntur, ac eleuantur, conflant ſoliditates Pyramidis, & Coni; ergo etiam Pyramides, & Coni, ex æqualibus conflata ſolida, ſunt & ipſa inter ſe ſe æqualia. Atq; ipſis etiam aptatur noſtrum id principium: *ſi conflantia ſunt æqualia, etiam & conflata.* Hiſce nos theorijs muniti, in citato theor. 15, Sect. 1 Breuiar. Stereometrici affirmabimus æqualitatem Pyramidis, & Coni æqualium altitudinum, & baſium, vt ibi aliter demonſtremus Pyramidem eſſe partem tertiam ſui priſmatis. Quæ noſtra ſi cui forte minus alluceant, vel probentur, habet ab elementorum vulgatorum Corollario propoſ. 7, li. 12 antepoſito vnde ſibi ſatisfaciat: ne ſit quidquam, quod in geometrica noſtra ſtructura nutet.

§ XXIV.

SCHOLION III.

De Ortu Pyramidum, & Conorum inæqualium ex inæqualibus baſibus, vel altitudinibus, &c.

AT verò inæqualibus exiſtentibus altitudinibus (velut in fig. 10.*tabellæ ſectionis* 2 *Breuiar.&c. Stereometrici) ſi fingas baſes æquales, eæ dum eleuantur, imminuuntur per partes diſſimiles, & inæquales alterius baſis (verbi gratia eleuatæ ad maiorem altitudinem) reſpectu partium alterius baſis minus eleuatæ; ac fiunt diuerſæ imminutiones etiam æqualium baſium ſub inclinationibus diuerſis laterum pyramidalium,vel conicorum ad diuerſas altitudines. Eadem etiam quantitas in abſtractione geometrica cùm ſit diuiſibilis in infinitũ, poteſt diuidi in plures,ac minores,vel in maiores, & pauciores partes,&c. Contraria ratione(in fig.*3 *citatæ tab.ſect.*2 *) æqualibus exiſtentibus altitudinibus E F, G H, ſi baſes fingas inæquales, in eleuationibus æqualibus imminuentur per partes diſſimiles, ac inæquales alterius baſis, verbi gratia maioris reſpectu partium alterius baſis minoris. Quapropter altitudinum, vel baſium inæqualitas producit ſoliditates inæquales, &c. Ne hallucineris, expende in hoc* 3, *&* 2 *Schol.anteced.verba:* per æquales altitudines, ſimiles, & æquales baſium partes æqualium; inæqualium altitudinum, & inclinationum eleuationes per diſſimilia, & inæqualia, &c.

SCHO-

SCHOLION IV.

In proximè antecedenti elementari theoremate citata propoſitio de pyramidibus æqualium altitudinum habentibus inter ſe vt baſes, aliter demonſtrata.

NE Tyrones neceſſe habeant alijs elementaribus propoſitionibus, ac ſatis habeant in theoremate proximè poſito elementari, & eius corollario, operæ pretium arbitror hìc indicare noſtrum principium, quo & in 2 Tomo vſi ſumus opportunè, ac etiam in 2. parte huius tertij Tomi vtemur; ex quo patet pyramides æqualium altitudinum habere inter ſe proportionem baſium. Quoniam enim, ex anteced. Schol. 2, & 3 conſtantur pyramides ex eleuatione baſis magis, ac magis imminutæ vſq; ad punctum verticis, ſi eleuationes, ſeu altitudines ſunt æquales, non eſt vnde earum differentia, ſeu proportio petatur, quàm à differentia, ſeu proportione baſium, quarum per æquales altitudines eleuatione, ac imminutione conſtantur, &c. Huius theoriæ ſi te (ò quicunque legis hìc) non capit euidentia, ſeu potius eam non capis, ùtere citatà propoſ. 5 lib. 11 Elem. Et relàbere per plures alias citatas in eam prolixitatem, quæ merito torqueat ingenia moroſa, & captioſa.

COROLLARIA

Elementares aliquas propoſitiones de ſolidis ampliantia.

1 QVæ apud Euclidem ſunt de pyramidibus obliquis, & triangularibus licet etiam traducere ad rectas, erectas, & baſium polygonarum. Modò enim ſint æquales altitudines perpendiculares, & baſes, cuiuſcunq; ſint obliquitatis, & variæ in baſibus figuræ, ſunt inter ſe æquales etiam earum ſoliditates, quia in obliquis etiam ſpectatur èadem altitudo perpendicularis quæ in rectis, & in diuerſæ figuræ baſibus æqualitatis arealis habetur ratio. Sic æquali-

bus

bus altitudinibus inæqualitas baſium (etiam diuerſiformium, è quarum imminutione, ac eleuatione ſoliditas diuerſiformis efficitur) inæqualitatem in ſoliditatibus indicat.&c.

2 Nec ſolum comparari poſſunt inter ſe pyramides, vt apud Euclidē, ſed etiam pyramides cum conis, quorũ ſolidorum quemadmodum æqualitas, iuxta Scholia 2, & 3 antecedentia, proditur ex æqualitate altitudinum, & baſium, ſic æqualibus altitudinibus, differentia ſoliditatis è baſium differentia indicabitur. Sed de his plura in tota Sectione 1 Breuiarij noſtri Stereometrici mox leges. Indico aliqua, vnde geometricè ſcientes, ac ſolertes plura educant.

B O N O N I AE,
In Typographia Hæredis Benatij hic Epilog. Planim. impreſſus eſt, cum facultate Superiorum, Anno 1648.

TOMI TERTII
ÆRARII
Philoſophiæ Mathematicæ
PARS SECVNDA,

IN QVA

Breuiarium Stereometricum ſpeculatiuum, & practicum,

ET

Campus demonſtratorius vniuerſaliſsimus.

&c.

AMICO LECTORI.

Vtile Authoris conſilium in hoc Stereometrico etiam vltraelementari Breuiario.

BReuiarium hoc Stereometricum etiam vltraelemẽtare ſpeculatiuum, & practicum concinnatum eſt in primis pro noſtris apud Chinenſes diuinæ, humanæq; philoſophiæ Doctoribus; ac pro ipſis etiam Chinẽſibus Philoſophis noſtrates haſce mathematicas ſcientias mirè amantibus, ac diſcentibus, vt indicatum habes, amice Lector, in Proloquio ad te in veſtibulo primi Tomi Ærarij huius. Erit tamen etiam noſtris Europæis, atq; alijs toto Orbe nationibus, vt opinor, non inutile, nec ingratum. Præſertim cum gradum facillimum faciamus ad ſolida rotunda pene infinita etiam extra, & vltra elementaria.

Ac ſane poſt planarum figurarum elementaria theoremata, & problemata ſolet incommodare Tyronibus mora interiecta in libris Arithmeticis, & de lineis, ac figuris incommenſurabilibus, antequam deducantur ad ſolidarum figurarum cognitionem. In ipſis etiam libris de ſolidis permoleſta quampluribus videtur prolixitas aliquando aliquarum demonſtrationum indirectarum, & quampluri-ma theoremata interpoſita pertinentia ad lineas, & figuras planas, non ad ſolidas; licet eorum aliqua ſint quaſi lemmata; quibus nos non egemus in no-

ſtra methodo pro demonſtrationibus,& cognitione ſolidorum. Sat ſcio arithmetica conducere & linearum,& figurarum incommenſurabilium theorijs, & cognitioni proportionum irrationabilium inter latera aliqua ſolidarum figurarum, præſertim regularium. At ſi quis circa ſolida ita verſetur theoricè, ac practicè (quod nos in hoc Breuiario Stereometrico profitemur) vt copioſam eorum cognitionem Tyrones adipiſcantur, ſine vlla incommenſurabilium (quæ ad praxes nihil conducunt) neceſſitate, quid opus eſt ſtudium Tyronum laſſare alijs intermedijs inter plana,& ſolida, & non ſolidis inter ſolida? Quid ni quamprimùm introducantur ad theoremata,& vſus præclaros præcipuæ partis, quæ Stereometria eſt, diſtractis interim,aut dilatis prolixitatibus omnino non neceſſarijs?

Sed quod præcipuum eſt, id in primis præſtabimus, vt breuiſſimis, & facillimis demonſtrationibus, ac regulis vniuerſalibus, modò per numeros, modò cum vſu geometrico centri grauitatis; modò, ac vt plurimùm, ex ipſarum ſolidarum figurarum origine diſſoluamus omnes difficultates officientes claræ,& expeditæ cognitioni quantitatum, proportionum, dimenſionum, transformationum,&c. in ſolidis etiam vltraelementaribus.

Saltem hoc proderimus, vt Tyrones facilè imbuti hoc noſtro Breuiario facilius etiam, ſi velint, eadem theoremata, & problemata in elementaribus libris de ſolidis apud Euclidem, & Hypſiclem intelligere, ac noſtris praxibus condire poſſint. Bre-

uiarij

uiarij huius noſtri tripartitionem, ac methodum vide in §§, & capitibus ſingularum ſectionum.

Pro re nata etiam agemus de proportionibus, quantitatibus, dimenſionibus, transformationibus ſuperficierum circa ſolida, præſertim rotunda, atq; etiam vltra elementaria, præter ea, quæ de ijs diximus, præſertim inter aſymptotos, ad 14, 15, 20, 23 propoſ. lib. 6 in 2. To. hu. Ærarij.

Quoniam verò inter vetera Elementa, quæ apud Euclidem, non reponuntur libri 14, & 15, qui ſunt Hypſiclis Alexandrini quędam quaſi appēdix Elementaria, etiam ab alijs aucta (quaſi quidam affectent infinitatem in elementis moroſam, & incommodam Tyronibus) nos vtiliore, vt arbitramur, cōſilio in tertia huius Breuiarij Sectione verſabimur circa ſolida regularia intra fines quidem lib. 13, ſed tamen ita, vt ea, quæ ad vſus, & ad praxes inſcriptionum, dimenſionum, & transformationum pertinent, addamus, & ſemina ſeramus, ex quibus facilè pullulent potiora, quæ ſunt in lib. 14; & quæ videbis indicata in corollarijs citatæ Sectiones 3. Ama ſaltem, Amice Lector, amorem hunc noſtrum viæ compendioſæ, facilis, ac iucundæ, quā ſternere conati ſumus Tyronibus minori cū labore in elementarem, atque etiam vltraelementarem Stereometriam inducendis. Ac tu interim nobis faue, & à nobis, ante noſtrum Breuiarium de ſolidis, accipe ſolidum vale.

BREVIARIVM STEREOMETRIÆ

etiam vltraelementaris,
Speculatiuæ, & Practicæ,

IN QVO

Etiam de ſuperficiebus circa ſolida, præſertim rotunda, ex ortu ipſorum,

Cum vſu, atq; etiam ſine vſu geometrico Centri grauitatis,

Facillimæ, ac breuiſſimæ ſunt demonſtrationes,

A C

In fine Compendium demonſtratorium vniuerſaliſſimum. &c.

IN

Gratiam Chinenſium Philoſophorum.

BREVIARII STEREOMETRICI

Sectio Prima theorica,

Pro lib. 11, & 12 Elem. & ad vltra elementaria;

Ac præterea theoremata de ſuperficiebus, præſertim curuis circa ſolida rotunda.

---

§ I.

Capita Theorematum elementarium, quæ in libris 11, & 12 apud Euclidem ſunt. Methodus, Conſilium, & hypotheſes Authoris in hoc Breuiario Stereometrico, præſertim pro ſolidis rotundis numero infinitis etiam vltra elementa.

Solidorum elementarium in libris 11, & 12 præcipua theoremata verſantur circa proportiones eorum inter ſe partim æqualitatis propter æquales baſes, & altitudines, vel propter reciprocationes baſium, & altitudinum, vel propter lineas proportionales, ſuper quibus excitata ſunt, &c. partim inæqualitatis propter inæquales baſes, vel altitudines, iuxta quas habent inter ſe inæquales proportiones, & ſolidi maioris eſt

pars aliquota minus ſolidum; ſpeciatim verò aliqua ſolida proportionem inæqualitatis habent triplicatam laterum, vel diametrorum De quinque ſolidis verò, quæ in libris 13, 14, 15, ac propriè regularia ſunt, vide in 3 ſectione huiuſce noſtri Breuiarij. Nos igitur Tyronum cognitioni, facilitati, breuitati, vtilitati, iucunditati conſulentes, cenſuimus operæ pretium eſſe (in primis circa ſolida lib. 11, & 12) præcipuas propoſitiones expedire (vt in Epilogo planimetrico fecimus) partim ex ipſorum ſolidorum ortu, partim ex vſu geometricò centri grauitatis, partim in numeris demonſtrare, ac eas, quæ ſunt ſimiles in aliquot quaſi claſſes cogere, ac deniq; (quod in elemētarijs libris non eſt) vſus, & praxes Theorematum de ſolidis (etiam extra elementaria) aliquibus exemplis, & vniuerſalibus regulis prodere.

Ne ſcilicet vel Tyrones, vel prouectiores in Geometrica Philoſophia præcipuam hanc eius partē in hoc noſtro Ærario deſiderent. Circa quam licet breuiter, tam aperte tamen, ac non ſine nouitate verſabimur, vt in poſterū locus nō relinquatur vllus antiquis querimonijs de difficultate, abſtruſitate, ac neglectu potioris huiuſce partis, quæ de ſolidis verè ſolida eſt. Æqui, boniq; faciet, vt ſpero, amica poſteritas noſtrum hunc ſaltem conatum publicæ vtilitatis, cognitionis, & facilitatis in re apud alios prolixiore, ac minus facili.

Suppono in primis cognitionem eorum quæ in tribus hiſce tomis huius Ærarij ſæpius prodidimus circa vſum geometricū centri grauitatis, præſertim in fine lib. 2, & ad propoſ. 14, 15, 20, 23, lib. texti. Suppono etiam definitiones aliquorum ſolidorum (quæ tamen etiam intelligentur hìc in concreto dum figuræ indicantur, & nominantur) quæ eorum ortum produnt, velut gyrationes ſemicirculi, trianguli, rectanguli, ex quibus ſphæra, coni, cylindri generantur, &c. ſimilia ſolida dici, quæ habent circa angulos æquales latera proportionalia, ac etiam homologa, vt de planis ſimilibus in li. 6. &c. Suppono tertio, præter elementaria in lib. 11, & 12, plura alia ſolida, velut quæ apud Archimedē in lib. de ſphær. & cylind. & in conoid. & ſphæroid. ſed in primis infinita numero ſolida, quæ vocant rotunda, & fiunt ex rotationibus pluriformium planorum ſub verſiformibus lineis. Pro quibus vide noſtrum Guldinum (cæteris omni-

omnibus neotericis omiſsis) qui vnicà regula plura format, & demonſtrat, quam omnes alÿ Veterum, & neotericorum non ſolum ſcripto, ſed nec animo conceperunt. In ſequentibus nos aliqua indicabimus, vt Critici vilitatores videant in noſtris elementaribus etiam vltraelementaria.

Prælege tamen ſequens Scholion.

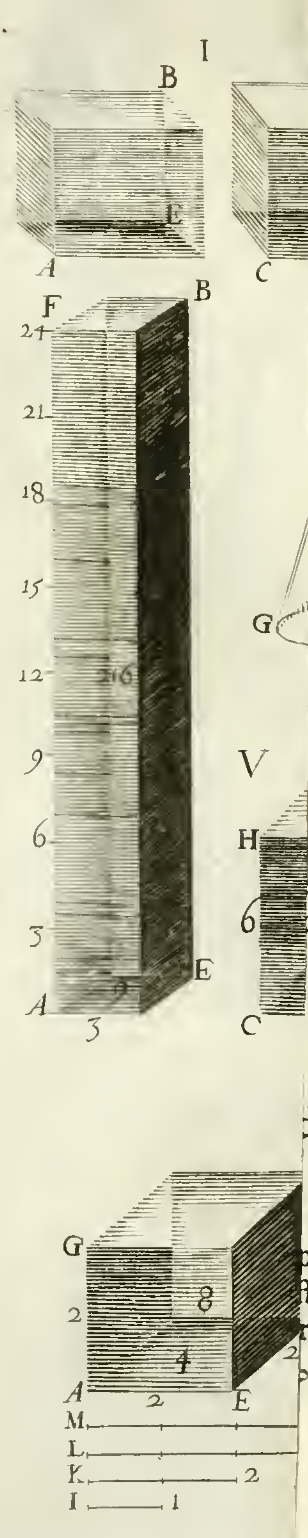
SCHOLION.

Noſtrum compendium pro ſolidorum aliquorum proportionibus, & dimenſionibus facilius etiam, quàm ex vſu geometrico centri grauitatis.

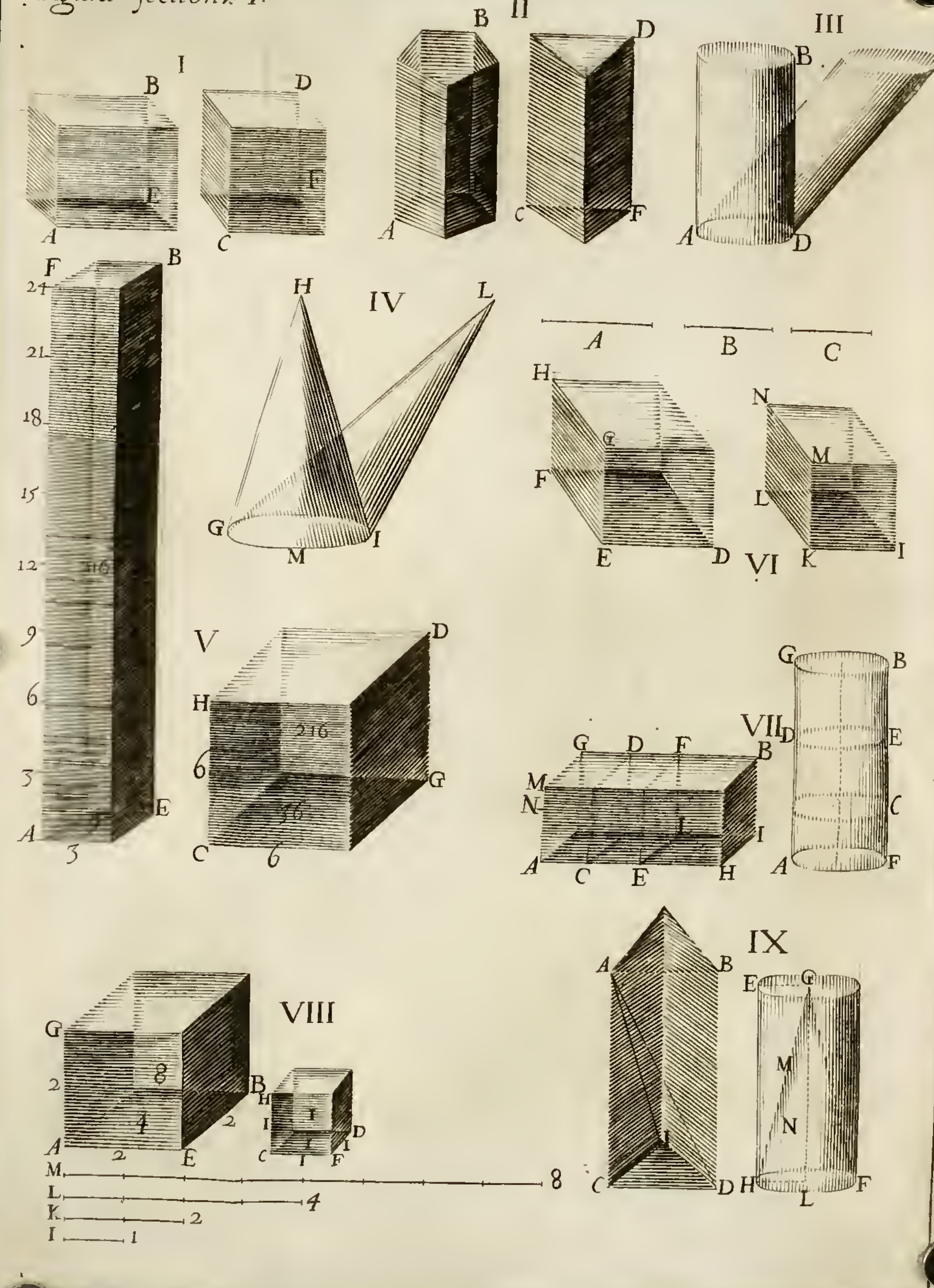
ALiquarum linearum, velut non rectarum, puta ſemicircularis, atq; aliarum mixtarum, planorum item, velut ſemicirculi, atq; aliorum non rectangulorum, centra grauitatis inuenire, præſertim geometricè, opus eſt plenum non mediocris difficultatis, vt patet apud varios Authores, qui in eo genere verſati ſunt. Vide, præ alÿs, libros priores noſtri Guldini; qui in ſolidorum, præſertim rotundorum, proportionibus, ac dimenſionibus vtitur inuento grauitatis centro linearum, vel ſuperficierum, à quarum rotatione ſuperficies, vel ſolida rotunda generantur.

Nos, nunquam ſatis laudato Guldini inuento, atque Authori ſuo permiſſo, vt nulla in re deſimus Tyronum facilitati, aliquando proportiones, & dimenſiones aliquarum ſuperficierum, & ſolidorũ aliquorum venamur, & demonſtratiuè firmamus, etiam ſine cognitione, aut vſu centri grauitatis; ſcilicet earum ſuperficierum, & figurarum planarum, & ſolidarum, præſertim rotundarum, ortu ſpectato, & acceptis ſemidiametris rotationum, non quas centra grauitatis, ſed quas lineæ rotantes faciunt, vt videbis in vtraque ſect. 1, & 2 huius Breuiarÿ Stereometrici. Semidiametri enim rotantes vel aliquas lineas pro ſuperficiebus, vel plana pro ſolidis, ſunt æquemultiplices ſemidiametrorum rotantium centra grauitatis, atque ideo ſunt in eadem proportione, per 15 propoſ. lib. 5. Pro inuentione

Figura' ſectionis I.



Figuræ ſectionis I.



tione etiam quantitatis rotationum à centris grauitatis neceſſariâ apud Guldinum ad dimenſiones, verbi gratia, ſuperficici, & ſoliditatis ſphæræ, nos ommiſsà inueſtigatione operosà centri granitatis, ac ſine eius vſu, per inuentionem quartæ proportionalis totum negotium facillimè expedimus; vt videbis in ſect. 2, vbi ſuperficiem ſphæricam, & ſoliditatem varijs modis non vulgatis exprcmimus. Itaq; noſtris hiſce prædictis compendijs circa elementaria præcipua ſolida, quoties tutò geometricè licet, nos vtimur, vt Tyrones, pro noſtra virili, variâ, facili, nouâ ratione geometricè philoſophãdi ditemus.

§ II.

Theoremata de proportione æqualitatis inter aliqua ſolida elementaria ex æqualibus altitudinibus, & baſibus, facillimis, breuiſſimis, & nouis demonſtrationibus confirmata.

AD hoc caput ſpectant libri 11 propoſitiones 29, 30, 31, de parallelepipedis; lib. 12. corollar. 2 è 7 propoſ. de priſmatibus. &c. lib. 12 item, prop. 11, & corollar. de Conis, & cylindris.

THEOREMA I.

Parallelepipeda æqualium baſium, & altitudinum ſunt æqualia.

IN prima figura parallelepipeda AB, CD ſi ſunt ſuper æqualibus baſibus AE, CF (licet earum altera differat formâ figuræ ab alterâ, velut ſit CF baſis quadra-

ta,

ta, AE ſit alterà parte longior) & in eadẽ altitudine BE, DF, ſunt æqualia, quia, cùm ea parallelepipeda procreentur à baſibus perpendiculariter eleuatis, ſiue ductis in viam perpendicularem, datis ęqualibus baſibus eleuatis, & æqualibus eleuationibus perpendicularibus, parallelepipeda ex æqualibus conflata, etiam ipſa ſunt æqualia.

THEOREMA II.

Priſmata ęqualium baſium, & altitudinum ſunt æqualia.

IN ſecunda figurà priſmata AB, CD, quorum baſes pentagona AE, & triangularis CF ponuntur æquales ſub ęqualibus altitudinibus EB, FD, ſunt æqualia propter eandem cauſam æqualium baſium traductarum in eãdem, ſiue æquales altitudines perpendiculares, è quibus componuntur.

THEOREMA III.

Cylindri etiam obliqui æqualium baſium, & altitudinum ſunt æquales.

IN tertià figurà cylindri AB, AC ſuper æqualibus, atq; adeo ſuper eàdem baſi AD, & in eadem altitudine perpendiculari DB conſtituti, non ſolum recti, ſed etiam obliqui, vel alter rectus AB, alter obliquus AC, ſunt æquales, quia conflantur ex eleuatione æqualium, ſiue eiuſdem baſis circularis AD in eandem viam perpendicularem DB, quæ eſt recta, & certa menſura altitudinis etiam obliqui cylindri AC, quemadmodum dictum eſt in lib. 1. de parallelogrammis, ſiue triangulis obliquis inter eaſdem parallelas vnà cum non obliquis.

Si

Si fingas rectum cylindrum AB quaſi conflatum è pluribus planis circularibus, ea plana in latus obliquata ſub lateribus obliquis ad quantitatem diametri baſis AD, ac ſub eadem altitudine, producunt obliquum cylindrum AC, qui, cùm ex iiſdem numero, & quantitate conſtet, ex quibus cylindrus AB, eidem eſt æqualis.

Sin autem cylindri ſuper æqualibus baſibus, & in eadem altitudine ſint recti; quoniam fiunt, iuxta definit. 2, lib. 11, ab æqualibus parallelogrammis circulariter gyratis, æqualibus etiam exiſtentibus gyrationibus, &c. ideo ſunt æquales; iuxta etiam dicta à nobis in fine lib. 3, & in lib. 6 ad propoſ. 14, 15, 20, 23. &c.

THEOREMA IV.

Coni æqualium baſium, & altitudinum ſunt æquales.

IN quarta figura coni GHIL ſuper eadem (vel æqualibus) baſi GI, & ſub eadem perpendiculari altitudine HM, ſunt æquales, propter rationes ſimiles earum, quas attulimus de cylindris. Ac ſi vterq; conus ſit rectus, conflatur à ductu triangulorum rectangulorum æqualium in vias æquales centri grauitatis, quibus vijs reſpondent æquales baſes conorum, &c. iuxta dicta in fine cit. lib. 3. & in cit. propoſ. ad lib. 6.

COROLLARIVM I.

De parallelepipedis, & priſmatibus obliquis.

QVemadmodum cylindri, & coni, modò ſint ſuper æqualibus baſibus, etiam ſi ſint (ſaltem eorum alterum) obliqui, ſint tamen inter eadem plana, vel lineas

lineas parallelas, hoc eſt ſint eiuſdem altitudinis, ſunt æquales; ſic etiam (extra elemẽta) paribus conditionibus parallelepipeda, & priſmata prædita, licet obliqua, & ipſa ſunt inter ſe æqualia.

COROLLARIVM II.

De pyramidibus æqualibus rectis, & obliquis &c.

ETiam extra elementa, æqualium baſium, & altitudinum pyramides, ſiue rectæ, ſiue obliquæ ſunt æquales. Vide, ſis, figuram 3 ſect. 2.

COROLLARIVM III.

De parallelepipedis, priſmatibus, cylindris, pyramidibus, conis etiam mixtim æqualibus.

NOn ſolum, vt in elementis, ſolida eiuſdem ſpeciei, ſed & diuerſæ, ſuper æqualibus baſibus, & altitudinum æqualium, ſunt æqualia; parallelipipedum & priſma, priſma & cylindus, &c. pyramis & conus, &c. Vide, ſis, figuras 1, 2, 3 ſectionis 2.

§ III.

Theoremata de proportione æqualitatis inter aliqua ſolida elemētaria vel propter reciprocationes baſium, & altitudinum, vel propter lineas proportionales. Item de proportionalibus ſuper lin. proport. &c. facil. breu. nou. mod. demonſtrata.

AD hoc caput pertinent propoſitio 34 lib. 11. & lib. 12 propoſ. 15. & propoſ. 36, & 37. lib 11.

THEOREMA V.

Parallelepipeda, quorum baſes, & altitudines reciprocantur, ſunt æqualia.

IN quinta figura ſint parallelepipeda AB, CD, quod ad ſoliditatem æqualia, circa quæ breuitatis, & facilitatis gratia verſabimur, & oſtenſionem faciemus, & exemplum ponemus pro Tyronibus in numeris. Sint ergo pares ſoliditates 216 procreatę in altero AB ex ductu baſis AE 9 (cuius latus quadratum 3) in altitudinem AF 24; in altero CD ex ductu baſis CG 36 (cuius latus quadratum 6) in altitudinem CH 6. Fit enim idem productum 216 tam ex multiplicatione numeri 24 per 9, quā ex multiplicatione numeri 36 per 6. Vides eſſe, vt baſis 9 ad baſim 36, ſic reciprocè altitudinem 6 ad altitudinem 24, ſcilicet quadruplam proportionem.

Conuerſam propoſitionem tu facito, mi Tyro, in appoſitis à nobis numeris. Quare æqualium parallelepipedorū reci-

reciprocantur baſes, & altitudines, & quorum. &c. reciprocantur, &c. ſunt æqualia.

SCHOLION.

Etiam inæqualium cylindrorum, & conorum reciprocationes diametrorum in baſibus, & ſoliditatum cum altitudinibus.

Euiſe apud nos in 1 parte huius 2 tomi ad propoſitionem 14 lib. 6 Elem. § 6, & ad propoſ. 15 § 3, vbi habes non paſsim vulgata, & ad vſus iucundos traducta quaſi paradoxa circa reciprocationes in cylindris, & conis facilè, & breuiter ex vſu geometrico centri grauitatis demonſtrata; & caue confundas baſes cum diametris baſium. Nos enim ad cit. prop. 14, 15 loquimur de reciprocatione diametrorũ (non baſium, & ſoliditatum) cum altitudinibus. Ac præterea nota conditiones eorum cylindrorum apud nos, ſcilicet, vt ſint ſub iſoperimetris ſuperficiebus, ſine baſibus, ex æqualibus inæqualium laterum rectangulis; coni pariter ex æqualibus triangulis inæqualium laterum. &c.

THEOREMA VI.

Cylindri, & Coni, quorum baſes, & altitudines reciprocantur, ſunt æquales.

IN eadem quinta figura per eandem oſtenſionem numerariam patet etiam æqualium cylindrorum reciprocari baſes, & altitudines; ſi fingas duorum cylindrorum baſes circulares eſſe 9, & 36, altitudines 24, & 6; fiunt enim cylindricæ ſoliditates etiam ex ductu baſis circularis in perpendicularem altitudinem. &c.

Applica cætera proportionaliter etiã parallelepipedis.

SCHOLION.

De conis videbis inferius vbi didiceris conos eſſe tertias partes ſuorum cylindrorum.

THEOREMA VII.

Parallelepipedum ex tribus lineis proportionalibus, eſt æquale parallelepipedo ex media, &c. iuxta pr, 36, li. 11.

VT appareat ſolidum parallelepipedum ex tribus lineis proportionalibus conflatum eſſe æquale cubo ex media (facilitatis gratia exemplum pono in parallelipip. rectangulis) accipe tres numeros proportionales hos in dupla: 2, 4, 8; fiat numerus planus 8 ex ductu ipſius 2 in 4: Fiat ſolidus 64 ex ductu plani 8 in tertium proportionalem 8, quaſi in altitudinem, ſeu viam perpendicularem centri grauitatis in moto plano. Rurſus ex medio numero 4 fiat planus quadratus 16, & è 16 in ſe fiat cubus, qui erit 64, idem cum numero ſolido 64 ex tribus proportionalibus 2, 4, 8.

SCHOLION.

Aliter etiam geometricè, quàm apud Euclidē.

SEd accipe etiam aliter, ac geometricè à nobis ex vſu centri grauitatis, & conſonè demonſtrationi apud Euclidem. Inſpice hic figuram 6, ex Euclidis propoſ. 36. lib. 11. vtcunque translatam. Poſitâ eius propoſitionis conſtructione, patet eius veritas etiam facilius apud nos in modum ſequentem. Quoniam enim EF ponitur (quidquid ſit in figurâ, circa quam abſtractè philoſo-

pha-

phamur) æqualis mediæ B, & ex eadem B conſtatum eſt parallelepipedum IN, erunt æquales viæ perpendiculares vel ipſæ, vel pro ipſis EF, KL. Item quoniam eſt vt DE ad IK, ita KM ad EG (finge in figura correctà minorem EG) ergo erunt æqualia parallelogrammata DG, IM, per 14 ſexti, quorum latera circa angulos ex constructione æquales reciprocantur. Producuntur verò parallelepipeda DH, IN ex parallelogrammis DG, IM ductis in vias EF, KL. Quare cum & viæ perpendiculares EF, KL à centris grauitatis motorum planorum DG, IM, & mota ipſa plana DG, IM ſint æqualia, erunt & parallelepipeda producta ex æqualibus producẽtibus æqualia. Vide, & confer demonſtrationem apud Euclidem, quam inuenies geminam cum hac noſtra ex vſu geometrico centri grauitatis, vt pateat quàm certa hæc centri via geometrica ſit.

THEOREMA VIII.

Solida ex quatuor lineis proportionalibus ſimilia, ſimiliterq; deſcripta, ſunt proportionalia.

EX antedictis, quaſi corollarij loco, patet veritas prop. 37 li. 11 de quatuor lineis proportionalibus, à quibus ſimilia, ſimiliterq; poſita parallelepipeda ſunt & ipſa proportionalia. Nam poſitis (pro quatuor proportionalibus numeris, quorum bini ſint in eadem proportione) tribus ijſdem proportionalibus 2, 4, 8; ex primo numero 2 in ſe fit planus 4, ex plano 4 in altitudinem 2 fit ſolidum parallelepipedum rectangulum 8: ſecundo numero 4 ducto in ſe, fit planus 16, ex plano 16 in altitudinem 4 fit ſolidũ parallelep. &c. 64.

Ponatur idem 4, qui eſt ſecundus proportionalium, pro tertio, & ſit geminatum ſolidum 64. è quarto 8 in ſe ducto fit planus 64, ex plano 64 ducto in altitudinem 8 fit ſolidum 512. Confer ſolida inter ſe 8, 64, 64, 512 è proportionalibus numeris, quaſi ſuper lineis, producta, & videbis

quemadmodum radices, ſiue rectæ 2, 4; 4, 8 ſunt in proportione duplà, ſic 8, 64; 64, 512 eſſe proportionalia inter ſe in proportione octupla.

Ex hìc dictis in hoc exemplo deduc, & applica tu alia, mi Tyro, dum nos tuæ facilitati conſulimus, & nitimur aliquid noui vel modi, vel rei proferre circa vetera.

SCHOLION.

Regula noſtra vniuerſalis (pro particularibus apud Euclidem de ſolidis eiuſdem ſpeciei) de ſolidis etiam diuerſæ ſpeciei æqualibus, quorum baſes, & altitudines reciprocantur. & conuerſim.

QVæ apud Euclidem alligata ſunt ſolidis eiuſdem ſpeciei, velut parallelipipedis inter ſe, cylindris, &c. inter ſe cõparatis, ac æqualibus, quorum baſes, & altitudines reciprocantur, abſolui poſſunt, ac traduci etiam ad ſolida diuerſæ ſpeciei, modò ſint æqualium altitudinum, & baſium, velut ſi duorum priſmatum æqualium, & habentium baſes, & altitudines reciprocas, alterum transferatur in æquale parallelepipedum; priſma, & parallelepipedum, licet figuræ ſint ſpecie diuerſæ, quia tamen ſunt æqualia, reciprocantur baſibus, & altitudinibus, & conuerſim priſma, & parallelepipedũ, quorum baſes, & altitudines reciprocantur, ſunt æqualia. Quod patet in numeris, & figurà 5 ſec. 1. nam parallelepipedo CD tranſlato in æquale priſma, ſcilicet æqualiũ baſis, & altitudinis, quoniam ijdẽ numeri ſunt 6 altitudinis, & 36 baſis, reciprocantur eodem modo cum longiore parallelepipedo AB, & ſumma eadem 216 erit vtriuſq;

CO-

COROLLARIVM.

Si fuerit reciprocè vt planum ad planum, ita linea ad lineam, ſolidum ex medijs plano, & lineà, eſt æquale ſolido ex extremis plano, & linea.

PRo corollario deducitur ex anteced. Schol. ac vniuerſaliſſimum eſt (vt & regula in antec. ſchol.) etiam de ſolidis diuerſæ ſpeciei excitatis, & conflatis ex proportionalibus planis, & lineis. Ad praxim vide § 5 ad propoſ. 20. lib. 6, in 2. To. Aerarij. In figura 5. ſec. 1. & in longiore, & depreſſiore parallelipipedis, eſt vt planum, ſiue baſis AE ad baſim CG, ita linea, ſeu latus, & altitudo HC ad lineam EB; & ſub medijs quattuor quantitatum proportionalium, ideſt ſub plano, ſeu baſi CG, & ſub linea, ſiue altitudine CH ſolidum eſt æquale ſolido ſub extremis plano AE, & linea EB. In numeris etiam res patet. Experire.

---

§ IV.

Theoremata de proportione inæqualitatis inter aliqua ſolida elementaria ex inęqualibus vel baſibus, vel altitudinibus, facil. breu. nou. modis demonſtrata.

AD hoc caput ſpectant libri 11 propoſitiones 32 de parallelepipedis, lib. 12 propoſ. 5, & 6 de pyramidibus; ſchol. ad prop. 7 de priſmates; prop. 11 de Conis, & Cylindris, & lib. 11, prop. 25. lib. 12 prop. 13; & 14.

Vni-

Vniuerſali regulà Theorema IX, & aliqua alia ſoluta.

Parallelepipeda, priſmata, cylindri æqualium altitudinum ſunt inter ſe vt baſes.

VNica vniuerſali regulà, & demõſtratione poſſunt expediri propoſita ſolida ab eorum ortu, & procreatione. Cùm enim, vt ſæpius prædictum eſt, & parallelepipeda, & priſmata, & cylindri conflentur ex baſibus ductis in altitudines perpendiculares, quemadmodum, ſi ſint æquales baſes, & æquales altitudines, conſtituunt æqualia ea ſolida, ſic ſi habeant proportionem alicuius inæqualitatis, ea neceſſe eſt proueniat vel ab inæqualibus baſibus, ſimul, & altitudinibus, vel ſi æquales ponantur altitudines (vt citatæ propoſitiones ponunt) reliqua inæqualitas erit in baſibus; ac proinde habebunt inter ſe in èadem altitudine proportionem baſium æqualem æqualium, inæqualem inæqualium.

SCHOLION I.

De proportione baſium in conis, & pyramidibus eiuſdem altitudinis vide in fine ſeq. § 5, *Schol.* 2. *vbi poſt proportiones conorum, & pyramidum ad ſuos cylindros, & priſmata, conſtabit demonſtratio ad* § 4 *hunc ſpectans.*

THEOREMA X.

Parallelepipedi ſecti parallel*os*, &c. ſegmenta ſunt inter ſe vt baſes.

QVod pertinet ſpeciatim ad proopoſ. 25 lib. 11, in figurà 7, ſecto parallelepipedo AB à plano parallelo planis GA, BH, quoniam tria ſunt partialia

tialia parallelepipeda eiuſdem altitudinis, ergo eorum differentia erit in baſium proportionibus, iuxta prædicta in regula vniuerſali, th.9. hu.§ 4.

THEOREMA XI, & XII.

Cylindri ſecti parallelis baſibus ſegmenta ſunt inter ſe, vt axes. & –

– Coni, & cylindri æqualium baſium ſunt inter ſe vt altitudines.

PAriter pro propoſ. 13, & 14 lib. 12 (in fig. eadem 7) ſecto cylindro AB, quoniam partiales cylindri habent æquales baſes, ergo, ſi ſit inter eos aliqua inæqualitas, erit in axibus, ſiue altitudinibus; habebuntque proportionem inter ſe iuxta axium, vel altitudinum quantitates.

THEOREMA XIII.

Parallelepipeda ſuper æqualibus baſibus, ſunt inter ſe vt altitudines.

SCilicet in modum ſimilem ſectorum cilindrorum. Si in fig. 7. erigas parallelepipedũ AB, vt baſis ſit AG, partialia AD, DE, EB quoniam ſunt ſuper æqualibus baſibus, non different niſi iuxta altitudines ſecti lateris vtriuslibet GB, AH, quæ ſunt eadem cum lateribus ſectæ baſis AI.

Quod attinet ad pyramides, ſeorſim videbis de ijs in ſeq. § 5.

SCHO-

SCHOLION II.

De cylindris, & conis etiam inæqualium altitudinum habentibus inter ſe proportionem vt baſium diametri.

Vide apud nos eam proportionem vagantem extra regulas apud Euclidem, & facilè demonſtratam ex centro grauitatis ad propoſ. 14 lib. 6, § 5. & ad propoſ. 15, § 3; cum cautionibus tamen, & diſtinctionibus, quas indicauimus in Scholio, quod eſt in hac 1 ſect. poſt theor. 5. In cit. ad 14, & 15 propoſ. lib. 6 habes etiam ad vſum ibi iucunda. Itaq; non ſolũ æqualium, ſed etiam apud nos inæqualium altitudinum cylindrorum, & conorum proportiones ſpectantur non tam ex baſibus, quam è baſium diametris, vel ſemidiametris, vel peripherijs.

SCHOLION III.

Vide Schol. 3 poſt § 11 Epilogi planimetrici, vbi exemplum luculentum modi vniuerſaliſsimi demonſtrandi in numeris de omni quantitate. Quod huc facit, & ex eo demonſtrantur in numeris quæ hic de ſolidis in anteced. §. 4.

---

§ V.

Theoremata de proportionibus à nobis facillimè ac breuiſſimè demonſtratis Cylindri ad Conum, Priſmatis ad Pyramidem, Conorum, & Pyramidum inter ſe, &c.

AD hoc caput pertinent lib. 12 propoſ. 5, 6, 7, 10 de Cylindris, Conis, Priſmatis, Pyramidibus.

Theo-

THEOREMA XIV.

Conus eſt tertia pars ſui Cylindri.

Conum eſſe tertiam partem cylindri eandem cum ipſo baſim habentis, & altitudinem æqualem; habes breuiter, & apertè demonſtratum ex vſu geometrico centri grauitatis ad prop. 23. li. 6, § 18, & 19.

CHOLION.

Quoniam ex citatis in antec. probl. 14 iam didiciſti con[illegible] eſſe tertiam partem ſui cylindri, ideo quæ in § 3 dictæ ſunt de toto, ideſt de cylindro circa reciprocationes baſium, & altitudinum, valent etiam de cylindrorum partibus æqualibus, & eorum ſubtriplis, ſcilicet de conis.

THEOREMA XV.

Pyramis eſt tertia pars ſui priſmatis.

Quemadmodum conus eſt tertia pars ſui cylindri, ſic pyramis eſt tertia pars priſmatis eandem baſim, & altitudinem cum pyramide habentis.

Cuius theorematis breuiſſimam, & facillimam accipe hìc à nobis demonſtrationem. Inſpice figuram nonam, & in priſmate CB eductis IA, DA finge pyramidem ACID. Finge etiam ipſi priſmati CB factum æqualem cylindrum EF, baſibus æqualibus triangulari CID, circulari HLF, & eleuatis perpendiculariter ad æquales altitudines CA, HE. Ex HF eductis in G extremum axis, rectis HG, FG, finge conum HGFL. Quoniam igitur æqualibus baſibus triãgulari CID, & circulari HLF æqualibus ad æquales altitu-

dines perpendiculares AC, EH eleuatis, æqualia inter ſe ſunt pyramis ACID; & conus HGFL; &, per demonſtrata à nobis facillimè, ac breuiter ex vſu geometrico centri grauitatis in § 19 ad 23 prop. lib. 6, conus HGFL eſt tertia pars cylindri EF, erit & pyramis ACID tertia pars cylindri eiuſdem EF; at per conſtructionem, cylindrus EF eſt æqualis priſmati CB, ergo & priſmatis eiuſdem CB erit tertia pars èadem pyramis ACID. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLION,

ac Theoremata.

Coni, & Pyramides eiuſdem altitudinis, ſunt inter ſe vt baſes.

QVæ dicta ſunt de proportionibus priſmatum, valent etiam de eorũ partibus ſubtriplis, ideſt de pyramidibus, quæ & ipſæ ſub eadem altitudine habent inter ſe proportionem baſium. &c. Quæ enim toti, ideſt priſmati accidunt, etiam partibus eius ſubtriplis. Velut Clauius in Schol. ad propoſ. 34 lib. 11 oſtendit conuenire priſmatis dimidijs parallelepipedorum ea, quæ demonſtrata ſunt de parallelepipedis in propoſ. 29, 30, 31, 32, 33, 34, lib. 11.

Sic & de conis, quos in noſtris ad prop. 23 lib. 6 demonſtratiue didiciſti eſſe tertiam partem ſuorum cylindrorum. Itaq; ſicut priſmatum partes tertiæ eiuſdem altitudinis, & cylindrorum partes tertiæ eiuſdem altitudinis ſunt inter ſe vt baſes, ſic pyramides, & coni eiuſdem altitudinis (ideſt quorum baſes eleuatæ in tertiam partem altitudinis ſuorum priſmatum, & cylindrorum, conficiunt partes tertias priſmatum, & cylindrorum) ſunt inter ſe vt baſes.

§VI.

Regulæ apud nos vniuerſales, breues, ac faciles, pro peculiaribus, quæ apud Euclidem ſunt circa triplicatas proportiones &c. ſolidorum ſimilium.

AD hoc caput pertinent lib. 11 propoſitio 33 de parallelepipedis, & Schol. ad 34 de priſmatis; lib. 12 prop. 8 de pyramidibus, prop. 12 de conis & cylindris; prop. 18 de ſphæris. De quibus ſolidis, & in quibus propoſitionibus demoſtrãtur proportiones triplicatæ homologorum laterum in ſimilibus ſolidis, & diametrorũ in ſphæris.

Quod pertinet ad ſolida ſimilia ſub planis, &c. ex noſtro modo geometrico procedente ab ortu eorum ſolidorum, quæ ſcilicet conflantur ex ductu plani in perpendicularem altitudinem deſignatam à planis eleuatis, poſſunt vnicà regula demonſtrari triplicatę proportiones laterum homologorum. Nam ſolida ſimilia, ſunt, quæ, iuxta defin. 9. lib. 11, ſimilibus planis continentur. &c. & ſimilia plana ſunt, iuxta defin. 1. lib. 6, quæ habent latera proportionalia circa æquales angulos, & iuxta theor. 17, vbi aliter demonſtratur 20 prop. li. 6 in Epilogo planimetrico noſtro, baſes ſimiles ſolidorum habent proportionem & laterum motorum, & viarum, per quas mouentur, ideſt duplicatã (vide cit. theor. 17) ſiue, iuxta vulgata, per 20 propoſ. li 6, ſimilia plana habent duplicatam proportionem laterum homologorum. Addità tertià proportione eiuſdem generis, quam habent inter ſe ſimilium ſolidorum homologæ altitudines, conficitur proportio in eodem genere triplicata laterum homologorum, quam inter ſe habent ſolida parallelepipeda, priſmata, pyramides; &c.

Hæc èadem regula poſſet etiam traduci ad ſolida, quæ

non ſunt ſub planis ſuperficiebus, ſed ſub curuis, qualia ſunt ſolida rotunda cylindri, coni, ſphæræ &c. quandoquidem ea reſoluuntur (vt habes in fine libri 2 elem.) in ſolida parallelepipeda; ſed tamen nos hìc aliam pro rotundis regulam facillimam de eorũ triplicata proportione in ſemidiametris prodemus exemplis aliquibus mox inferius.

Interim accipe exempla; ac primo loco de parallelepipedis eſto ſequens --

--*THEOREMA XVI.*

Solida parallelepipeda ſimilia ſunt in triplicata proportione laterum homologorum.

FAcilitatis gratia in 8 figura, & in exemplo duorum cuborum, quoniam proportio planorum quadratorum AB, CD eſt (ex theor. 17 Epilog. planim) ex duplicatà motorum, & motionum, ideſt laterum AE, CF (quæ ſunt in proportione dupla) & in ſimilibus illis ſolidis latera, ſiue altitudines GA, CH homologæ, ac ſimiles in parallelogrammis GE, HF ſunt & ipſæ in dupla (non duplicata) proportione, ergo proportioni duplæ, ac duplicatę planorum AB, CD addita proportio tertia item dupla (non duplicata) altitudinum AG, CH, conficit in genere proportionis duplæ proportionem triplicatam ipſorum ſolidorum inter ſe, hoc eſt ſolidum GB ad ſolidum HD habet proportionem octuplam. Expono ſic: in minori ſolido ex latere 1 quadrati fit planum quadratum CD 1; in maiore ſolido ex latere 2 quadrati fit planum quadratum AB 4. in minore altitudo CH eſt 1, in maiore altitudo AG eſt 2. Proportionis duplicatæ laterum, ſiue ipſorum planorum AB, CD eſt numerus 4, altitudinum eſt 2. Diſponantur numeri earum proportionum duplarum ſic: 1, 2, 4: ſunt in duplicata ipſius 1 ad 2, ideſt ad 4. Triplicetur èadem

dem proportiò, & fiat 1, 2, 4, 8, vides eſſe 1 ad 8 in octupla proportione, ſcilicet triplicatæ proportionis duplæ.

Vel, quaſi eſſet proportio compoſita, denominatores proportionis planorum, & altitudinum, ſcilicet 4, & 2 inter ſe multiplicentur, iuxta defin. 5 lib. 6, & producetur 8 denominator proportionis ſolidi GE ad ſolidum HF.

SCHOLION.

Etiam quando ſolida parallelepipeda non ſunt cubi, modo ſint ſimilia, licet habeant altitudines non æquales lateribus baſium, tamen etiam altitudines ſunt in eadem proportione, in qua ſunt vtrumlibet latus baſis ad homologum latus alterius baſis; ſunt enim etiam altitudines homologæ, hoc eſt ſimilis, ac eiuſdem rationis, ſeu proportionis antecedentes, cuius ſunt circa æquales angulos conſequentia duo alia latera. Velut in figura 6 ſi concipias parallelepipeda ſimilia non cubica HD, NI, ſi altitudo GE eſt ad ED vt altitudo MK ad KI circa ſuppoſitos æquales angulos E, K, ergo, permutando, vt GE altitudo ad altitudinem MK, ſic ED ad KI. ſi ergo duplicatis proportionibus ipſarum ED, KI addatur proportio ipſarum GE, MK, fit additio proportionis eiuſdem generis, in qua ſunt ED, ad KI vt EG ad KM, ac proinde addita proportio altitudinum duplicatæ proportioni (ſic vocemus) latitudinum ED, KI conficit triplicatam in eodem genere.

Tanti refert intelligere quid ſit in 4 prop. lib. 6 æquiangulorum triangulorum latera proportionalia eſſe etiam homologa lateribus alterius trianguli &c. & ſcire non ſuperficialiter quænam ſint in 1 defin. lib. 6 ſuperficies, ſiue figuræ planæ ſimiles.

Theo-

THEOREMA XVII.

Priſmata ſimilia ſunt in triplicata proportione laterum homologorum.

HOc theorema, de quo nihil apud ipſum Euclidem, expedio quaſi per modum corollarij. Inſpice figuram 6, & finge parallelepipeda HD,NI, eſſe ſimilia, iuxta def 9 li. 11. ſi fingas vtrumq; ſecari per oppoſitos angulos H, D, F, & N, I, L, diuidentur in æqualia, & inter ſe ſimilia priſmata, verbi gr. priſma triangulare è ſectione per H,D,F, erit ſimile priſmati triãgulari facto è ſectione per N,I, L, & cum habeant latera GE, ED homologa lateribus MK, KI, ſcilicet èadem, quæ ſimilium parallelepipedorum, habebunt & ipſa priſmata eorumdem homologorum laterum triplicatam proportionem inter ſe. Nam per 15 propoſ. lib. 5 *partes cum pariter multiplicibus eamdem habent proportionem*. Vt ergo tota duplicia, ideſt parallelepipeda, ſic dimidia, ideſt priſmata ſimilia inter ſe, &c.

THEOREMA XVIII.

Similes pyramides ſunt inter ſe in triplicata proportione laterum homologorum.

NOn ſolum quæ triangulares habent baſes, vt limitantur apud Euclidem, pyramides ſed & quæ polygonas. Ac ſine pluribus, quæ ſunt in demonſtratione apud Euclidẽ, nos hoc Theorema ceu corollarium deducimus ex antecedenti. Inſpice figuras 2, & 9, & finge priſmata triangularia CFD,& ABD eſſe ſimilia,& quẽadmodum ſuper baſi CDI excitata eſt pyramis CDIA, ſic excitatam alterã imaginariam ſuper baſi CF, &c. alterius priſma-

priſmatis ad vſque D. Quoniam,per theorema 15 à nobis demonſtratum in § 5 antec. pyramis eſt tertia pars ſui priſmatis, ſuntq; eadem latera homologa DF, FC, & AC, CD pyramidum quæ & priſmatum ſimilium, erunt & ſimiles pyramides inter ſe ex eadem homologorum laterum triplicata proportione, in qua ſunt & priſmata, ſcilicet partes cum ſuis æquè multiplicibus, vt in antec. Theor. 17.

THEOREMA XIX.

Cylindri ſimiles habent inter ſe triplicatam proportionem ſemidiametrorum (ſiue diametrorum) in baſibus, ex eorum ortu, &c.

INſpice figuras 7, & 9, & ſint inæquales, ſimiles tamen, cylindri AB, EF. Quoniam generantur ex gyratione circulari rectanguli, ergo habent inter ſe proportionem ſuorum genitorum, ſiue partium eos conflantium, nẽpe rectangulorũ EL, & dimidij GF, &c. in fig. 7. ac præterea habent proportionem circularium gyrationum HLF, GB. At rectangula habent, ex 20 lib. 6, duplicatam proportionem laterum homologorum, qualia ſunt ſemidiametri HL, & dimidium ipſius AF; gyrationes etiam circulares, ſeu peripheriæ habent proportionem earumdem ſemidiametrorum, per lemma § 19 Epilogi planimetrici; ergo addita proportio gyrationum duplicatæ proportioni rectangulorum in ijſdem ſemidiametris, conficit triplicatam earum ſemidiametrorum proportionem.

Aliter.

IVxta § 19, & in eo lemma, & theorema in Epilogo noſtro planimetrico, baſes circulares GB, HF habẽt proportionem bis ſemidiametrorum, ideſt duplicatam; & baſes motæ perpendiculariter producunt cylindros; habent

ergo

ergo & tertiam, ſiue triplicatam proportionem, addita tertia, quæ eſt altitudinum homologarum, ad quas eleuantur baſes in ſimilibus cylindris.

THEOREMA XX.

Coni ſimiles habent inter ſe triplicatam proportionem ſemidiametrorum (ſiue diametrorũ) in baſibus. Ex eorum ortu.

SCilicet proportionem triangulorum, è quorum gyrationibus circularibus oriuntur, & proportionem ipſarum gyrationum; quæ proportiones ſunt in ſemidiametris, vt dictum eſt in Theoremate antecedenti. Vide fig. *9*. & memento, ex 1*9* lib. *6*, triangula ſimilia, velut GLH, & alterum imaginatum habere inter ſe proportionem duplicatam baſium, qualis HL; & gyrationes, qualis HLF Coni GHLF cum altera imaginati ſimilis coni, habent etiam ipſæ proportionem earumdem ſemidiametrorum, per lemma in § 1*9* cit. Epilogi planimetrici; ergo triplicatam ſemidiametrorum. &c.

Aliter.

QVoniam coni ſunt tertia pars ſuorum cylindrorum, per demõſtrata à nobis ex centro grauitatis ad propoſ. 23 lib. *6*; & ſimiles cylindri, per theor. 1*9* antec. habent inter ſe triplicatam proportionem ſemidiametrorum in baſibus, ergo & tertiæ partes habentes eaſdem ſemidiametros (ideſt coni ſuper iiſdem baſibus ſimilium cylindrorum) habent & ipſæ triplicatam proportionem earumdem ſemidiametrorum; confirmante prædicta propoſ. 15 lib. 5.

SCHO-

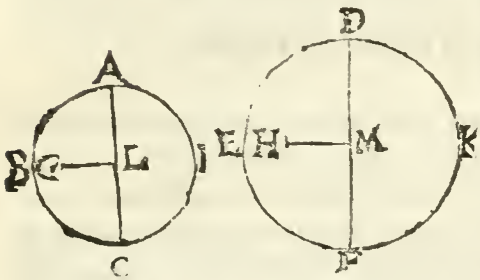
SCHOLION.

Proportiones inter conum, & cylindrum.

R*Euiſe pro proportionibus conorum, & cylindrorum inter ſe, § 5, & 6 ad 14 propoſ. lib. 6, & § 3 ad propoſ. 15 eiuſdem lib. 6.*

THEOREMA XXI.

Sphæræ habent inter ſe triplicatam proportionem ſemidiametrorum (ſiue diametrorum) ex earum ortu, etiam ſine vſu geometrico centri grauitatis, &c.



LIcet in § 18 ad 20 lib. 6. hoc theorema cōfirmauerimus ex vſu geometrico cētri grauitatis; tamen hìc aliter ex parte, ideſt etiā ſine vſu centri grauitatis, idem expediemus ab ortu Sphærarum. Habent igitur Sphæræ ABCI, DEFK inter ſe proportionem triplicatam ſemidiametrorum, quas finge MH, LG productas vltra puncta centrorum grauitatis G, H in ſemicirculis ACB, DFE, vſq; ad peripherias in B, & E. In demonſtratione citata § 18 ad 20 lib. 6 quæ diximus de proportione ipſarum LG, MH concluſimus quaſi de ſemidiametris Sphærarum; ac lineæ totæ BL, EM ſunt æquemultiplices partiū GL, HM, & partium, & æquemultiplicium eædem ſunt proportiones, per 15 lib. 5. Igitur quoniam fiunt ſpheræ

(iuxta defin. 14. lib. 11) à ſemicirculo circulariter gyrato, habebunt proportionem, & ſemicirculorum, & gyrationum. At ſemicirculi ACB, DFE (ſicut & circuli in § 19 Epilog. planimet.) iuxta § 10 ad 20 li. 6, habent inter ſe duplicatam proportionem ſemidiametrorum LB, ME: gyrationes verò circulares earumdem ſemidiametrorum LB, ME, (ſiue à punctis B, E ſignatæ peripheriæ circulares) habent inter ſe proportionem ſemidiametrorum BL, EM, iuxta lemma in § 19 Epilog. planim. ergo ſpheræ habent & duplicatam proportionem inter ſe in ſemidiametris BL, EM à ſemicirculis, & tertiam in ijſdem BL, EM à peripherijs, hoc eſt triplicatam in ijſdem, ſiue earumdem ſemidiametrorum, &c.

SCHOLION I.

Quanti momenti ſit, præſertim in ſphæris, proportio inuenta è ſemidiametris, vel diametris, ſine vſu centri grauitatis.

SI vtaris inuẽtione centri grauitatis ad cognoſcendam proportionem inter Spheras, non poteris geometricè præcisè eam habere. Ratio eſt, quia, iuxta Guldini geometricum inuentum lib. 1. cap. 9, num. 4, non poteſt haberi in Semicirculo punctum centri grauitatis pro ſpheræ ſoliditate, & proportione inuenienda, niſi prius inueneris centrum grauitatis ſemiperipheriæ. At ex eodẽ Guldino lib. 1 cap. 6 propoſ. 1, punctum centri grauitatis eſt extremum lineæ quadratricis in ſemidiametro, quod punctum quadratricis geometricè haberi non poteſt, cum quadratrix ſit aſymptotos in ſui extremmo cum ſemidiametro; igitur, à primo ad vltimum, non poteſt haberi præciſa geometrica inuentio centri grauitatis in ſemicirculo, vnde penaet inuentio ſoliditatis, & proportio ſpheræ ad alteram. Relege § 15 noſtrum ad 9 propoſ. lib. 6 in To. 2 huius Ærarij. Dum igitur nos in proportionibus inter ſphæras vtimur proportione gyrationum factarum, non à centro grauitatis incerto

geo-

geometricè in ſemidiametro, ſed abſolutè à gyratione facta ab extremo ſemidiametri, ſiue ipſius ſemidiametri, modum apertè tradimus, qui ad praxim faciliimè redigi poteſt, quoniam aperta eſt, ac facilis cognitio, & proportio ſemidiametrorum, vel duarum rectarum habentium proportionem ratio alem. Verum tamen eſt ad accipiendam ſoliditatem ſphæricam vſui eſſe regulam centri grauitatis in ſemicirculo, quantum ea poteſt i ſeruire ſaltem praxibus organicis iuxta indicata in Schol. ad finem § 1 huius primæ ſectionis. Confer, amabo, demonſtrationum indicatarum implexam prolixitatem apud Euclidem de ſimilium conorum, cylindrorum, ſphærarum proportionibus, cum compendijs, quæ habes, mi Tyro, in antecedentibus hic theorematibus, & videbis, ac habebis vnde nobis etiam vità functis benè apud Deum preceris, quod te etiam, atque etiam rogo.

COROLLARIVM.

Quanto ſol terra ſit maior. De comparatis magnitudinibus inter ſe Planetarum. Ac vſus alij militares præcedentis Theoremmatis 21 indicati apud nos.

QVoniam in Militari, & in Aſtronomia vſus ſingulares ſunt proportionum inter ſphæras, quicumq; circa praxes amat verſari ſcientificè, quanti faciat habere in promptu facillimam demonſtrationem proportionum, ac veritatum admirandarum, præſertim circa ſublimia, & cæleſtia, quæ venatur?

Vide in 2 To. hu. Ærarij ad propoſ. 20 lib. 6, §§. 18, 21, 22, 28, 29, 30, indicatos vſus aliquos machinarios militares, Aſtronomicos præced. Theor. 21, in primis in § 30 de Sole plus quam centies, & quadragies maiore, quàm terræ globus, è triplicata eorum proportione in diametris. Sic pariter de aliorum planetarum ſphæris, &c.

SCHOLION II.

ALia pertinentia ad proportiones inter ſe Coni, Cylindri, Sphæræ, &c. vide in ſec. 2. præſertim in corollarijs poſt varias dimenſiones eorum ſolidorũ.

THEOREMA XXII.

Si fuerint quatuor lineæ rectæ continuè proportionales, vt eſt prima ad quartam, ita eſt parallelepipedum ſuper prima deſcriptum ad parallelepipedum ſimile, ſimiliterq; deſcriptum ſuper ſecunda.

EX hactenus dictis in hoc § 6 patet etiã in numeris corollarium propoſ. 33 lib. 11, cuius plurimi, ac inſignes vſus ſunt in Geometria practica, & alijs in artibus, in primis pro famoſa cubi duplatione, iuxta ea, quæ indicauimus ad propoſ. 13 li. 6. vbi de inuentione duarum mediarum proportionaliũ, atq; in praxi videbis in 2. ſect. hu. Breuiarij, præſertim vbi de auctione, & imminutione ſolidorum in data ratione.

3 Igitur in exemplo 8 figuræ pro rectis quatuor continuè proportionalibus accipe quatuor continuè proportionales numeros 1, 2, 4, 8, & ex primo conſla pro cubo FH cubicum numerum ſic: ducto latere 1 cubiti linearis in ſe, fit cubitus quadratus 1: ex cubito quadrato 1 ducto in cubitum linearem 1 fit numerus cubiti cubici 1. E ſecundo numero proportionalium 2 in ſe ducto fit planus quadratus numerus 4, rurſus e 2 ducto in 4 fit, pro cubo EG, cubicus numerus 8. Quam proportionem habent inter ſe numeri ſolidi primus, & ſecundus 8, facti è numeris, ceu li-

neis

neis prima & ſecundà proportionalibus? eã ſcilicet,quam habent quatuor continuè proportionalium primus numerus (ſeu prima linea) 1 ad quartum (ſeu quartam lineam) 8. *Si ergo ſint quatuor lineæ continuè proportionales, ſolidum parallelepipedum ſuper prima ad ſolidum ſuper ſecunda ſimile, ſimiliterq; deſcriptum ſe habet, vt prima ad quartam linearum continuè proportionalium.*

SCHOLION.

Vniuerſales regulę ad praxes etiam geometricè organicas pro cognoſcendis proportionibus datorum ſolidorum etiam non ſimilium.

RElege quæ habes apud nos in hoc Aerario ad propoſ. 10 lib. 1. § 3; ad propoſ. 1. lib. *6*, § *6*, 7, 8, 9. Ad propoſ. 20. lib. *6*. § 1, & ad 23 § 12. Atq; ea huc applica, vel producendo proportionem duplicatam planorum ad triplicatam ſolidorum, vel, vt ibi, redactis planis irregularibus ad regularia intra eaſdem parallelas. Sic reductis ſolidis non ſimilibus(per praxes in 2 ſectione hu. Breu.) ad ſimilia, accipe, ac transfer laterum homolõgorum quantitates in circinum proportionum,&c. vt in citatis §§ ad lib. 1, & ad 6. lib. docetur.

Sic, datis quibuslibet, & quotlibet ſolidis, etiam artifices organici ſtatim ſciẽt eorum proportiones, per praxes in cit. §§, & hìc, & in & anteced. geometricè firmatas, & magis in ſeq. firmandas.

§ 7.

§ VII.

Regula vniuerſaliſſima breuis, ac facilis de proportione ſolidorum etiam non ſimilium, & vltraelementarium, ex eorum ortu, &c. Indicata exempla apud nos in to. 2.

NOn ſimilia ſolida quam habent inter ſe proportionem? Cuius rei nullum apud elementa geometrica veſtigium eſt, ac præſertim cum regula vniuerſaliſſima, quam ſic breuiſſimè aperio.

1 Quæcumq; ſolida (præſertim non ſimilia) inæqualiũ baſium, altitudinem, &c. habent inter ſe proportionem compoſitam ex proportione planorum, & ex proportione altitudinum, ſeu viarum perpendicularium, ſiue (ſi ſint ſolida rotunda, quę gignuntur ex rotatione plani) viarũ circularium, quas ſignat centrum grauitatis planorum rotatorum, ex quibus planis, & vijs conflantur ſolida.

In figura quinta parallelepipedum oblõgum AB ad cubum CD habet proportionem compoſitam ex proportione planorum AE, CG, & ex proportione altitudinum BE, CH. Sic etiam comparãdo inter ſe diuerſę ſpeciei ſolida, in figura nona, priſma CB habet ad cylindrũ EF proportionem compoſitam ex proportione baſium triangularis ICD, & circularis NLF, & ex proportione viarum, ſiue altitudinum perpendicularium AC, EH, ad quas eleuata plana, ſeu baſes, conflarunt priſma AB, & cylindrum EF.

2 In exemplo ſolidorum, quæ fiunt ex rotationibus planorum, quoniam cylindrus EF procreatur etiam ex rotatione rectanguli EL ducti in peripheriam, ſeu viam circularem ſignatam à centro grauitatis M in rectangulo EL, & conus fit ex rotatione trianguli GHL ducti in peripheriam, ſeu viam circularem ſignatam à centro grauitatis N in

in triangulo GHL,habent cylindrus, & conus inter ſe proportionem compoſitam ex proportione rectanguli EL ad triangulum GHL, & ex proportione peripheriæ ab M ad peripheriam ab N ſignatam.

3 Applica regulã infinitis alijs exemplis,& conbinationibus, & comparationibus omnium aliarum figurarum, quarum ortus poſſit cognoſci ex plano ducto in viam vel perpendicularem,vel circularem.

SCHOLION I.

Alia theoremata de ſolidorum non ſimilium proportionibus apud nos.

R*Euiſe apud nos ad propoſit.* 14 *lib.*6,§ 5 *in to.*2 *theorema:* de proportione ſoliditatum inter iſoperimetros cylindros, quæ eſt, vt ſemidiametrorum in baſibus, *cũ vſibus in* § 6 7.*Et ad prop.* 15,§ *theorema:*de proportione ſoliditatũ inter conos iſoperimetros, quæ eſt ſemidiametrorum in baſibus,& reciproce altitudinum.*cum vſibus in* § 5.*& ad prop.*23 § 18.:de conus,& cylindris. &c.habẽtibus inter ſe proportionũ cõpoſitam è rectangulo ad triangulũ rotata,&c.& è triente ad ſemiſſem ſemidiametrorum, &c. *Quæ theoremata hìc & vniuerſalius extra anguſtias aſymptoton, atq; etiam aliter, ac fortaſſe etiam facilius, ex ortu, & analyſi figurarum, quàm ibi, ſoluimus.*

SCHO-

SCHOLION II.

Ad cautionem.

IVxta verba in fine Scholÿ poſt § 1 huius 1 ſectionis, quoties tuto geometricè licet.&c.(relege ibi) theorema hic in fine huius § 7, de proportione inter cylindros, & conos, &c.oſtendit in comparatione aliquorum, præſertim diuerſi generis, ſolidorũ confugiendum pro firmamento ad rotationes factas à centris grauitatis, non à ſemidiametris baſium; vt in exemplo cylindri, & coni eiuſdem altitudinis, & baſes. Nam ſi vtare rotatione ſemidiametrorum, cum ſint eiuſdem baſis æqualis rotationis ab æqualibus ſemidiametris, oſtendent proportionem æqualitatis, quæ tamen non eſt, ſed eſt ex centro grauitatis verè trientis ad ſemiſſem.&c.

Hactenus in hac 1 ſectione præcipua elemẽtaria (& indicata etiam extraelementaria) theoremata de ſolidis lib. 11, & 12 aliter, breuiter, ac euidenter prr regulas vniuerſales à nobis expedita ſunt. Addamus etiam aliqua de ſuperficiebus ſolidorum elementarium.

§ 8.

§ VIII.

SCHOLION.

De theorematibus, & problematibus circa ſuperficies ſolidorum, in primis elementarium.

ANtequam aggrediar proponere, ac facillimè, breuiterq; demonſtrare problemata, & practicæ stereometriæ varios vſus partim ex ortu ipſorum ſolidorum, partim ex vſu geometrico centri grauitatis, lubet priore loco apponere aliqua theoremata, & problemata de ſuperficiebus circa ſolida aliqua, præcipuè elemantaria demonſtrata ferme ex earum ſuperficierum ortu; eoq; libentius, quod nihil apud Euclidem extat circa eas ſuperficies, multoq; minus apud alios priſcorum, ſiue ſemipriſcorum, quibus incognitum fuit arcanum geometrici vſus centri grauitatis, & analyſis figurarum ad principia, vnde oriuntur; ex quibus ea, quæ ad figuras pertinent, præcipuè ſolidas, & rotundas, nullo negotio demonſtrantur. Quare non ingratum auguror futurum ſaltem Tyronibus geometricis hoc noſtrum ad, & extra elementaria qualecumq; auctarium.

THEOREMA XXIII.

Rectorum cylindrorum ſimilium ſuperficies ſine baſibus ſunt inter ſe in duplicata proportione ſemidiametrorum in baſibus.

INſpice figuras, 7, & 9, ſec. 1. finge ſimiles cylindros AB, EF. Aio eorum ſuperficies ſine baſibus eſſe in duplicata proportione ſemidiametrorum GB, HF. Quo-

niam enim generantur eæ ſuperficies à rectis lineis, ſiue lateribus AG, HE gyratis circa axes ad diſtantias ſemidiametrorum, velut circa GL, ad diſtantiam LH; ergo habebunt proportionem laterum gyratorum, & ipſarum gyrationum, quæ concurrunt ad earum generationem. Vt verò peripheriæ gyrationum, ſic earum diametri, ſiue ſemidiametri, per lemma in § 19. Epilog. planim. ſunt autem ij cylindri ſimiles, hoc eſt, iuxta definitionem, circa æquales angulos habent latera proportionalia, ac etiam homologa, ſcilicet altitudines, & ſemidiametros, ergo vt ſemidiametri, ſiue diametri GB, HF inter ſe, ſic altitudo GA ad altitudinem EH. Addita ergo proportio altitudinum eiuſdem generis proportioni ſemidiametrorum cõficit duplicatam ſemidiametrorum proportionem cylindricarum ſuperficierum, ſine baſibus, circa cylindros ſimiles. Quod erat demonſtrandum.

Aliter I.

Superficies cylindricæ ſimilium, &c. ſunt in duplicata. &c. laterum, vel &c. ex altero cylindrorum ortu apud nos.

QVoniam (vt in num. 5. § 2 ad finem libri 3. elem. indicauimus, ac alibi) in fig. 7, & 9, cylindricæ ſuperficies oriuntur ex eleuatione peripheriarum, velut AF, &c. & proportionem habent ſuperficies, quam habent earum principia generantia, ſcilicet peripheriæ eleuatæ, & latera eleuationum, & vt, peripheriæ, ſic diametri, & ſimilium cylindrorum homologa ſunt & latera, & diametri; ergo habent inter ſe proportionem eandem bis applicatam (ideſt duplicatam) vel lateribus, vel diametris, &c.

Vide ſimilia inferius in Theor. 27 de priſmatibus, vbi aliter, &c. Sic hìc: vt latera GA, EH, ſic diametri baſium

GB,

GB, HF. Ergo eiuſdem generis proportio altera alteri addita duplicatam efficit vel in lateribus, vel in diametris baſium.

Aliter II.

Ex ortu, ſiue ex Analyſi cylindricæ ſuperficiei.

VIde nos in Ap. 5, vbi docemus deformationes imaginum efficere per cylindricas, & conicas ſuperficies; ibi enim etiam organicè patet cylindricam ſuperficiem recti cylindri fieri è rectãgulo circulariter curuato, & conicam è ſectore circuli. Quibus poſitis, vide figuram 7, & 9. ſect. primæ. Si fingas rectangula ſimilia circulariter curuata in ſuperficies cylindricas BFAG, EHF, quoniam rectangula ſimilia, per 20 prop. lib. 6, ſunt in duplicata proportione laterum homologorum, ergo laterum homologorum circulariter circa baſes GB, HF incuruatorum proportio duplicata dabit proportionem ſuperficierum cylindricarum. At, per lemma in § 19 Epil. Planimet. circularium peripheriarum proportio eſt quæ ſemidiametrorum; ergo ſuperficies cylindricę AB, EF erunt inter ſe in proportione duplicatà ſemidiametrorum, ſiue diametrorum GB, HF.

SCHOLION.

EX altitudine, & ſemidiametro cylindri ſciri poteſt quantitas laterum in rectangulis ſimilibus, ex quibus conficiuntur, vel in quæ reſoluuntur cylindricæ ſuperficies. Ac ſunt ſimiles cylindricæ ſuperficies, quæ habent altitudines, & peripherias, ſiue ſemidiametros baſium proportionales. &c.

THEOREMA XXIV.

Superficies rectorum ſimilium cylindrorũ ſunt in duplicata proportione Altitudinum.

PAtet. Nam in fig. 7, & 9 ſec. 1. ſunt homologa latera GA, EH, ſicut ſemidiametri, ſiue diametri, GB, HF; ergo ſuperficies cylindricæ quemadmodum in antecedentibus demonſtratæ ſunt habere inter ſe proportionem duplicatam ſemidiametrorum, ſic habent & altitudinum. &c.

THEOREMA XXV.

Similium conorum ſuperficies ſine baſibus ſunt in duplicata proportione quorumlibet trium laterum trianguli gyrati circulariter in ortu cylindricæ ſuperficiei.

VIde fig. 4, & 9, ſect. 1, & coni GHF rectangulum triangulum GLF finge ſimile alterius coni HGI, concepto triangulo, quod ſit ſub latere HI, & ſub imaginatâ ſemidiametro I M, & ſub axe imaginario inter MH. Ob quam triangulorum ſimilitudinem (iuxta definit. 24. lib. 11 de ſimilibus conis, & cylindris) & coni ſimiles, & homologa ſunt latera HI, GF, &c. Quoniam autem gignũtur eorum conorum ſuperficies è circulari gyratione obliquorum laterum HI, GF circa axes, habebunt proportionem inter ſe & laterum, & gyrationum, ſiue peripheriarum circa baſes; at peripheriarũ proportio eſt, quę ſemidiametrorum LF, IM, ergo & homologorum laterum HI, GF erit eadem proportio, quæ LF, IM; ſunt autem & axes GL, HM homologi, vt ſemidiametri FL, IM, ergo quorumlibet trium laterum, velut obliquorum HG, GF, proportio eiuſdem generis proportioni vtrorumlibet reliquorum addita,

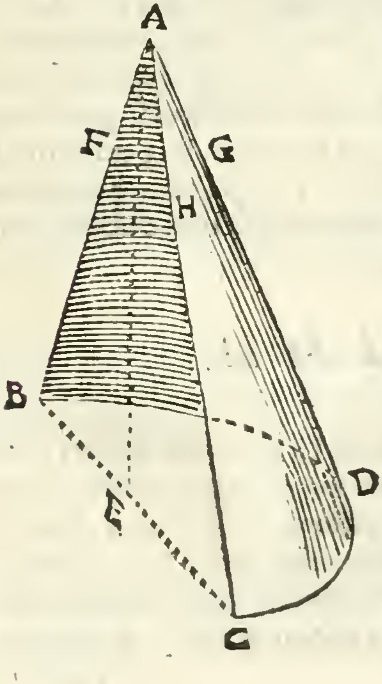
ta, ideſt duplicata, conficit proportionem ſuperficierum conicarum in conis rectis ſimilibus HGI, GFH.

SCHOLION.

Vide in Apiar. 9. progym. 6, prop. 4 lemmate 2, vbi demonſtramus rectangula triangula habentia circa angulum rectum latera proportionalia, eſſe ſimilia, & homologorum laterum etiam ſubtenſorum angulis rectis. Vnde firmes demonſtrationem præced. Theorem. 25.

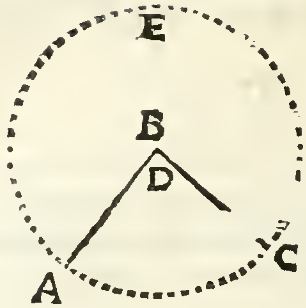
Aliter.

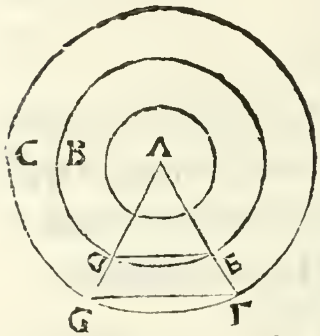
Eædem conicæ ſuperficies, &c. ſunt in duplicata proportione laterum obliquorum à quorum rotatione gignuntur. Ex altero ortu, ſiue ex analyſi conicarum ſuperficierum.



IVxta citata in Ap. 5. è circuli ſectore circulariter curuato, & erecto fit conica ſuperficies; ſiue malis: ſuperficies conica à vertice ad baſim, iuxta directionem axis, diſſecta, & in planum expanſa extẽditur, ac reſoluitur in ſectoris planam, & circularem ſuperficiem. Finge in appoſitâ hic pri. fig. conicam ſuperficiem BAGDCH iam diſſectam, & adapertam expandi in planum, fiet figura ſimilis ſectori in ſecunda hic ſeq. figura AECB.

In-





Inſpice figuras 4, & 9 ſec. primæ. Reſolutæ igitur, & expanſæ ſuperficies conicæ poſitorum ſimilium HIG, FGH (ſine baſibus) dant duos ſectores, ſub lateribus HI, GF, & ſub expanſis, & hiantibus peripherijs proportionalibus, quales finge eſſe ſecundam hic figuram AECB, & tertiam GCΓ. Sunt enim in conis (fig. 4, & 9 ſect. 1.) vt ſemidiametri FL, IM proportionales, ſic & peripheriæ in conicis baſibus. Quoniam ergo conorum latera obliqua HI, GF expoſita ſunt in plano, & facta ſunt ſemidiametri, finge B C, A Γ ſectorum AEC, GCΓ (compendij cauſa repoſitis hic figuris è 1, & 2 to. ad alia) ſimilium (vt in ſequenti lemmate firmabimus) & ſectores ſimiles ſunt in duplicata proportione ſemidiametrorũ, per theor. in § 19 Epilog. Planimetrici, & Corollar. § 10 ad propoſ. 20 lib. 6; ergo conicæ ſuperficies, ex ijs ſectoribus curuatæ, erunt in duplicata proportione laterum obliquorum, &c. Quod erat propoſitum.

LEMMA.

QVod autem ſectores AEC, GCΓ ſint ſimiles (hoc eſt ſint in ſegmentis peripheriarum habentibus eandem rationem ad totas peripherias, iuxta ſchol. Clau. ad defin. vltimam lib. 3) facile eſt, ſi non per ſe admittatur, firmare. Quoniam enim (iuxta ſuppoſitũ lemma in Apiar. 9. & citat. in Schol. poſt theor. 25. antec.)

antec.) & in fig. 4. & 9. ſect. 1. ſimilium poſitorũ conorum GHI, FGH ſunt æquiangula triangula FGL, & imaginatũ IHM, ergo vt GF ad GL, ſic HI ad IM, at, per lemma § 19 in epilog. planimetrico, vt FL ad IM, ſic peripheria ex FL ad peripheriam ex IM in baſibus conorum ſimilium.

Iam inſpice figuras hìc ſecundam, & tertiam ſectorum, in quos expanſæ ſunt in plano ſuperficies conorum ſimilium, & latera obliqua ierunt in ſemidiametros BC, AΓ, & circumferentiæ baſium conicarum diſſectæ ſunt in ſegmenta AEC, GCΓ. Quoniam igitur, per modò antedicta, vt ſemidiameter BC ad ſemidiametrum AΓ, ita ſegmentum CEA ad ſegmentum GCΓ, & rurſus vt BC ad AΓ, ita tota circumferentia CAE ad totam ΓGC; ergo, per propoſ. 11 lib. 5, vt ſegmentum CEA ad ſegmentum GCΓ, ſic tota peripheria CAE ad totam CGΓ, &, permutando, vt ſegmentum CEA ad totam peripheriam CAE, ſic ſegmentum GCΓ ad totam ſuam peripheriam ΓGC; hoc eſt, iuxta Schol. ad 11 defin. 3, ſunt ſimilia ſegmenta CEA, GCΓ.

SCHOLION.

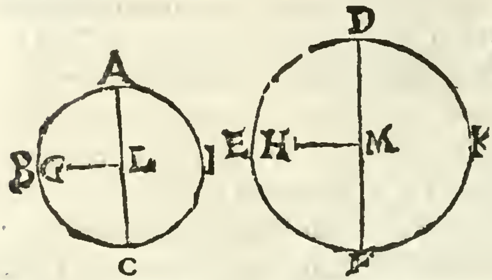
De proportionibus baſium inter ſe in cylindris, conis, parallelepipedis, priſmatibus. &c.

H*Abent eæ duplicatam proportionem vel ſemidiametrorum, vel laterum homologorum circa ſimiles baſes, è theor.* § 19 *epil. planimetr. & è* 20 *prop. lib. 6.*

Theo-

THEOREMA XXVI.

Sphæricæ ſuperficies ſunt in duplicata ratione ſemidiametrorum.



QVoniam enim oriũtur è gyratione circulari ſemiperipheriarum ABC, DEF, habẽt ergo ſphericæ ſuperficies proportionẽ & ſemiperipheriarũ, & gyrationum circularium ſignatarum ab extremis punctis B, E ſemidiametrorum BL, EM. At proportio ipſarum ABC, DEF gyratarum, eſt eadem quæ ſemidiametrorum BL, EM, per lemma in § 19 epilog. planimetrico, & § 10 ad prop. 20 li. 6. pariterq; proportio gyrationum, ſiue peripheriarũ ſignatarum à punctis B, E ſemidiametrorum BL, EM, eſt eadem quæ earundem ſemidiametrorum BL, EM; ergo èadem proportio æqualium peripheriarum eſt bis èadem, id eſt duplicata ſemidiametrorum in ortu ſuperficiei ſphæricæ, ac proinde ſuperficierum ſphæricarum duplicata in ſemidiametris.

SCHOLION.

Compendium ſingulare in præced. theoremate.

VItauimus laborem hic nobis non neceſſarium inquiſitionis centri grauitatis in peripheria ſemicirculi, quæ nec haberi poteſt præciſè geometricè, iux. indicata in ſchol. 1 poſt theor. 21 anteced. licet vſui qualicũq; ſit ad ſciendam quantitatem ſuperficiei ſphæricæ, iuxta inferius videnda in ſect. 2. hu. Breu.

THEO-

THEOREMA XXXIII.

Superficies ſine baſibus cylindrorum rectorum, quorum latera, & diametri baſium reciprocantur, ſunt æquales.

QVod ad propoſ. 14 lib. 6 in 2 to. hu. Ærar. § 2, propoſuimus inter aſymptotos, & ex vſu centri grauitatis, hìc vniuersè, ac abſolutum ab anguſtijs aſymptotωn, & ſine cognitione, aut vſu cētri grauitatis expediemus. Inſpice figuras 7, & 9 ſect. 1, ac finge cylindros AB, EF habere latera, & baſes inter ſe reciprocè, vt EH ad FB, ſic diameter inter BG ad diametrum inter FH; dico eorū cylindrorum ſuperficies eſſe æquales. Nam iuxta noſtrum modum, eæ ſuperficies extenduntur in rectangula, quorum latera reciprocantur, ac proinde ſunt æqualia. Imaginare ſuperficiem cylindri AB extenſam in rectangulum ſub GA, & ſub recta æquali circumferentiæ baſis BG, & cylindri EF ſuperficiem extenſam eſſe in rectangulum ſub EH, & ſub recta æquali circumferentiæ baſis HF. Quoniam vt diametri inter baſes GB, HF, ſic circumferentiæ; & latera cum diametris, per ſuppoſitionem, reciprocantur; ergo altitudines etiam cum circumferentijs, ſiue cum rectis circumferentiarum extenſarum, reciprocantur, ſub quibus parallelogrāmata rectangula ſunt æqualia, per 14 lib. 6. Eaq; rectangula ſunt ſuperficies ipſæ cylindrorum, quorum latera, & diametri reciprocantur. Ergo. &c.

SCHOLION.

Alia de ſuperficiebus curuis apud nos —

— V*Ide ad propoſit.* 14, 15, 23 *lib.* 6 *in* 2 *Tomo huius Ærary. &c.*

FINIS SECT. I.

BREVIARII STEREOMETRICI

Sectio Secunda, quæ & practica.

De dimenſionibus, transformationibus, auctionibus, imminutionibus, diuiſionibus in datà proportione ſolidorum etiam vltraelementariorum, & ſuperficierum præſertim curuarū circa ſolida rotunda. Ad vſus eximios. &c.

§ I

De transformationibus ſuperficierum circa ſolida. &c.

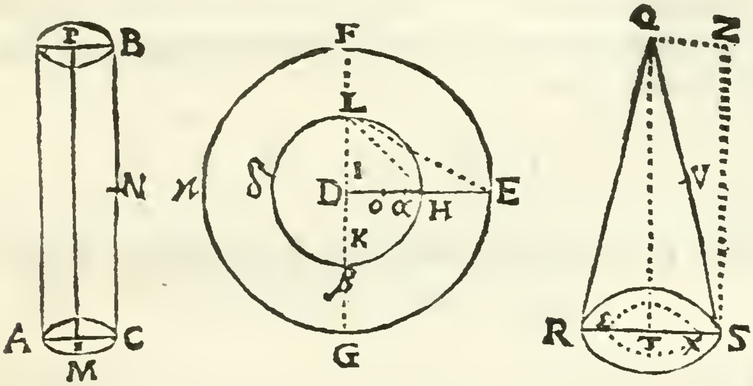
A Theorematibus gradum faciamus ad problemata, & ad partem practicam, in qua è theorematibus praxes, & vſus demonſtrantur. Ac primo transformationis ſuperficierum curuarū circa ſolida aliqua elementaria exemplum aliquod accipe. In quorum exemplorum aliquo licet ſint ſuperficies circulares, ac planæ, tamen ea ſunt in ordine ad curuas ſolidorum, vt videbis.

PRO-

PROBLEMA I.

Cylindri recti datæ ſuperficiei ſine baſibus æqualem circulum deſcribere.

SIt Cylindri recti AB ſuperficies, ſine baſibus, transformanda in circulum ęqualem. Inueniatur inter latus BC, & baſis diametrum CA media proportionalis DE. Semidiametro DE deſcriptus circulus E F G erit æqualis ſu-



perficiei cylindri AB, ſine baſibus. Vide pro hoc problemate theorema Archim. lib 1 de Sphæra, & cylindro, propoſ. 13. At eius demõſtrationem indirectam (de obſcuritate iudicium aliorum eſto) quis curet ſi directè; ac breuiter demõſtrari propoſitum problema poſſit è prop. 14. lib. ſexti?

1 Igitur, quoniã eſt vt BC ad DE, ita DE ad AC, ergo quadrati ex DE (æqualis rectangulo ſub BCA, per 17 ſexti) latera erunt cum rectãguli lateribus circa rectos angulos reciproca, & vt tota DE ad totam AC, ſic dimidia DH ad dimidiam CI, & vt ſemidiametri DH, IC, ita peripheriæ HL δ β, AMC factæ à punctis medijs, ſiue grauitatis H, & N, (ſiue C) rectarum DE, BC dum rotantur altera circa D ad circuli, altera circa PI ad cylindricæ ſuperficiei formationem.

 2 Quo-

Circulus rectãgulo æqualis.&c.

Cylindri ſuperficies æqualis rectãgulo. &c.

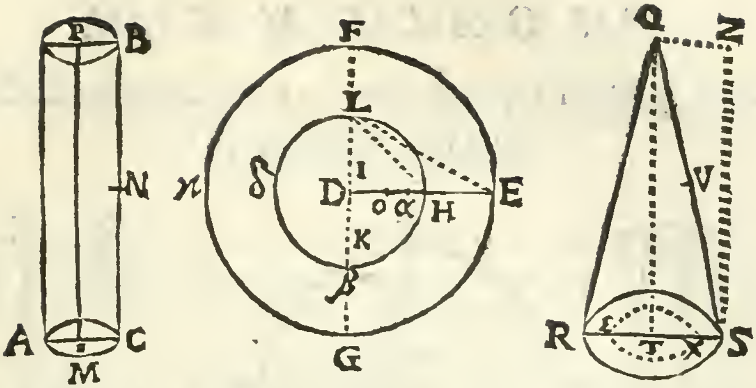
2 Quoniam vero ſuperficies circularis (per toties vſurpatam,& vſu, ac exemplis in 1,& 2, & in hoc 3, To. ſæpius probatam regulam Guldini de vſu geometrico centri grauitatis) æqualis eſt rectangulo ſub DE rotatà, & ſub rectà æquali viæ rotationis HL $\delta\beta$ à centro grauitatis H ſignatæ, & ſuperficies cylindrica æqualis eſt rectangulo ſub rotato latere BC, & ſub recta æquali viæ rotationis AMC à centro grauitatis N, ſiue pro eo a C ſignatæ,ergo ea rectangula(ex illatis in anteceden. num.1.) habent latera reciproca;ergo,per 14 ſexti,ſunt æqualia; ergo & ſuperficies cylindrica, & circularis, æquales illis rectangulis, ſunt & ipſæ inter ſeſe æquales: ergo in planam circularem abiecimus curuam cylindricam ſuperficiem ſine baſibus.

Licebit etiam numeris demonſtratam veritatem huius problematis confirmare.

PROBLEMA II.

Coni recti datæ ſuperficiei, ſine baſibus, æqualem circulum deſcribere.

PRopoſ. 14. Archim. eſt theorema, quod nos hic facimus problema, & quod ille indirectè nos hic directè, ac facilè demonſtramus eàdem forma,qua antecedens problema 1. Vt dati recti coni QRS ſuperficiei, ſine baſe, deſcribatur circulus æqualis, inueniatur media proportionalis DE inter latus QS, & inter ſemidiametrũ ST,deſcriptus enim circulus EG*k*F ex media proportionali erit qui quæritur. Suppono, & pro lemmate indico à centro grauitatis,quod eſt medium punctum V in latere QS, demiſſam perpendicularẽ,ſiue axi QT paralellam ſecare in X ſemidiametrum TS;ſi enim ſub QTS cõpleatur rectangulũ TZ,erit QS diameter, & recta vtrilibet laterum QT, ZS paralella, & bifarians oppoſita latera QZ, TS tranſibit per V,quod eſt medium tam diametri,quàm parallelogrammi. Hoc igitur poſito, circulus EF*k*G, & ſuperfi-



perficies conica RQS ſunt æquales,quia rectangulorum, quibus æquantur eæ ſuperficies,latera reciprocantur, ideſt vt QS ad DE, ita recta ęqualis rotationi deſignatę ab H ſe habet ad rectam æqualē rotationi ab X deſignatę.Vt enim ſemidiametri DH,T inter ſe,ſic & totæ DE,TS,quæ reciprocātur in rectangulo QST, & in quadrato ex DE, &c. Habes argumentationum fila,quæ tu in telam geometricę demonſtrationis diſponas, vt habes in anteced.probl. I.

COROLLARIVM.

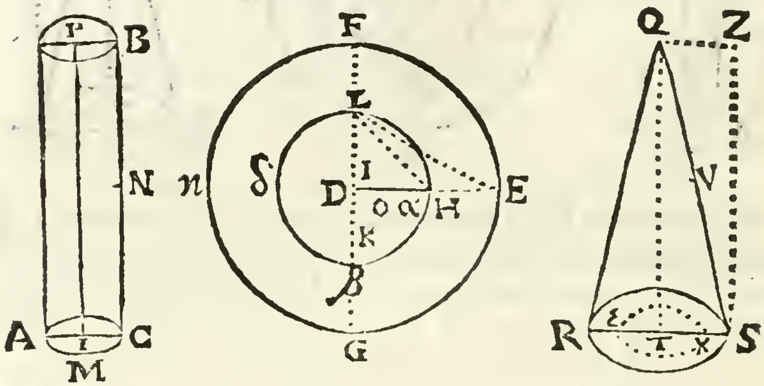
Cylindri AB, & Coni QRS ſunt inter ſe æquales ſuperficies, ſine baſibus.

SVnt enim eidem circulo GEFϰ æquales. Accipe pro corollarijs & problemata ſequētia. Ac interim en tibi gradus à plano circulari, & reditus ad trāsformationes curuarum ſuperficierum inter ſe, ac in æquales circa ſolida. Sic inferius per circulos ibimus ad Solidorum ſuperficies.

PRO-

PROBLEMA III.

Dati cylindri ſuperficiem in conicam ſine baſibus transformare.



DAti cylindri AB diameter AC, in baſi AMC, duplicetur, fiatq; baſis diameter RS, & ab extremis R, S, interuallo lateris CB cylindri AB, fiat mutua ſectio in Q, erit coni QRS ſuperficies æqualis ſuperficiei cylindri AB. Ratio ex centri grauitatis geometrico vſu, & ex earum ſuperficierũ ortu eſt, quia & lineæ, quæ motu ſuo cõficiunt eas ſuperficies, & viæ motuum ſunt æquales. Nam cylindri lateri BC, ſignãti motu ſuo circa PI ſuperficiem cylindricam, æquale eſt, per conſtructionem, coni latus obliquum SQ ſignans motu ſuo circa QT ſuperficiem conicam. Et quia etiam, per conſtructionem, RS eſt dupla ipſius AC, &, per indicata in antec. probl. 2, diſtantiæ centri grauitatis V ab axe coni æqualis eſt TX dimidia ſemidiametri TS, hoc eſt ipſa TX eſt æqualis ſemidiametro IC cylindri, ergo ab æqualibus ſemidiametris fiunt centrorum grauitatis N, ſiue C, & V, ſiue X æquales gyrationes CMA, XTε. Æquales ergo ſunt ſuperficies cylindrica, & conica factæ ab æqualium inter ſe ductibus æqualia producentibus.

PRO-

PROBLEMA IV.

Conicam ſuperficiem in ęqualem cylindricam, ſine baſibus, transferre.

OPpoſita operatione operationi præcedentis 3 problematis in hoc 4 problemate agendum eſt. Dati coni QRS diameter RS ipſius baſis bifarietur, ſitq; dimidium AC, circa quod cylindrica ſuperficies facta, & habens altitudinem CB perpendicularem ęqualem lateri obliquo QR, vel QS, erit æqualis ſuperficiei datæ coni QRS. Demonſtratio eadem eſt, quæ antecedentis problematis 3.

COROLLARIVM, ac Theorema vniuerſale.

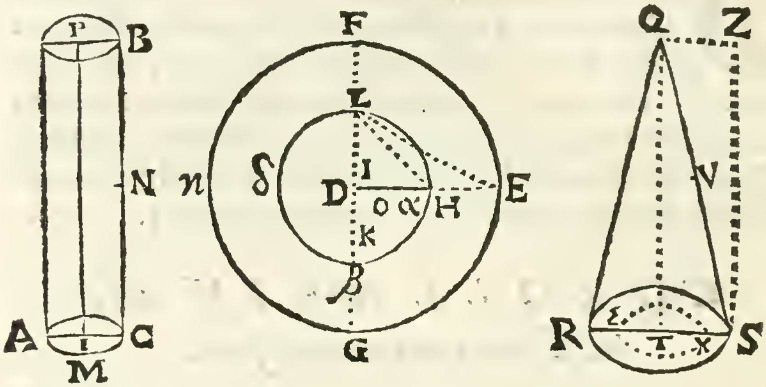
Cylindri, & coni ſuperficies ſine baſibus ſunt inter ſe æquales, quorum latera æqualia ſunt, & diameter baſis coni dupla eſt diametri baſis cylindri.

PAtet ex antecedentibus, & à peculiaribus in problemate fit eductio, & eleuatio ad veritatem theoricam vniuerſalem, à qua manant, & demonſtrantur praxes geometricæ, atq; etiam in artibus alijs organicæ.

PRO-

PROBLEMATA V, & VI.

Dato circulo cylindricam, vel conicam ſuperficiem ſine baſibus æqualem inuenire.



VIdebis & hic, qnemadmodum apparuit alibi in 2 to. hu. Ærarij, quam ampli, & magni momenti vſus ſint noſtri problematis conuerſi ad 13 lib. 6, ad 17, ad 30, ſcilicet: *Datæ duas extremas proportionales adinuenire*. Nam hìc dati circuli GEFκ ſemidiametro DE inuenienda eſt maior proportionalis BC, vel QR, & præterea inuenienda eſt minor proportionalis AC; ac cylindri ſub altitudine maioris proportionalis, & habentis minorem proportionalem pro diametro baſis, erit cylindrica ſuperficies ęqualis dato circulo. Pro ſuperficie verò coni duplicanda eſt tertia minor proportionalis, vt ſit diameter baſis conicæ, ac erit eius coni ſuperficies æqualis dato circulo. Demonſtratio patet ex ijs, quæ attulimus in 1, & 2 probl. antec. à reciprocat. linearum rotatarum, & ſemidiametrorum in rotationibus, à quibus fiunt eæ ſuperficies.

PROBLEMA VII.

Sphæricæ ſuperficiei circulum æqualem ſtatim deſcribere.

PVta ſphæram eſſe LH$\beta\delta$. Eius ſemidiameter DH dupli-cetur, & fiat DE; cuius interuallo deſcriptus circulus GEFγ æqualis eſt ſuperficiei ſphęricæ LH$\beta\delta$. Nam ſunt inter ſe circuli LH$\beta\delta$, & GEFκ in duplicatâ proportione ſemidiametrorum, ideſt maior circulus eſt minoris quadruplus. Eſt vero, ex Archimede prop. 30. li. 1. de ſphę. & cyl. ſuperficies ſphærica quadrupla circuli ſphæræ maximi, velut ipſius LH$\beta\delta$. Ac ne egeas, aut ſupponas hìc quidquam ex Archimede, accipe ſequentia, in primis hoc —

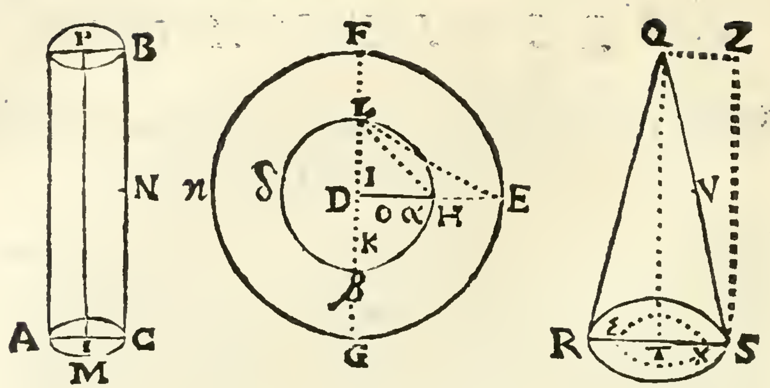
—LEMMA

Superficies ſphærica quadrupla eſt circuli eiuſdem ſphæræ maximi, aliter quàm ab Archimede, ex ortu ſuperficiei ſphæricæ demonſtratum.

SVppono 1 deſcriptionem lineæ quadratricis vel apud Pappum lib. 4. poſt propoſ. 25, vel apud alios neotericos, apud Claui. in fine to. 1. in Eucli. apud nos etiam in Apiar. 2 progym. 3 prop. 1 Schol. 3. Cuius quadratricis, mixtę lineę, ab L ſub LH deductæ, ac deſcriptæ inuenitur in ſemidiametro DH extremum punctum citra H velut in α.

Suppono 2 ex noſtro Guldino punctum id extremum quadratricis α eſſe centrum grauitatis ſemiperipheriæ LHβ, vt Author ille doctè demonſtrat. Ac etiam inferius apud nos in corolar. 3 poſt probl. 17 videbis modum or-

H ga-



ganicum inueniendi centri grauitatis linearum, quarum quę curuæ ſunt habent extra ſe centrum ſuæ grauitatis, iuxta paradoxa machinaria apud nos in Apiar.4.

Suppono 3 id, quod indirectà demonſtratione demõſtratur à Pappo; ſcilicet arcum quadrantis L H ita ſe habere ad ſemidiametrum LD, vt ipſa LD ad partem ſemidiametri interceptam inter centrum, & punctum extremum quadratricis, quod cadit in centrum grauitatis α ſemiperipheriæ LHB, ita vt D α ſit quarta minor proportionalis.

Cui ſuppoſito addo ſic: Si vt curua LH ad LD, ita LD ad Dα, ergo, per 15 prop.lib.5. duplicia, ſiue æque multiplicia erũt in eadẽ proport. ac erit vt LHB tota ſemiperipheria ad diametrum totam Lβ, ita LD, ſiue DH ad Dα.

Sphæræ ſuperficies cui rectãgulo æqualis ſit.

Quibus antepoſitis, quoniam ex aureà Guldini regula (comprobatà, & congruenta cum demonſtratis ab Antiquis, & ſolidè geometricè philoſophantibus) ſuperficies ſphæræ, quæ oritur ex gyratione ſemiperipheriæ LHβ in peripheriam ſignatam à centro grauitatis α, dum LHβ circumrotatur, erit ea ſuperficies ſphæræ æqualis rectangulo ſub LHβ (ſiue ſub recta illi æquali) & ſub recta ęquali peripheriæ ſignatæ à centro grauitatis α, pro qua peripheria ſtat ſemidiameter Dα. Rurſus, quoniam ſuperficies circuli GEFx fit ex ductu ſemidiametri D E in peripheriam

riam ſignatam à centro grauitatis H, quod eſt medium ipſius DE, dum rotatur DE circa centrum D, ac pro peripheria ſignata ab H ſtat ſemidiameter DH, erit ergo, ſuperficies circuli GEFx æqualis rectangulo ſub ſemidiametro DE rotata, & ſub rotatione facta ab H, pro qua ſtat ſemidiameter DH. Ac vt peripheriæ ſignatæ ab x, & H inter ſe, ſic ſemidiametri D x, DH, per demonſtrata in fine Epilogi noſtri planimetrici. Quoniam igitur vt LHβ rotata ad Lδ, ſiue ad DE illi æqualem rotatam, ita rotatio ab H, (quæ eſt β δ L) ſiue ſemidiameter DH ad ſemidiametrum Dx, ſiue ad rotationem ab x factam; ergo reciprocantur latera rectangulorum, quorum alteri eſt æqualis ſuperficies ſphæræ LH βδ, alteri ſuperficies circuli GE x. ergo, per 14 lib. 6, ſunt æqualia inter ſe illa duo rectangula; ergo & ſuperficiei ſphæræ β HLδ ſuperficies circuli GEFx eſt æqualis. At per antec. probl. 7, eſt circulus GEFx quadruplus circuli maximi in ſphæra LH βδ; ergo ſuperficies ſphæræ LHβδ erit & ipſa quadrupla eiuſdem circuli maximi LHβδ. quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

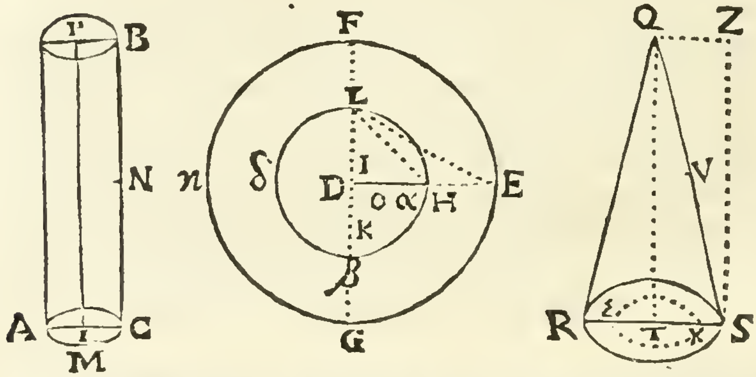
Cylindri AB, & Coni QRS ſuperficies, ſine baſibus, æquales ſunt ſuperficiei ſphæræ, cuius ſemidiameter DH.

SVnt enim æquales circulo GEFx, qui eſt æqualis ſuperficiei ſphæræ LH βδ. En hic iterum vſus planæ circularis ſuperficiei ad curuas cylindricam, conicam, ſphæricam.

PROBLEMATA VIII, & IX.

Datis cylindricæ, vel Conicæ ſuperficiebus, ſine baſibus, æqualem ſphęricam ſuperficiem facillimè conflare.

INueniatur media proportionalis DE inter latus, ſiue altitudinem BC, & diametrum AC baſis cylindri AB, item iter latus QR, & ſemidiametrum TS baſis co-



ni QRS, & ſphæra, cuius diameter eſt media illa proportionalis, habebit ſuperficiem æqualem ſuperficiebus cylindri, & coni. Qualis eſt ſphæra LH$\beta\delta$, cuius diameter Lβ æqualis eſt ipſi DE mediæ proportionali. Demonſtratio patet, ex anteced. problematibus, & lemmate.

Pro-

PROBLEMATA X, & XI.

Datę ſphęricæ ſuperficiei ęquales cylindricam, vel conicam ſuperficies, ſine baſibus, facillimè conflare.

DAtæ ſphęrę I.H$\beta\delta$ diametro Lβ inueniantur duę extremæ maior, & minor proportionalis, & cylindrus, cuius altitudo perpẽdicularis ſit maior trium proportionalium, minima verò ſit diameter baſis, habebit ſuperficiem æqualem datæ ſphæræ.

Conus verò, cuius latus ſit maxima trium proportionaliũ, minima ſit ſemidiameter baſis, habebit ſuperficiem æqualem datæ ſphæræ.

Applica, mi Tyro, fig. hìc indicata, quæ patent ex demonſtratis in antecedent. Hæc ſatis, ne tua otietur induſtria, ac ne doctioribus tędium pariamus, qui nobiſcum hìc prouident, ſeu ex antecedentibus poſtuident ſatis.

SCHOLION.

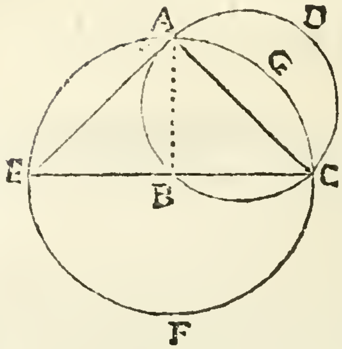
*ALiter ſphæricæ ſuperficiei cylindricam ſine baſibus æqualem facillime ponere, vide inferius in coroll.*1 *poſt probl.*17, *vnde educitur, & probatur.*

COROLLARIVM, ſiue Problema XII.

Triang. ſphærico, hoc eſt octauæ parti ſuperficiei ſphęricæ circulum æqualem deſcribere.

RElege, & confer in propoſitum hìc problema ea, quæ habes in § 3, vbi corollaria de quadraturis curuarum ſuperficierum, in fine lib. 3. elem. &c.

Ibi



Ibi oſtẽdimus triangulum ſphæricum æquale ſemicirculo, &c. Quòd quaſi corollarium deducitur ex problem. 7, & lemm. antecedẽtibus, vbi demõſtratur circulo ęqualis quarta pars ſuperficiei ſphæricæ; ergo octaua ſemicirculo, &c. Semicirculo illi circulũ æqualem deſcribes per conuerſum problematis, quod habes in § 25 ad propoſit. 47. lib. 1. in 1. To. huius Ærar. Puta triangulo ſphærico (ſiue octauæ parti ſuperficiei ſphæricæ ſub tribus quartis peripheriarũ æqualium. vide cit. § 3 in fine lib. 3.) ſemicirculum ęqualem eſſe EAC; biſarietur ſemiperipheria in A, & iuncta ab extremo alterutro diametri ad biſectionem ſemiperipheriæ, velut AC, erit diameter circuli æqualis ſemicirculo ex diametro &c. Reuiſe cit. § 25. ad prop. 47 lib. 1.

SCHOLION I.

De transformationibus aliarum ſuperficierum circa alia ſolida.

LIcebit otioſioribus, quàm nos, acutioribus, & fœcundioribus addere alia problem. de transformationibus ſuperficierum curuarum tam inter ſe, quam in planas, eaſq; non ſolum circulares, ſed quadratas, & cuiuſuis generis rectilineas.

Priſmatum, Parallelipedorum, Pyramidum ſuperficies mutuò transformantur mutatis baſibus in æquales iſoperimetras, & eleuatis baſium ambitibus ad æquales altitudines perpendiculares.

Scho-

SCHOLION II, in quo —

— Regula vniuerſalis pro quadrãdis curuis quibuſq; ſuperficiebus etiã vltraelementaribus.

AD regulam vniuerſalem, quam in hoc Scholio trademus, pertinent quæcumque etiam irregulares ſuperficies, quæ fiunt à rotationibus quarumcumque irregularium linearum. Ac ſanè diſtant magis curuæ, quàm planæ (licet ſub curuis lineis) ſuperficies à planis, eſtq; operis, ac laudis fortaſſe non minoris curuas quadrare, quàm plana curuilinea, vt parabolicum planum, &c. Idem nobis hìc accidit quod Archimedi circa circuli quadraturã, quam ille quidem in theoremate demonſtrat (indirectà demoſtratione oſtendens cui triangulo æqualis ſit area circuli) in problemate tamen eatenus circuli aream metitur, quatenus eſt ſatis organicis propoſitionibus. Ita & nos in ſequenti § 2 metiemur pro artibus organicis aliquas curuas ſuperficies, hìc verò in fine § 1 etiam indicamus theorematicè, ac demonſtratiuè cui rectangulo ſint æquales quæcunq; ſuperficies curuæ, quæ oriuntur à rotatis quibuſcunq; lineis.

Nam ſunt illæ ſuperficies æquales rectangulo ſub linea rotata, & ſub peripheria (ſiue rectà lineà æquali peripheriæ) ſignatà à centro grauitatis rotatæ lineæ etiam quantumuis irregularis. Confer quæ habes in antecedentibus problematibus, & corollarijs hu. § 1, cum hìc dictis, & ex ijs theoricen adducito, quatenus licebit, ad praxes. Plurima hìc habes in pauciſsimis. *Cui rectangulo ſint æquales curuæ rotundorum ſolidorum ſuperficies.*

Interim nos progrediamur ad indicandas breuiſsimè dimenſiones earumdem ſuperficierum, præſertim curuarum, circa ſolida elementaria, non ſine vſu, fructuq; aliquo pro ciuili vtraq; vita contemplatiuà, & actiuà.

§ 2

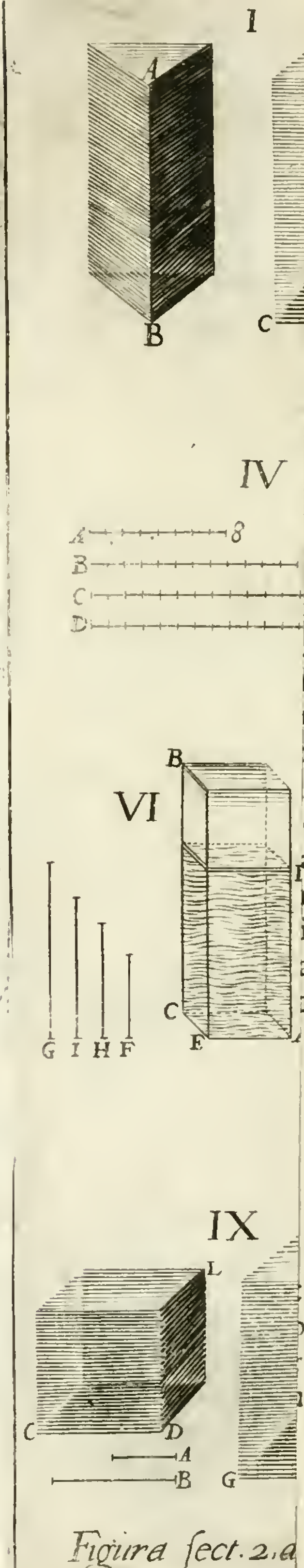


Figura ſect. 2. a

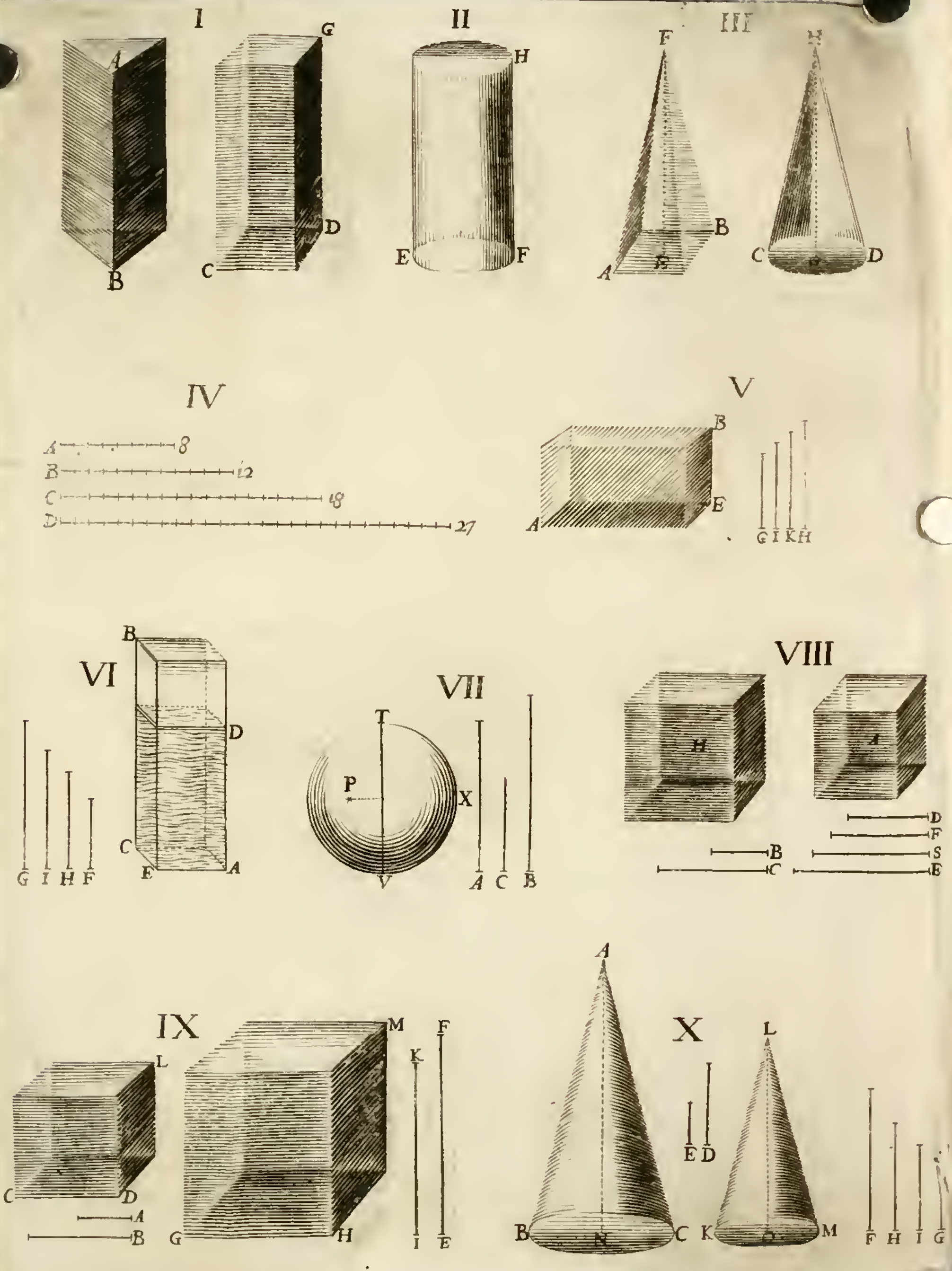


Figura ſect. 2. ad 116.

§ II.

Dimenſiones ſuperficierum circa ſolida elementaria.

PROBLEMATA XIII, XIV, XV.

Parallelipipedorum, Priſmatum, Cylindrorum ſuperficies metiri, ex earum ortu.

QVaſi corollaria ſunt ex antecedentibus theorematibus dimenſiones ſuperficierum circa ſolida, præſertim elementaria, quæ, iuxta noſtram ſententiam, vnde oriuntur, inde etiam dimenſiones habent. Vide in tabellà ſec. 2. fig. 1, 2. Quoniam priſmatis AB, Parallelipipedi CG, cylindri EH ſuperficies fiunt à baſium lateribus, vel peripherià, perpendiculariter eleuatis, etiam dimenſiones accipiunt à ductu laterum in baſibus, vel peripheriæ, in eleuationes perpendiculares. Quibus addendæ ſunt ſuperficies baſium dimenſæ ex dictis in 1, To. hui. Ærar. vbi de dimenſionibus planarum figurarum. Et aggregatum dabit quantitates ſuperficiarias eorum ſolidorum in numeris, ac menſuris expoſitas.

COROLLARIVM I.

Ad Sacrum, vel domeſticum ornatum.

QVoniam columnæ vel in templis, vel in domeſticis atrijs figuræ ſunt vel quadrilateræ, vt parallelipipeda, vel plurilateræ, vt priſmata, vel cylindricæ, propterea ſiquis promptè, ac demonſtratiuè

ſcire

ſcire amet quantum periſtromatis opus habeat circumueſtiendis columnis, habet ab antedictis modum expeditiſſimum. Ducto enim columnæ ambitu in altitudinem, prodetur numerus in menſuris partium, quæ requiruntur pro columnari amictu, & ornatu.

COROLLARIVM II

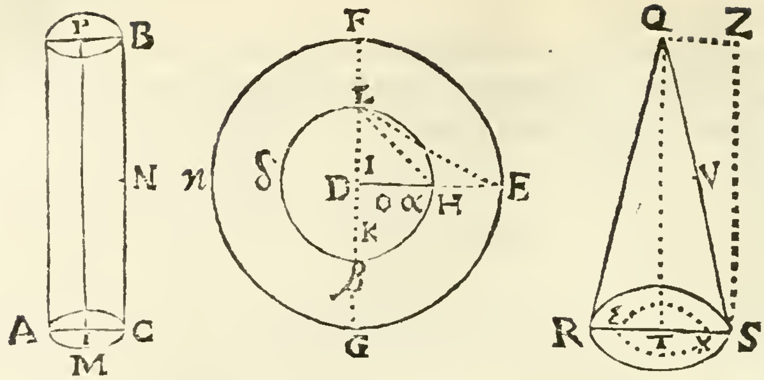
Ad Architecturam.

QVęritur: Quot lapides quadrati requiruntur, qui circulariter iuxta latera inter ſe commiſſi, putei cauam ſuperficiem conficiant? Solutionem habes ab antedictis. Vide fig. 2 ſec. 2. Domeſticis in hortis, vel atrijs puteus, velut EH, cylindricè eſt effodiẽdus; egeſtà terrà, fiet cauus cylindrus. Modis à nobis traditis in Apiar. 2, & ad 4 propoſ lib. 6, § 16 in 2 To. hu. Ærarij, ex oris cylindrici diametro perpẽdicularem profunditatem HF accipies, ac deinde peripheriæ quantitatem duces in acceptam profunditatem, ac prodibit numerus quadratorum lapidum cauam putei ſuperficiem planis quadratis conficientium & quantum expenſarum ſit opus cauæ puteali architecturæ.

PROBLEMA XVI.

Conicam ſuperficiem metiri ex eius ortu, & cum vſu geometrico centri grauitatis.

HAbes vnde conicam ſuperficiem metiare, cùm alibi, tum paullo ſuperius in probl. 2. antec. Quoniam



conica ſuperficies RQS oritur ex latere obliquo QS ducto per punctum medium, ſiue centrum grauitatis V in orbem circa QT, & V perpendiculariter cadit in X dimidiũ ſemidiametri TS, per ea, quæ habes indicata in cit. probl. 2. ſi duxeris quantitatẽ lateris QS in quantitatem peripheriæ XT: à pũcto X dimidiæ ſemidiametri TS ſignatæ, habebis quantitatem conicæ ſuperficiei. Adde baſis ſuperficiem, &c.

COROLLARIVM Militare

Pro Tentorijs.

DAtur altitudo haſtæ, quæ, quaſi columna media, ſuſtentatura eſt tentorium, datur à pede haſtæ ſemidiameter ambitùs, quem concludi ſit opus à Tentorio. Quantum requiritur telæ cõficiendo tentorio? Quoniam tentoria militaria fermè ſunt conicæ figuræ, ex numeris partium in haſtà, verb. gra. TQ, perpendiculari, & ſemidiametro rectum angulũ in T conficientibus duos fac quadratos numeros, & in vnam adde ſummam, & ex eà radicem quadratam elice, quæ erit latus obliquum QS, & oppoſitum recto angulo. Iam per prędicta in probl.

an-

anteced. 16, peripheriam ſignatam à puncto X medio ſemidiametri duc in quantitatē, ſeu numerū inuentum obliqui lateris, & productum erit quantitas tentorij ſuperficialis conici in mēſuris quadratis pro tela comparanda.

Auguſtiora aliqua tentoria ſolēt eſſe figuræ cylindricę maiori, ac inferiori ex parte, & ex reliquà ſuperiori tholum habent conicum. Habes in antecedentibus cylindricæ, & conicæ ſuperficierum dimenſionibus vnde ſcias telę quantitatem pro vtraq; tentorij parte, cylindrica inferiore, conicà ſuperiore circumamiciendà.

SCHOLION.

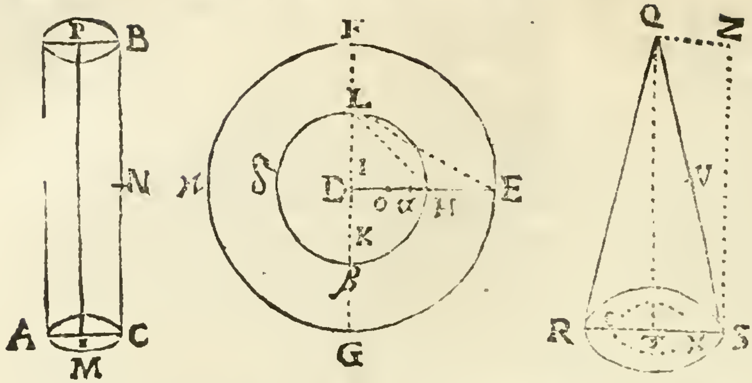
De dimenſione ſuperficiei pyramidalis.

VT videbis in 3 ſectione de regularis pyramidis, & regularium quinq́, ſolidorum ſuperficiebus dimetiēdis, quoniam pyramis eſt ſub planis triangularibus ſuperfiebus, eæ ſine vſu centri grauitatis, dimetiendæ ſunt ex regulis de dimenſionibus planarū ſuperficierum, quas habes in 1 To. huius Ærarij; &, vt prædictum eſt in anteced. probl. 13, 14, de priſmatibus, & parallelepipedis, in vnam ſummam additæ dimenſiones planorum circa pyramidem dabunt quantitatem ſuperficiei, &c.

PROBLEMA XVII.

Sphæricæ ſuperficiei dimenſio, ex eius ortu, cum vſu centri grauitatis.

ETiam ſine inueſtigatione centri grauitatis, habebis inferius alias dimēſiones facillimas ſuperficiei ſphæricæ. Ex quibus verò oritur, etiam dimenſa datur ſphærica ſuperficies, & è lemmate poſt probl. 7 habes ex ductu ſemiperipheriæ LHβ in peripheriam à cētro graui-



tatis *a* ſignatam produci quantitatẽ ſuperficiei ſphæricæ. Ibidem, ſiue inde habes etiam facilitati praxis conducens problema idem 7, dum in circulo GEF*κ* ex ductu ſemidiametri in peripheriam *β* HL *δ* ſignatam ab H centro ipſius DE, apertior fit dimenſio. Quam etiã modis vulgatis habes in eiuſdem circuli GEF *κ* areà dimẽsà ſine vſu centri grauitatis. In dimenſione circuli GEF*κ* habes ab vſu centri grauitatis facilitatem ex parte rectæ, ſiue ſemidiametri DE rotatæ, cuius quantitas facilior habetur, quàm curuæ LH*β* rotatæ &c. Itaq; *Ex ductu diametri in peripheriam circuli maximi habetur ſuperficiei ſphæricæ quantitas dimenſa.*

Regula dimenſionis pro ſphærica ſuperficie.

COROLLARIVM I.

Sphæricæ ſuperficiei cylindricam ſine baſibus æqualem ponere.

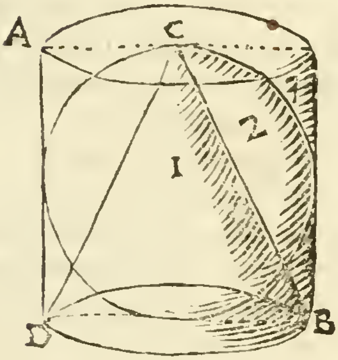
SCilicet cylindrus habens diametrum baſis, & altitudinem æquales diametro circuli ſphæræ maximi, habet etiam ſuperficiem æqualem ſuperficiei ſphæricæ. Nã idem eſt vel ducere diametrũ L*β* in peripheriam *β*HL*δ*, vel eleuare eandem peripheriam *β*HL*δ* in perpendicularem altitudinem diametri L*β*, ex qua eleuatione conflatur cylindrica ſuperficies, & ex ductu diametri L*β* in pe-

peripheriā βHLδ fit ſphærica ſuperficies, per anteced. 17 probl. Relege nos in fine lib. 3, § 2, num. 3, in 1. par. hu. to. 3.

COROLLARIVM II.

Cylindri ſuperficies ſine baſibus æqualis eſt ſuperficiei ſphæræ in cylindro inſcriptæ; at verò cum baſibus eſt ſeſquialtera, &c.

Superficies ſphæræ cuius cylindri ſuperficiei ſit æqualis.



PAtet apud nos facillimè ex antecedētibus id, quod & apud Archimedem ex indirectè demonſtratis. Cylindrus enim A B eſt, iuxta antecedens 1 coroll. habēs altitudinem, & diametrū baſis æquales diametro ſphæræ inſcriptæ, ac, ſine baſibus, habet æqualem ſphæricæ ſuperficiem. Quoniam verò, per lemma poſt probl. 7 antecedens, ſuperficies ſphærica eſt æqualis quatuor circulis eiuſdem ſphæræ maximis, & cylindri AB baſis vtraq; eſt duorum circulorum maximorū ſphęræ inſcriptę, ideſt vtraq; baſis cōtinet dimidium ſuperficiei ſphæræ inſcriptæ; igitur additis baſibus ſuperficiei cylindri A B, erit ea ſeſquialtera ſuperficiei ſphæræ inſcriptæ. Quemadmodum & ſoliditas eiuſdem cylindri AB eſt ſeſquialtera ſoliditati ſphærę inſcriptæ, vt videbis, cum alijs iucundis theorijs, inferius in Corol. 5 poſt lemma ad: Aliter 1 ſphęrę ſoliditatē metiri.

SCHOLION I.

P Atet & in numeris veritas corollar. 1. & 2 anteced.

Co-

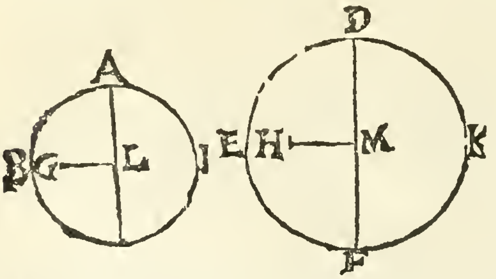
COROLLARIVM III

Aſtronomicum,& Geographicum.

Ex vsù præcedentis 17 problematis quanta ſit ſuperficies globorum Lunaris, vel Terreſtris.

1 HAbita vtriuſq; diametro, facilis eſt ſolutio quęſtionis ex antec. probl. Lunaris ſphæræ diametrum potes venari modo apud nos ſimpliciſſimo, Apiar.8, progym.3, propoſ.10,numero marginali 2, ſcilicet ſi quādo in plenilunio diſci lunaris radij excipiantur per exiguum feneſtræ foramen, velut ibi exemplum à nobis habes circa Solem, qui modus non minus certus eſt, quàm per dioptras, vt indicauimus in ſchol.3. Supponitur tamen nota diſtantia Lunæ à terris, quam vt habeas, relege § 26 ad propoſ. 4 lib. 6 in to.2 hu. Aerarij.

2 Terrenæ vero ſphæræ diametrum habes etiam apud nos (præter ea, quæ docuimus in Apiar. 2, & in Analectis ad 4 editionem eorumdem Apiariorum)in § 16 ad 8 propoſ. lib. 6. Vtráq; igitur habità diametro,vt vtriuſq; globi ſuperficiem obtineas modo non vulgato, ſcilicet per vſum centri grauitatis, operare iuxta ſequentia.



3 Vide quam inter ſe proportionē habeāt ſemidiameter, ver. gra. ME,& pars ſemidiametri à centro M vſq; ad centrum grauitatis ſemiperipheriæ DEF, puta vſq; ad punctum in medio literæ H (nam vſq; ad H eſt

H eſt centrum grauitatis,non ſemiperipheriæ,ſed ſemicirculi DFE) quam linearum proportionem, ac differentiam facillimè noſces ex circino proportionum, iuxta modum, quem docuimus in § 6 ad prop 1 lib. 6.

Poſt hæc per regulam auream applica differentiam rectarum ME, M vſq; ad intra H, ſemidiametro Terræ, ac Lunæ ſic: ſi ME dat M vſq; ad intra H, quid dabit terræ ſemidiameter? (quam habes in numeris in locis apud nos citatis) ac prodibit quartus numerus proportionalis, qui erit diſtantia à centro terræ vſq; punctum centri grauitatis ſemiperipheriæ terreſtris. Pariq; ratione per regulã auream operare circa Lunæ ſemidiametrum. Ex quibus ſemidiametris, ſiue diametris, velut AC pro Luna, DF pro Terra triplicatis cum fere ſeptima diametri parte habetur ambitus circuli maximi circa Terram, & Lunam. Accipe igitur dimidium ambitus vtriuſq;, velut ABC, DEF, & numerum vnius, verbi gr. ipſius DEF terreni, duc in numerum rotationis factæ à centro grauitatis intra H, ſcilicet duplicando diſtantiam ab intra H ad M, & duplicatam triplicando, cum additione ferè ſeptimæ partis, ac productus numerus dabit ſuperficiem orbis terræ. Pariq; modo pro ſuperficie orbis Lunæ. Ex hac noſtra manuductione vt aliquid induſtriæ tuæ, mi Tyro, relinquatur; progreditor tu ad exempla indicata in numeris à te inueniendis.

SCHOLION II.

Aliter, ac breuiter, duc diametrum orbis terræ, vel Lunæ in ambitum (inuentum è triplicata diametro, &c.) circuli maximi &c. ac habes vtriuſq; globi ſuperficies.

Vide etiam aliter 2, ac faciliora ad praxim poſt ſequentia corol.

Co-

COROLLARIVM IV.

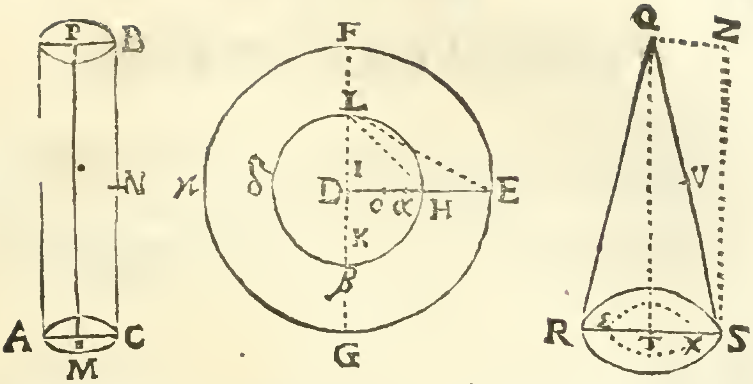
Solidorum elementarium vnam in turrim conſtructio, ac — Vſus organicus in Machinaria, & Architectura ex anteced. probl. 17. Praxis etiam organica inueniendi centrum grauitatis ſemiperipheriæ.

ORganicus, inquam, vſus, quia organicum modum indicabo inueniēdi centri grauitatis intra æream ſemiperipheriā. Eſt Templi aliqua turris extructa quaſi priſma, atq; parallelepipedum, & propè ſupremam eius partem, vbi campana æra, columellæ, quaſi cylindri, circumpoſitæ ſunt. Supremæ quadratæ partis angulis pyramides impoſitę ſunt, quas inter exurgit tholus in iſoſcelis coni ſuperficiem. In ſummo coni, ſiue tholi apice imponenda eſt caua ſphęra ærea, cuius ſemidiameter nota eſt. Quæritur quātum ęrearum quadratarum laminarum ſphæricè curuandarum ſit opus pro ſuperficie conſtruendæ illius cauæ ſphæræ?

Vidiſtin' interim, ò Tyro, geometricam turrim ex elementaribus ſolidis ædificatam? Immo verè, ac phyſicè turres, præſertim ſacræ, atque Eccleſiaſticæ, nihil aliud oculis geometricis oſtētant, quàm ſtructuram, & compendium ex vndecimi, & duodecimi librorū elementariorum ſolidis compactum.

Sed ad cauam ſphæram conflandam, & vertici turris conici acuminato imponendam accedamus. In primis è data diametro elicienda eſt quantitas ſemicircularis peripheriæ, èaque formanda eſt è tenui, ac firmo filo æreo, cuius centrum grauitatis facilè, ac organicè ſic inuenies.

Puta



Puta LHβ eſſe filum æreum ſemiperipharicè incuruatum, cui cartaceum planum ſuffige. Deinde ſuſpende ex puncto L ita, vt libere pendeat LHβ, & alterum extremum β deferatur extra locũ β, è puncto ſuſpenſionis L perpendiculum filo ſuo ſecabit ſemiperipheriam inter Hβ, ſignabitq; in plano cartaceo lineam perpendiculi. Rurſus ſuſpende ex β ſemiperipheriam liberè pendentem, & ex β perpendiculi filum vbi ſecabit lineam ſignatam in plano cartaceo, velut per α, ibi erit centrum grauitatis ſemiperipheriæ æreæ. Quod centrum neceſſarium eſt ad ſequentia. Nam eius diſtantia perpendicularis à diametro iungente extrema Lβ duplicanda eſt, tum tota triplicãda cum additione ferè ſeptimæ partis, vt habeatur numerus, in quem ducta quantitas ſemiperipheriæ æreæ producet numerum indicem quantitatis, ac numeri laminarum ærearum quadratarum ſphæricè incuruandarum, quibus opus eſt ad cauam ſphæram conflandam, & imponendam vertici coni turriti, &c. Applica prædicta praxi mechanicæ tu, ò quicumq; in philoſophationibus geometricis mauis praxes mechanicas.

COROLLARIVM V, &

Regula vniuerſalis pro inueniendo centro grauitatis organicè quarumcumq; irregularium linearum ad artium plurimarum operationes.

SImilem in modum, quo vſi ſumus in Corollar. 4 antecedenti, pro pluribus operationibus artificem licebit datę cuiuſcumq; lineæ irregularis centrum grauitatis organicè inuenire. Exempli gratia pro dimenſione, vel conſtructione vacuæ lampadis in templo, vel ſuperficiei campani æris in turri, transfer in lineam æream formam curuaturæ, quam habet ſuperficies vaſis dimetiẽda, vel conflanda, ſcilicet à vertice axis ad labrum, & æreæ lineæ affixo leuiſſimo plano, velut cartaceo (vt in eo ſignari poſſit punctum centri grauitatis) per geminam ſuſpenſionem ab extremis lineæ etiã irregulariter inflexæ, & ope perpendiculi centrum grauitatis inuenies. Deinde pro forma dimetiendæ, vel conflandæ ſuperficiei metiere diſtantiam perpendicularem centri inuenti ab axe, circa quem concipienda eſt gyrari linea ærea, ſiue illa vtroq; ſui extremo hæreat axi, vt ſemiperipheria pro ſuperficie ſphærica; ſiue altero tantum extremo, vt latus coni rotatum. &c. Ac reliqua operare, vt in conicà, & ſphæricà ſuperficie. Expreſſiora vide apud noſtrum Guldinum. Arcanum hoc vniuerſaliſſimum vſùs geometrici centri grauitatis licet libentiſsime vulgemus, tamen etiam requirimus aliquam induſtriam Lectoris, ne tam præclarum inuentum vileſcat apud ignauos.

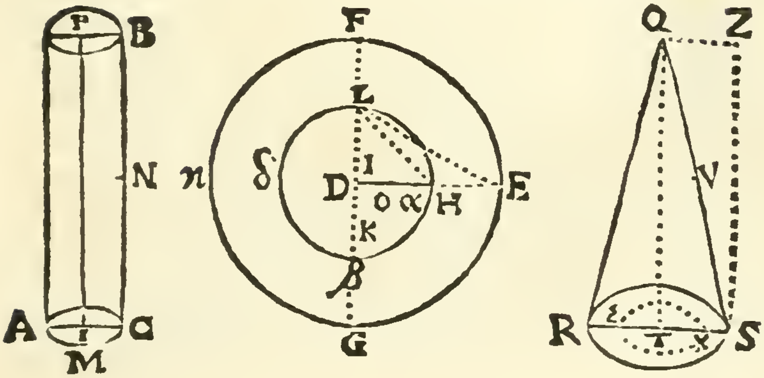
Organicæ operationis, pro inueniendo centro grauitatis, habes apud nos geometrica firmamẽta ad 1 prop. lib. 3. elem.

Probl.

PROBLEMA XVIII.

Aliter

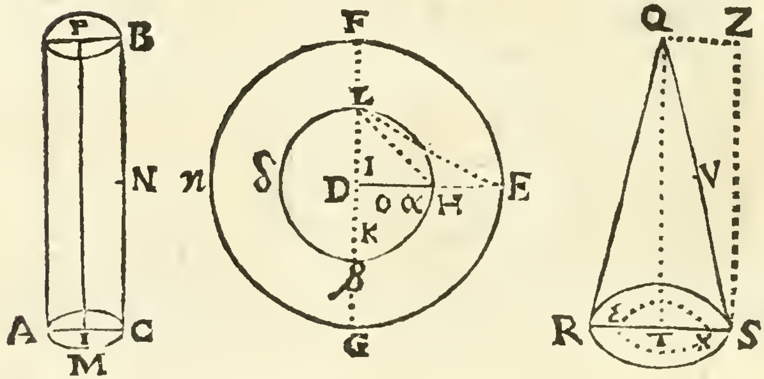
Sphæricam ſuperficiem metiri.



PRopter eximia corollaria lubet, ac iuuat addere ſecundum etiam hunc modũ duplicatam ſphæræ, vel circuli maximi diametrũ Lβ, nempe ipſam FG duc in ſemiperipheriã LHβ, & productũ erit ſuperficies ſphæræ δLHβ. Nam vt in anteced. probl. 17, DE, vel L diameter ducta in totã peripheriam HLδβ dedit ſuperficiẽ ſphæræ, ſic duplicata diameter hic ducta in dimidiam peripheriam dat eandem ſuperficiem. Patet etiam in numeris, ac magis è ſequentibus liquebit.

COROLLARIVM I.

Superficies ſphærica eſt æqualis ſuperficiei ſine baſibus ſemicylindri, ſiue cylindri diſſecti iuxta axem, & habentis pro baſe ſemicirculum ſphęrę maximum, & pro altitudine duplicatam ſphæræ diametrum.



QVemadmodum enim (iuxta corollarium primum poſt probl. 17) ex eleuatione totius peripheriæ LHβδ in altitudinem diametri Lβ conficitur ſuperficies cylindri æqualis ſuperficiei ſphæræ Lδβ H, ſic ex eleuatione ſemiperipheriæ LHβ in altitudinem perpendicularem duplam ipſius Lβ, hoc eſt in FG, fit ſemicylindri ſine baſibus ſuperficies æqualis ſuperficiei eiuſdem ſphæræ βδ LH, &c.

Co-

COROLLARIVM II.

Inuenire quantitatem rotationis, in quam gyrata ſemiperipheria LHβ circa diametrum Lβ producit ſuperficiem ſphæræ.

IPſis ſphæræ, ſiue circuli ſphæræ maximi, diametro DE, ſiue Lβ velut 2, & peripheriæ LH$\beta\delta$ velut 4, & ſemiperipheriæ LHβ velut 2, inueniatur quarta proportionalis FG 4, ideſt dupl. Lβ, quæ eſt quantitas rotationis, in quam gyrata ſemiperipheria LHβ circa Lβ producit ſuperficiem ſphæræ.

Nam per antecedens corollarium ſemiperipheria LHβ eleuata in FG dat ſuperficiem æqualē ſuperficiei ſphæricæ, cui & æqualem dat ſuperficiem èadem ſemiperipheria LHβ ducta in gyrationem ſignatam à centro grauitatis eiuſdem LHβ, iuxta regulam, & vſum geometricum centri grauitatis, ergo ſi auferatur communis LHβ eleuata, & gyrata, remanent æquales eleuatio FG, & gyratio centri grauitatis, &c. per axio. 3.

COROLLARIVM III.

ETiam ſine cognitione centri grauitatis ſemiperipheriæ, ſcitur quantitas rotationis, quam ſignat id centrum in rotatione ſemiperipheriæ ex anteced. coroll. 2, vi quartæ proportionalis, inuentæ, iuxta num. ibi poſitos.

COROLLARIVM IV.

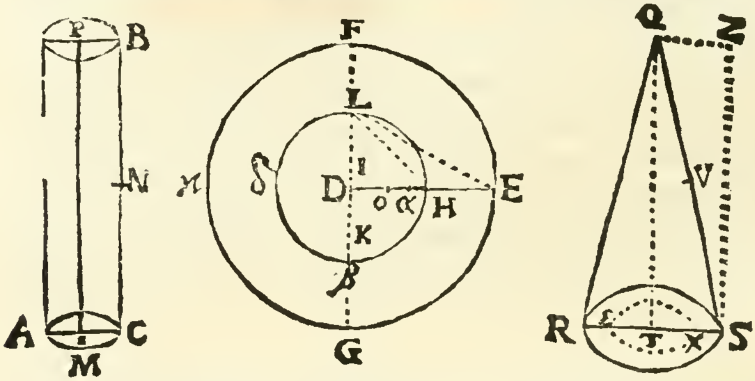
Recta linea peripheriæ circuli æqualis; etiam ſine ſpiralibus Archimedis,

CVius theorema 11 ſpiral. ſæculis omnibus admirationi fuit, in quo (licet indirecta demonſtra-

tio-

tione) concludit lineam rectam, quæ ſpiralem tangat. &c. eſſe circuli peripheriæ æqualem. Noſtrum hocce corollarium 4 idē aſſequitur ſine volutis illis inuolutis (aut alijs, ſi quæ ſunt antiquorum ad hoc theorema, inuentis,) quarum deſcriptio geometrica, & ad eas rectæ contactus in problemate non adhuc præcisè conſtant; eſtq; ingenioſum id inuentum prorſus in theoremate. Nos hic ex antecedētibus corol. 2, & 3 expreſsā vi ax. 3, & quar. proportionalis *duplicatam circuli diametrum damus, quæ æqualis eſt peripheriæ, in quam rotata circuli ſemiperipheria ſphæricam ſuperficiem producit.* Series propoſitionum eſt hæc: *ſphæræ ſuperficies* (ex Archimedis licet indirecta demonſtratione) *quadrupla eſt cir-*

Nota propoſitionem.



culi maximi LHβδ, hoc eſt æqualis circulo FEGκ. Deinde (etiam ſine Archimede de dimenſ. circ.) ex vſu, & regula geometrica centri grauitatis, eiuſdem *circuli FEGκ ſuperficies habetur ex ductu ipſius DE, ſiue Lβ, in peripheriam Lδβ H, ſignatam à centro grauitatis H rectæ DE*; ſiue *ex eleuatione peripheriæ Lδβ H in perpendicularem altitudinem diametri βL*; ſiue *ex eleuatione ſemiperipheriæ LHβ in duplicatam diametrum FG*; ſiue *ex eadem ſemiperipheria LHβ rotatà circa diametrum Lβ, & auctà in rotationem æqualem ipſi FG duplæ diametri Lβ*, vi ax. 3, & quar. proportionalis, iuxta coroll. 2 & 3 antecedētia.

Propter quidem problema de circuli quadratura, & alia plura, quatenus ad ea poteſt conducere, hoc theorema maximi ſemper factum eſt in Geometrica acutiſſima phi-

philoſophia;tamen etiam ſine vllo ad problemata ordine, per ſe admirandum eſt vt purè theorema, quo datur cognitio (& quidem apud nos expreſsa in duplicata circuli diametro, &c.) proportionis æqualitatis curuæ circularis lineæ cum recta.

Gaudeo finem huiuſce 2 § de dim.ſuperf.circa ſolida element. à nobis factũ in hoc tam eximio corolla rio. Cui tamen adde & ſequentia Scholia.

SCHOLION I.

Ad circuli quadraturam noui aditus.

QVantum momenti ad problema de circuli quadratura conferat hoc noſtrum theorema indicatum in antecedenti 4 corollario, permittimus ſcientificæ prouidentiæ docti, & amici lectoris. Patet etiam expreſsior, & expeditior modus, ac vſus quadratricis ad circuli quadraturam, quem eius mixtæ lineæ inuẽtores non diuinarunt. Nam notato puncto ſignato (quatenus poſsit) à quadratrice in ſemidiametro circuli LHβδ vbi α, ſi ducatur circulus, erit eius circuli peripheriæ ipſi æqualis duplicata diameter circuli LHβδ, ac proinde circulus per α ductus quadrari poterit.

Iuxta § 2, &c. ad prop. 45 lib. 1 in 1. To. hu. Ærar. ducta ſemidiameter Dα, circuli deſcripti per α, in Lβ diametrum circuli LHβδ, dat aream rectanguli æqualis areæ circuli ex Dα ſemidiametro. &c.

Ac datum etiam circulum quadrabis, velut ipſum LHβδ, ſi in H conſtituas punctum quadratricis alterius circuli, cuius duplicata diameter erit æqualis peripheriæ ipſius LHβδ, quemadmo dum eiuſdẽ LHβδ duplicata diameter eſt æqualis peripheriæ circuli per punctum α quadratricis deſignati. Enitere, mi Tyro, in apertos tibi à nobis aditus.

SCHO-

SCHOLION II.

Ad Praxen, & applicationum facilitatē.

HIc proxime antecedentia in probl. 18, & corollar. licebit applicare facilius praxibus Aſtronomicis, Geographicis, Architectonicis, quas habes in corollarijs poſt probl. 17, quia hic minuitur etiam labor inueſtigandi centrum grauitatis.

SCHOLION III.

Vniuerſalia ad dimenſiones quarumcumq; ſuperficierum etiam vltraelemētarium numero infinitarum, &c.

QVæcumq; ſuperficies fiunt ex gyratione quarumcumque imaginabilium etiam irregularium linearum, habent ſuam dimenſionem ex unicâ regula aurea Guldini, ſcilicet ex ductu gyratæ lineæ in peripheriam ſignatam à centro grauitatis gyratæ lineæ.

SCHOLION IV.

ALia circa ſuperficies elementari rum ſolidorum vide apud nos ad propoſ. 14, 15, 20, 23 lib. 6. in To. 2.

§ III.
Solidorum Elementariorum ſolidæ dimenſiones.

IAm à problematibus, & dimenſionibus ſuperficiarijs ſolidorum elementariorum veniamus ad ſolidas, ſeu ſoliditatis eorumdem dimenſiones, ac ſint —

— *PROBLEMATA XIX, XX, XXI.*

Parallelepipedi, Priſmatis, Cylindri ſoliditates metiri ex eorum ortu.

E Theorematibus in 1 ſect. patet dimenſio ſoliditatis trium hìc propoſitorum ſolidorum elementarium. Nam quemadmodum peripheriæ baſium perpendiculariter eleuatæ dant ſuperficiem ſine baſibus, ita plana ipſa baſium eleuata perpendiculariter dant ſoliditatem. Itaq; baſis planam quantitatem duc in altitudinem perpẽdicularem Parallelepipedi, Priſmatis, Cylindri, ſiue rectorum, ſiue obliquorum, & prodibit in numero producto ſoliditas earum trium figurarum. In 1, & 2 fig. tab. ſect. 2, eleuatæ baſes B, CD, EF, in BA, DG, FH dant ea ſolida dimenſa.

COROLLARIVM, &
Exemplum in liquidis, vel aridis vaſorũ figuræ ſe conformantibus. Hallucinationi lux.

SI vas vitreum, lapideum, æreum, ligneum, &c. ſit figuræ alicuius è tribus ſolidis in antec. probl. 19, 20, 21, poſitis, habes ex regula dimetiendorum eorundem

ſolidorum vnde etiam metiare incluſa vel liquida, vel arida vaſis ipſis configurata.

Notandum tamen eſt,& cauendum ab hallucinatione in practicis menſurationibus incluſarum rerum, &c. Nam liquida, & arida, quorum partes ſunt vel continuæ, vel ſaltem prorſus contiguæ, veniunt ſub exactam menſuram vaſis, velut liquida, puluerea, cinis, farina,&c. At arida, quorum particulæ, licet minimæ, figuratæ ſunt, velut grana frumenti, vel minutiorum leguminum, admittunt menſuram, quæ diſſonat ab incluſorum numero,& multitudine.

Itaq; acceptâ peripheriâ ſacci, quaſi cylindri, ac inde conflato plano, quaſi baſis, circulari, ſi numerum baſis ducas in ſacci altitudinẽ, productus numerus indicabit quot in cubulis,ſiue pro quot cubulis grana incluſi frumenti ſint. Quæ tamen in ſacco diſpoſita ſunt non cubicè, ſed fortuitò, & denſata ita, vt minus loci occupent, & plura ſint in ſacco, quam indicat numerus ſoliditatis.

PROBLEMATA XXII, & XXIII.

Pyramidis, & Coni ſoliditates metiri.

INſpice figuram 3 in tab.hu. 2. ſect.vbi Pyramis AFB, Conus CHD. Quorum ſolidorum menſuram quî liceat accipere ab eleuatione perpendiculari baſium? cum baſes quanto magis attolluntur, tanto ſemper magis excedant terminos laterũ vtriuſq; figuræ in angulum cocuntium? Nihilominus tamen, mi Tyro, etiam vtriuſque ſolidi mẽſuram diſcemus è baſium ductu in axis, ſiue perpendicularis altitudinis partem aliquam. At quænam illa? Reuiſe in ſect. 1 huius Breuarij theoremata 14, & 15, in quibus partim indicauimus, partim expoſuimus noſtras demonſtrationes de cono, & pyramide quòd ſint tertiæ partes ſuorum cylindrorũ, vel priſmatũ.Itaq; ſi pyramidis AFB baſis AB eleuata in totam perpendicularem

EF

EF producit totum priſma, ergo eleuata in tertiam partem perpendicularis EF producet tertiam priſmatis partem, ideſt ipſam pyramidem, cuius ſoliditas æqualis eſt tertiæ parti priſmatis eandem baſim AB, & altitudinem perpendicularem EF habentis.

COROLLARIVM, & exempla practica militaria, & ruſtica.

EST in areà tritici, ſiue leguminum, eſt in caſtris pilarum, pro minoribus, vel maioribus tormentis, aceruus conicæ, vt aſſolet, figuræ. Quot in vtrouis aceruo vel grana, vel pilæ ſunt tormentariæ? Ante omnia enitere vt latera acerui ſint quam fieri poteſt conicè directa. Tum, quantum fert phyſica materia geometricam formã, ſic operare. Ingere per verticem acerui frumentarij perpẽdicularem haſtam, ac nota ad quam haſtę quantitatem pertingant ſuprema grana. Accipe mox ambitum baſis in imo aceruo, & ex eo, per dicta ſępius in hoc Ærario, cõfice quantitatem circuli, cuius numerum duc in partem tertiã haſtæ, quam frumenti aceruus occuparat; habebis in producto numerum granorum in aceruo. Sint tamen eiuſdem menſuræ partes haſtæ, & baſis acerui.

Similia effice circa pilarum aceruum cum cautionibus, quas ab operãtis diligentia requirunt materiæ incõmoda.

Menſura intelligenda eſt iuxta cauta in corollario poſt problemata anteced. 19, 20, 21. numerus enim granorum, & pilarum in aceruis intelligendus eſt de granis, & pilis cubicè diſpoſitis. Itaq; plus aliquid erit granorum, & pilarum in vtroq; aceruo, quam indicet numerus, &c.

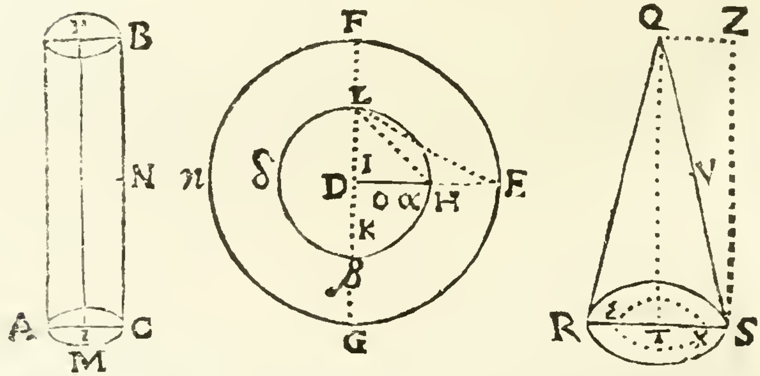
SCHOLION.

Dimenſiones ſolidorum etiam obliquorũ, &c.

VElut in fig. 3, 4, tab. ſec. 1, eleuatio baſis fit perpendiculariter etiam in cylindris & conis obliquis. Sic in parallelep. priſm. pyram non rectangulis, &c. perpendicularis eleuatio baſium dat eorum ſoliderum quantitates dimenſas.

PROBLEMA XXIV.

Sphæræ ſoliditatem metiri.



DVc duas tertias partes duplicatæ diametri in ſemicirculum, & productum erit ſphæræ ſoliditas in tot cubulis, quot numerus productus indicabit.

Quoniam .n. ex Guldino lib. 1. c. 9, centri grauitatis O in ſemicirculo LβH (diuiſà diſtantià centri grauitatis α ſemiperipheriæ LHβ à diametro Lβ in tres partes æquales) diſtantia ab Lβ eſt duarum tertiarum ipſius Dα, &, per lemma, & theorema in §. 19 Epilogi noſtri planimetrici, vt ſemidiametri DO, Dα, rotationum à centris grauitatis factarum

ctarum, ſic ſunt inter ſe & ipſæ rotationes; erit ergo rotatio à centro O duarum tertiarũ rotationis à cẽtro α. At rotatio ab α eſt (per corol. 2 probl. 18 antec.) æqualis duplicatę diametro circuli ſphærę maximi, ergo rotatio ab O erit duæ tertiæ duplicatæ diametri, nempe ipſius FG. Producitur autem ſphęrę ſoliditas ex ductu ſemicirculi LβH in rotationem factam à centro grauitatis O, iuxta regulam auream Guldini congruentem (vt in ſequentibus pluribus corollarijs videbis) cum demonſtratis ab Archimede, & ab alijs omnibus geometricè, ac ſolidè philoſophantibus; ergo ductus ſemicirculus LβH in duas tertias duplicatæ diametri ipſius ſemicirculi producet ſphærę ſoliditatem. In numeris videbis inferius in probl. 26.

COROLLARIVM.

Sphæra eſt æqualis ſemicylindro, ſiue cylindro biſecto iuxta axem, habenti pro baſe ſemicirculum, & pro altitudine duas tertias duplicatæ diametri eiuſdem ſemicirculi.

IDem enim ſemicirculus LβA eleuatus perpendiculariter in duas tertias ipſius FG conficit eandem ſoliditatem, quam & gyratus in peripheriam ab O, quæ & ipſa eſt duarum tertiarum ipſius FG, per probl. 24 antecedens. *Cui ſemicylindro, vel cylindro ſit æqualis ſoliditas ſphæræ.*

SCHOLION.

Ad praxes militares, ac alias.

VIde quæ in 2 To. huius Aerarij attulimus ad propoſ. 20 lib. 6, § 12, 23, 36, in vſus varios, præſertim militares, quibus prodeſt dimenſio, & cognitio ſoliditatis ſphæricæ.

ricæ. Ac etiam pro Aſtronomicis circa dimenſiones ſolidas globorum cæleſtium. &c.

PROBLEMA XXV.

Aliter I —

— Sphæræ ſoliditatem metiri.

DVc duas tertias diametri in circulum, & prodibit ſphæræ ſoliditas. Patet quaſi pro corollario ex antecedenti proximè Corollario probl. 24. Idẽ enim producitur ex ductu duarum tertiarũ diametri (ideſt dimidij duarum tertiarum duplicatæ diametri) in totum circulum, quod ex ductu duarum tertiarum duplicatę diametri (ideſt ex duplicatis duabus tertijs diametri) in dimidium circulum. Vt per ſe patet, ac etiam in numeris.

COROLLARIVM.

Cui cylindro ſphæra ſit æqualis.

Sphæra eſt æqualis cylindro habenti pro baſe circulum ſphæræ maximum, & pro altitudine duas tertias diametri.

COrollarium eſt hoc è corollario probl. 24. antecedentis, eritq; nobis vſui etiam pro transformationibus ſolidorum. Vide probl. 28 inferius.

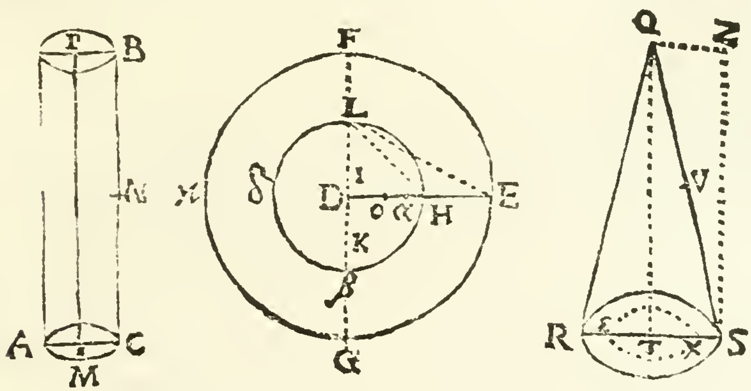
Pro-

PROBLEMA XXVI.

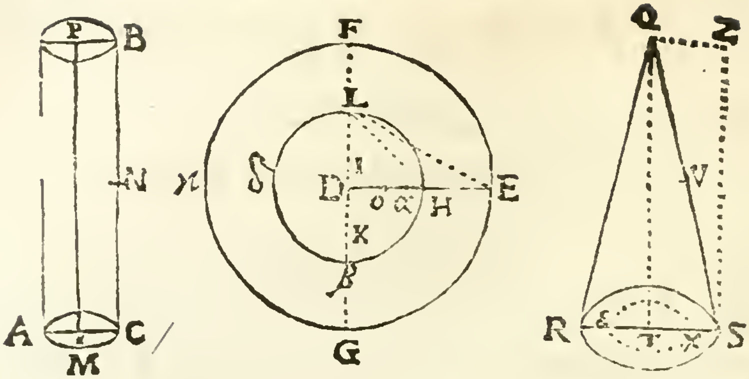
Aliter II –

– Sphæræ ſoliditatem metiri.

DVc tertiam partem ſemidiametri in ſphæræ ſuperficiem, & habebis datæ ſphæræ dimenſam ſoliditatem. Quam etiam tertiam noſtram regulam non vidi ab alio vſurpatam, eritque nobis pro campo metiendæ vberrimæ ſegetis eximiorum corollariorum.



Sphærę LHβδ ſemidiameter LD diuiſa in tres partes, habeat pro vna tertia ipſam DI, & ſit, pro ſphæræ ſuperficie, quadruplus circuli ſphæræ maximi circulus FEGκ; ſi fingas cylindrum habentem pro baſi circulum FEGκ, & pro altitudine tertiam ſemidiametri partem DI, erit ille cylindrus æqualis ſemicylindro habenti pro baſe ſemicirculum LβH, & pro altitudine duas tertias ipſius FG, nempe ipſam FK. Nam baſes FEGκ, LβH, & altitudines FG, DI reciprocantur. diuiſa enim FG in partibus vnius DI, dabit 12 partes æquales, qualium vna eſt DI. Duæ verò tertiæ ipſarum 12 dant 8 partes ab F ad K. & quoniam circulus FEGκ è ſemidiametro DE dupla ſemidiametri DH eſt (ex corollar. noſtris ad 20 prop. lib. 6) quadruplus cir-



circuli LHβδ, ergo ſemicirculi LβH erit idē FEGκ octuplus. Vt ergo baſis FEGκ ad baſim LβH habet proportionem 8 ad 1, ſic reciprocè altitudo FK 8 ad altitudinem DI quæ eſt 1 vna tertia ſemidiametri LD. ergo cylindrus ſuper baſi FEGκ, & altitudinis DI tertiæ partis ſemidiametri, eſt æqualis ſemicylindro ſuper baſi LβH, & altitudinis duarum tertiarum ipſius FG; at is ſemicylindrus, per corollar. probl. 24 antec. eſt æqualis ſphæræ LHβδ, ergo & cylindrus habens pro baſi circulum æqualem ſphæricæ ſuperficiei, & pro altitudine tertiam partem ſemidiametri eſt & ipſe æqualis ſphæræ. Ducta ergo tertia pars ſemidiametri in ſphærę ſuperficiem dat ſphęrę ſoliditatem.

SCHOLION I.

Praxì facilitandæ.

QVoniam in prōptu eſt maximus ſphæræ circulus LHβδ, eius quantitas quadrupletur, & ea multiplicetur per vnam tertiam partem ſemidiametri, vt ſphæræ ſoliditas facilè ſciatur.

Co-

COROLLARIVM I.

Sphæra æqualis eſt cylindro habenti pro baſe circulum æqualem ſphæricæ ſuperficiei, & pro altitudine tertiam partem ſemidiametri eiuſdem ſphæræ. *Aliter cui cylindro ſphæra ſit æqualis.*

QVod latet in demonſtratione problem. 26 antec. hìc patet eductum.

COROLLARIVM II.

Conus habens pro altitudine ſemidiametrum ſphæræ, & pro baſe circulum æqualem ſuperficiei eiuſdem ſphæræ, æqualis eſt ipſi ſphæræ. *Cui cono ſphæra ſit æqualis.*

QVam propoſitionem indicat, non demõſtrat Pappus lib. 5 propoſ. 19, habes in antecedentibus demonſtratam. Finge conum ex triangulo DLE, cuius altitudo DL ſemidiameter ſphæræ, baſis GEFκ æqualis ſuperficiei ſpheræ LHβδ: eſt ille conus æqualis cylindro ſub ID, DE, ergo & ſphæræ, per problema anteced. nam cylindri ſub DL, DE tertia pars eſt conus ex triangulo LDE, per theor. 14, in ſect. 1. hu. Breuiar. Eiuſdem cylindri ſub LDE tertia pars eſt cylindrus ſub IDE, ergo conus ex triangulo LDE, & cylindrus ſub IDE ſunt æquales, ac vterq; ſpheræ LHB æqualis.

SCHOLION.

Aliter, cui cono ſphæra ſit æqualis.

Conus habens pro baſe circulum ſpheræ maximum, pro altitudine duplicatam diametrum, eſt æqualis datæ ſphæræ.

HOc quod eſſe poſſet pro corollario hìc ſecundo, nobis vſui etiam erit in § 4 problemate 1, vbi de ſolidorum transformationionibus; ibi enim aptè nobis inſeruiet trāsformationi, quemadmodum hìc ſaltem indicatum inſeruire poteſt dimenſioni datæ ſphæræ.

COROLLARIVM III.

Cuius coni ſphæra ſit quadrupla.

Propoſitio 31 lib. 1 Archimedis de ſphæra, & cylindro demonſtrata directè ex antecedentibus, ſcilicet: *Sphæra quadrupla eſt coni habentis pro altitudine ſemidiametrum ſphæræ, & pro baſi circulum eiuſdem ſphæræ maximum.*

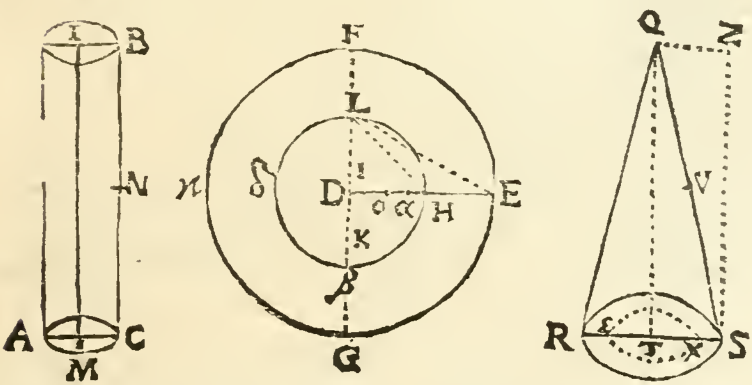
QValis eſt conus ex triāgulo LDH. Quoniam enim eiuſdem altitudinis DL coni ex triangulis LDH, LDE ſunt inter ſe, vt baſes per theoremata in § 4 ſect. 1 hui. Breuiar. & baſis circularis ex DE eſt quadrupla baſis ex DH, eſt etiā ſoliditas coni ex LDE quadrupla ſoliditatis coni ex LDH; at conus ex LDE, per anteced. 2 coroll. eſt æqualis ipſi ſphæræ LHθδ, ergo & eiuſdem ſphæræ ſoliditas eſt quadrupla coni ex LDH. Igitur habes hìc directa demonſtratione, breui, facili, ex antec. pro coroll. probatū id, quod indirectè Archimedes. &c.

Co-

COROLLARIVM IV.

Corollarium propoſit. 31 lib. 1 Arch. de ſphęrà, & cylindro expeditum ex anteced. ſcilicet.

Cylindrus habens pro altitudine diametrum ſphæræ, & pro baſi circulum eiuſdem ſphæræ maximum, habet ad eandem ſphæram proportionem ſeſquialteram. *Cuius ſphæræ cylindrus ſit ſeſquialter.*

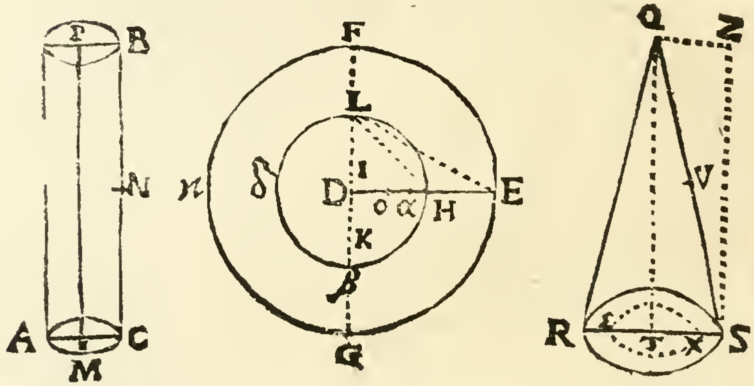


CYlindrus habens pro baſe circulum ſphæræ maximum LHβδ, & pro altitudine ſemidiametrum DL eſt triplus coni ex LDH; ergo cylindrus habens eandem baſim LHβδ, & altitudinem totius diametri Lβ, ideſt DF duplam altitudinē ipſius DL, cum ſit duplus cylindri ſub LDH, continebit ſex conos ex LDH. At per antecedens corollarium conus LDH eſt æqualis quartæ parti ſphæræ LHδ, ergo cylindrus ſub FD (ideſt ſub diametro Lβδ, quæ ipſi FD eſt æqualis) & ſub DH continet ſex quartas eiuſdem ſphęrę; ideſt ſphęram ſemel ex quatuor quartis, & dimidium ex duabus quartis; hoc eſt ſeſquialteram habet ad ſphæram LHβδ proportionem.

COROLLARIVM V.

Cuius coni ſphæra ſit dupla.

Sphæra ad Conum habentem pro altitudine diametrum eiuſdem ſphæræ, & pro baſi circulum eiuſdem ſphæræ maximum, habet proportionem duplam.



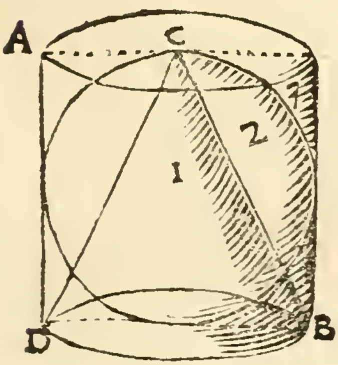
Conus habens pro altitudine diametrum Lβ, & pro baſi circulũ LHβδ, eſt duplus coni ex LDH, quippe habens eandem baſim, & duplam altitudinem. At conus ex LDH eſt æqualis quartæ parti ſphęræ, per coroll. 3 anteced. ergo conus altitudinis Lβ, & baſis LHβδ erit æqualis duabus quartis, ideſt dimidiæ ſphæræ, &c.

Co-

COROLLARIVM VI.

Trium ſolidorum rotundorum elementarium eiuſdem altitudinis, inſcriptiones, ac dimenſiones inter ſe ordinatiſſimæ ex antedictis, iuxta numeros 1, 2, 3.

Conus, & ſphæra in cylindro, eorum proportiones.



QVemadmodũ è quinque generibus ſolidorum elementariũ turrim geometricam cõſtruximus, in coroll.4, probl.17, ſic ſaltem trium rotundorũ cõglobationẽ, ſcilicet ſphæræ, & coni cylindro inſcriptorum proportiones, & dimenſiones per ordinatiſſimã progreſſionem numerorum concludamus.

Vides in figura cylindrum AB, conum BCD, & ſphæram, ſolida habentia eandem cum ſphærà altitudinem, & pro baſi communi circulum eiuſdem ſphærę maximum, & conum, ſphęramq; cylindro inſcripta: eſtq; ex antedictis proportio coni 1 ad ſphæram 2, ſphæræ 2 ad cylindrum 3, & è cylindro in tres ęquales partes diuiſo conum auferre vnam, ſphæram duas. Sunt ergo inter ſe in proportione, ac progreſſione naturalis numerorum triadis 1, 2, 3.

SCHOLION I.

E*Iuſdẽ cylindri AB ſuperficies eſt ſeſquialtera ſuperficiei ſphæræ. Relege Corollar. 2, problem. 17 anteced.*

Gaudeo

Gaudeo finem hic factum dimenſionum Stereometricarum in trium pulcherrimorum ſolidorum proportionatiſsima complexione.

SCHOLION II.

ERit nobis vſui pro transformationibus ſolidorum antecedens corollar. 6, ne putes eſſe ſterilem, licet per ſe expetendam, in eo theoriam.

SCHOLION III.

Aliter III.

Soliditatem ſphæræ metiri.

SCilicet per conuerſum antecedentis problematis 26, ducendo ſemidiametrum in tertiam partem ſuperficiei ſphæræ; idem enim euenit: experire, ſi lubet, ſaltem in numeris.

SCHOLION IV.

Vniuerſalia pro dimenſionibus ſolidorum numero infinitorum, &c. vltra-elementarium.

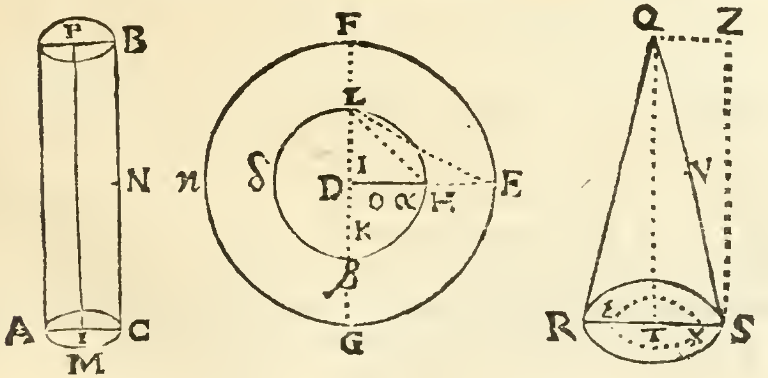
QVæcunque ſolida fiunt ex rotatione quoruncunque planorum quantumuis irregularium, habent ſuas dimenſiones ex vnica regulà aurea Guldini, ſcilicet ex ductu quantitatis plani in peripheriam ſignatam à centro grauitatis plani rotati.

§ IV.
De tranſformationibus ſolidorum.

PLeræq; ſolidorum transformationes quaſi corollaria ſunt ex § 3 antecedenti, vbi de ſolidorum dimenſionibus. Exempla hic accipe in aliquibus ſequentibus, atq; ordiamur à perfectiſsimo ſolidorum, ideſt à ſphærâ.

PROBLEMA XXVII.
Datam Sphæram in æqualem conum transformare.

SVper datæ ſphæræ circulo maximo LHβδ erigatur conus ad altitudinem perpendicularem duplicatæ diametri Lβ, ſcilicet ipſius FG, eritq; ille conus datæ ſphęrę ęqualis. Quaſi coroll. deducitur ex coroll. 2 pro-



blem. 26 in § 3 hu. ſect. 2, vbi habes ſphęrę LHβδ eſſe ęqualē conū, cuius baſis eſt FEG, & altitudo DL. igitur, ſi (iuxta § 5 ad propoſ 20. lib. 6 in to. 2 hui. Ærarij, & iuxta corollar. in fine § 3, in ſect. 1. hu. Breuiarij) fiat vt circulus LH-βδ

βδ ad circulum FEGκ, ita reciprocè altitudo LD ad alteram altitudinem, prodibit FG duplicata diameter ſphęrę. Nam vt circuli LHβδ quadruplus eſt circulus FEGκ, ſic altitudinis DL quadrupla eſt altitudo FG. ergo (per ſcholium ſub § 3 ſect. 1. hu. Breuiarij) coni, alter habens baſim FEGκ, altitudinem DL, alter baſim circulum ſphæræ maximum LHβδ, altitudinem FG, ſunt æquales; at alter eſt æqualis ſphæræ LHβδ, ergo & alter; ergo datam ſphæram in conum æqualem tranſtulimus. Quanta facilitate, nouitate, compendio vide in ſeq. Schol.

SCHOLION I.

AN modus antecedentis problematis 27 apud alium extet, neſcio: ſaltem apud vllum, quos non paucos vidi, non vidi. Nos igitur non egemus tot alijs transformationibus in alia plura ſolida, quibus aliqui egent, antequam aſſequantur ſolutionem propoſiti problematis. Ac eſt noſtrum hoc conuerſum prioris partis problematis apud Archimedem de ſphæra, & cylindro, libro ſecundo.

SCHOLION II.

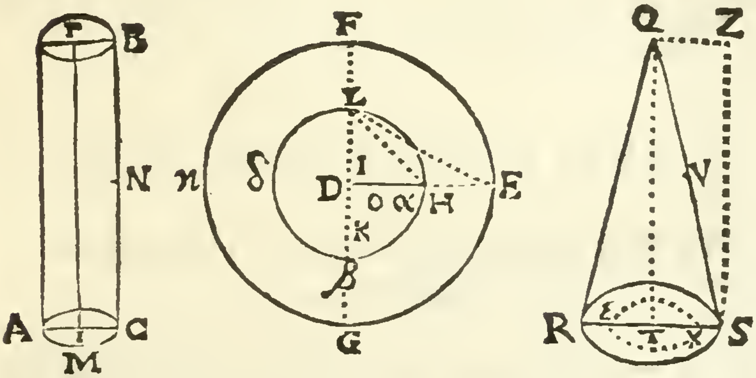
Aliter datam ſphęram in conum ęqualē vertere.

CIrculus ſphæræ maximus dupletur, per § 8 ad 47 lib. 1. & ſuper eo ſtatuatur conus altitudinem habens diametrum ſphæræ. Nam in fig. coroll. 6 problematis 26 anteced. conus DCB, qui eſt dimidium ſphæræ, ſi fiat ſuper baſi duplà ipſius DB, erit duplicatus, ac proinde æqualis datæ ſphæræ, &c.

Pro-

PROBLEMA XXVIII.

Datam ſphæram in æqualem cylindrum transformare.



SVper baſe circuli maximi LHβδ datæ ſphæræ excitetur cylindrus ad altitudinem perpendicularem duarum diametri tertiarum, eritq; cylindrus ille datæ ſphæræ æqualis; per problema 25 antec. & coroll. ex eo.

SCHOLION I.

PRoblema 28 proximè antecedens eſt conuerſum ſecundæ partis problematis ab Archimede propoſiti initio lib. 2. de ſphæ. & cylind.

SCHOLION II.

Aliter Probl. 28 demonſtrare.

QVoniam in fig. coroll. 6 problem. 26 antec. cylindrus AB eſt ſeſquialter inſcriptæ ſphæræ, ſi cylindrus mulctetur tertià parte per ablationem tertiæ partis ipſius AD, reliquum erit æquale ſphæræ.

SCHOLION III.

De conuerſis problematum 27, 28 antecedentium.

DAtis cylindro, vel cono ſphæram æqualem ponere, quæ ſunt problemata conuerſa antecedentium 27, 28 propoſita ab Archimede initio lib. 2 de ſphæra, & cylindro vide inferius à nobis aliter ſoluta, quam ab Archimedeis, poſt problemata de transformatione parallelepipedi in cubum, & cubi in ſphæram, à quibus demonſtrantur, & quaſi corollaria deducuntur.

PROBLEMA XXIX.

Dato cono cylindrum æqualem ponere.

Regula vulgata. EX dictis de dimenſione coni, & cylindri patent ratio, & demonſtratio vulgatiſſimæ; ſcilicet ſuper baſe coni conſtruendo cylindrum habentem pro perpendiculari altitudine vnam tertiam partem coni; & contraria ratione, dato cylindro conus æqualis erigitur ſuper baſe cylin-

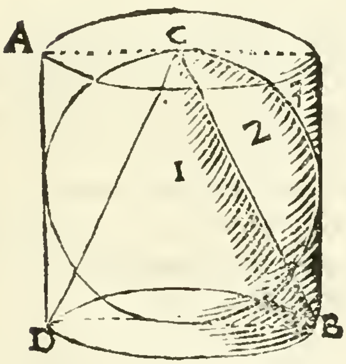
cylindri ad triplicatam cylindri altitudinem. Hìc, varietatis gratia, extra vulgatiſſima, ſoluemus problemata propoſitum 29, & ſequens 30.

Altera non peruulgata

Finge dati Coni baſim duplam baſis DB, èaq; per problema 3 ſub § 7 ad propoſ. 47 lib. 1, imminuatur dimidio, id eſt fiat circulus pro baſi DB, ſuper quo erigatur cylindrus habens altitudinem æqualem duabus tertijs dati coni; eritq; ille cylindrus dato cono æqualis. Ratio erit communis etiam ſequenti problemati 30.

PROBLEMA XXX.

Datum cylindrum in æqualem conum tranſformare.



PVta datum cylindrum eſſe altitudinis duarũ tertiarum ipſius AD. Baſis dati cylindri dupletur, per § 8 ad 47 lib. 1, & ſuper eà excitetur conus habẽs altitudinem totius DA; eritq; ille conus æqualis dato cylindro. Scilicet è ſcholijs ſecundis præcedentium problematum 27, 28. Sunt enim conus, & cylindrus, iuxta præſcripta in conſtructionibus horum 29, & 30 problematum, æquales eidem ſphæræ, ergo & inter ſe.

SCHOLION I.

QVæ nos breuitatis gratia præcipimus applicata figuris, abſtrahe tu, mi Tyro, in præcepta conſtructionum vniuerſalium, & à nobis hìc potiùs indicata, quàm explicata concipe animo præſenti, ac intento, ne hallucineris.

SCHOLION II, in quo — — Regulæ vniuerſales pro transformationibus ſolidorum.

TRansformationes ſolidorum ſunt vſus Theorematum in § 2, & 3 ſectionis 1 hu. Breu. Ac —

1 Solidi (in quod æquale transformandum eſt datum alterum ſolidum) baſim figuræ lubitæ (velut priſmatis, ſiue parallelepipedi, &c.) tibi deſcribe. Tùm fiat vt baſis deſcripta ad baſim dati ſolidi, ita reciprocè altitudo dati ſolidi ad altitudinem ſolidi, in quod facienda eſt transformatio, eritq; facta transformatio dati ſolidi in æquale, iuxta dicta & demonſtrata in Schol. & corollar. in fine § 3 in ſect. 1. huius Breuiarij. Huius regulæ habes exemplum in anteced. probl. 27 pro transformationibus ſolidorum in ſolida diuerſæ figuræ, ſiue ſpeciei. Habes in eadem ſpecie figuræ, velut in parallelepipedis, exemplum figuræ 5 in figuris ſectionis 1 huius Breu. vbi reciprocatis altitudinibus, & baſibus alterum parallelipipedum AB demiſſum eſt in æquale CD. Habebis & inferius exempla. Pluribus circa hanc 1 reg. non eſt opus, propter breuitatem Breuiarij.

2 Figura baſis dati, ac tranſmutandi ſolidi transferatur in æqualem alteram figuram, ſuper qua ſolidum excitetur eiuſdem altitudinis cum dato ſolido. Sic, per theoremata in § 2 ſect. 1. huius Breuiarij, erunt æqualia ſolida, datum, & id, in quod datum eſt transformatum.

3 *Eſt*

3 *Eſt & vſus linearum, præſertim duarum mediarum proportionalium pro transformationibus ſolidorum, vt videbis inferius. Interim exemplis aliquibus peculiaribus pro tyronibus ſecunda hic prædicta regula vniuerſalis exponatur in ſequentibus.*

PROBLEMA XXXI.

Datum priſma in æquale parallelepipedum transformare.

PRiſmatis AB (in tabella ſectionis 2, figurâ 1) baſis in æquale parallelogrammum CD transformetur, per 45 lib. 1, ſitque altitudo DG æqualis altitudini BA dati priſmatis; eritq; CG parallelepipedum factum æquale dato priſmati AB, hoc eſt priſma in parallelipipedum transformatum. Cùm enim priſma AB, & parallelepipedum CG fiant ex æqualibus baſibus eleuatis, ſeu ductis in eaſdem altitudines, neceſſe eſt ſint æqualia, ſcilicet conſtituta ex æqualibus conſtituentibus.

PROBLEMA XXXII.

Parallelipipedo cylindrum æqualem ponere.

FInge facilitatis gratia parallelipipedum CG habere baſim CD quadratam. Vertatur ea in circulum, per dicta ad propoſ. 45 lib. 1 in 1. To hu. Ærarij; ſitque EF, fiantq; altitudines æquales DG, FH, eritq; cylindrus EH æqualis parallelepipedo CG.

SCHOLION I.

De cylindro obliquo in parallelepipedum æquale, & conuerſim.

Ponetur pariter cylindrus obliquus, verbi gr.(in tabella ſect. 1 fig.3) ◡AC æqualis parallelepipedo ◡AB in fig. 2 eiuſd. ſect.1, baſi circulari AD translatâ in æquale pentagonum AE, & ad obliqui cylindri AC altitudinem perpendicularem parallelepipedo AB conſtituto.

PROBLEMA XXXIII.

Pyramidem in conum æqualem transformare.

IN tabella ſect. 2, fig. 3, factis æqualibus & baſi rectilinea AB, & circulari CD, & perpendicularibus æqualibus altitudinibus FE, GH, erit conus pyramidi æqualis, iuxta theoremata in § 2. Vel eam etiam ob cauſam, quòd vtrumq; ſolidum eſt pars tertia(per theoremata 14, 15 in § 5 ſect.1 hu. Ærarij, & ad prop.23 lib.6 § 18, & 19) æqualium parallelepipedi, & cylindri, quæ ſolida fierent ex eleuatione æqualium baſium AB, CD in ęquales altitudines perpendiculares EF, GH, ceu ſunt in 1, & 2 figura parallelepipedū CG, & cylindrus FH; ac proinde æqualium tertiæ partes ſunt æquales.

PROBLEMATA XXXIV, XXXV.

Pyramidem in priſma, vel parallelepipedum, conum in cylindrum æqualia transferre.

VElut in figuris 1, 2, 3, ſect. 2, ſi altitudines æquales AB, GD, HF, FE, HG perſtent, triplo augendæ

erunt

erunt pyramidis, & coni baſes AB, CD. Item ſi priſmatis baſes A, vel B, vel reliquorum quattuor ſolidorum reliquæ CD, EF, AB, CD perſtent æquales, triplo augendæ erunt altitudines perpendiculares EF, GH pyramidis, & coni. Vtroq; enim modo æquabuntur priſmati, vel parallelipipedo, vel cylindro. Quoniam enim, per theoremata §4, ſec. 1, pyramides, & cylindri æqualium altitudinum ſunt inter ſe vt baſes, & æqualium baſium vt altitudines; igitur pyramis triplicatæ baſis AB, & altitudinis æqualis cum FE, vel æqualis baſis cum AB triplicatæ altitudinis FE, erit tripla ipſius AFB, ideſt æqualis priſmati AB, vel parallelepipedo CG, cuius ipſa AFB eſt pars tertia. Ob eandem cauſam conus altitudine, vel baſi triplus coni CHD, erit æqualis cylindro EH, cuius tertia pars eſt conus CHD.

SCHOLION.

De conuerſis, & alijs ſolidorum transformationibus.

Conuerſa præcedentium problematum licebit facere facilè ex prædictis. Iuxta quæ etiam licebit & alia transformationũ exempla, & varias transformationum combinationes moliri. Adde & exemplum mox ſequens, quod peculiarem, ac diuerſam ab antepoſitis formam, & difficultatem transformationis habet. Ac præmitto ſequens —

LEMMA, ac Theorema.

Si fuerunt quatuor lineæ continuè proportionales, vt eſt quadratum ex prima ad quadratum ex ſecunda, ita ſecunda ad quartam.

VEritatem, & euidentiam propoſiti Lemmatis in lineis per partes quaſi conciſis, atq; in numeris expedio. Sint (in fig.4, ſec. 2) quatuor rectæ A, B, C, D, continuè proportionales, ex quarum æqualibus partibus, & particulis conficiantur numeri in eadem proportione A8, B12, C18, D27. Ac vt 8 ad 12, ſic 12 ad 18, & 18 ad 27 in proportione ſeſquialtera, vt 8 in 12 ſemel cum dimidia ſui parte, ſic 12 in 18 ſemel cum dimidia ſui parte, & 18 in 27 ſemel cum dimid. ſui, &c. Sit primæ A8 quadratum 64, ſecundæ B12 quadratum 144. Aio vt quadratum 64 ad quadratum 144, ſic eſſe B12 ad D27.

Quod patet: vt enim quadratum 64 continetur bis cum quarta ſui parte in quadrato 144, ſic recta ſecunda B12 continetur in quartà D 27 bis cum quarta ſui parte 3.

PROBLEMA XXXVI.

Datum parallelepipedum in cubum æqualem transferre.

SIt in fig. 5, ſect. 2. datum parallelepipedum AB cui conſtituendus ſit cubus æqualis. Baſis AE, ſi non ſit quadrata, vertatur, per penultimam ſecũdi, in quadratum, ſuper quo ſi fingas excitatum parallelepipedum eiuſdem altitudinis cum EB altitudine parallelepipedi AB, erunt duo ea parallelepipeda æqualia, per propoſ. 31

lib.

lib.11,aliter etiã à nobis in theor. 1 § 2 ſect. 1 hu. Breuiarij demonſtratam) Baſis ergo quadratæ latus eſto H, & altitudini BE paralllelepipedi vtriuſq; æqualis ſit recta G; inter G, H inueniantur (per aliquem è modis à nobis traditis ad 13 lib.6. de duabus medijs proportionalibus) duæ mediæ proportionales I, K. Dico ſuper quadrato è K excitatum cubum eſſe æqualem dato parallelepipedo AB.

Quoniam enim ſunt quatuor lineę continuè proportionales G, I, K, H per conſtructionem, ergo per Lemma proximè antecedens, vt quadratum ex H ad quadratum è K, ita K recta ad rectã G. At ex conſtructione quadratum ex H eſt æquale baſi parallelepipedi AB, & quadratum è K eſt baſis cubi, & eadem K eſt altitudo eiuſdem cubi, G verò eſt pro altitudine EB parallelepipedi AB, ergo cubi è K, & parallelepipedi ſuper H baſes quadratæ, & altitudines K, G reciprocantur; ergo, per 34 libri 11, à nobis oſtenſam breuiter in numeris (ſect 1, the. 5) ſunt æqualia parallelepipedum ſuper baſi quadrata ex H, & cubus è K; at parallelepipedum ſuper baſi quadrata H conſtitutum eſt æquale (per antecedentia ex 31 li. 11) parallelepipedo dato AB, ergo datum AB, & cubus è K ſunt ſolida facta æqualia, iuxta ax. 1. Sunt enim eidem ſuper H æqualia parallelepipedum AB, & cubus è K, ergo inter ſe.

SCHOLION.

Criticis fouea geometrica.

QVod nos Tyronum captui accommodatè demonſtrauimus ex lemmate præmiſſo, doctè, ac non vulgato modo pro perſpicacioribus ingenijs inditat, ac demonſtrat Villalpandus (cuius paucula verba noſtris figuris accommodauimus) dũ affirmat: vt (in fig. 5 ſec. 2.) quadratũ rectæ K ad quadratum ex H, ita G ad K, quæ quidem proportio eſt reciproca baſibus, & altitudinibus. *Pro confirmatione citat corollar. pro-*

poſ.20.li.6. In pauculis ijs Villalpandi verbis tota vis præcipua demonſtrationis latet, ſi quis eam ex demonſtratis à nobis ſciat extrudere. Hìc ſcilicet, qui nullam ipſi vnquam de ſuo demonſtrationem condiderunt, & tamen audent alienas doctorum virorum demonſtrationes criticare, dum hìc vident Villalpandum per tritiſsima aliorum veſtigia non ire, opinor, pronuntiarent, cautè legendum, et fortaſſe ſuæ ageometriæ indices cauillationes ſic expromerent. Quî probat Villalpandpandus eſſe, vt baſes quadratas inter ſe, ſic & altitudines, ac quidem reciprocè? Quid verò hìc agat corollarium propoſ.20.lib.6 à Villalpando citatum? cum id ſit de tribus lineis proportionalibus, & de polygono ſuper prima ad ſimile ſuper ſecunda, ita ſe habente, ac prima recta ad tertiam proportionalium; hìc verò negotium ſit de quatuor rectis continuè proportionalibus, & de quadrato ſuper prima ad quadratum ſuper ſecunda, & inferat Villalpandus ea quadrata inter ſe ita habere, vt quarta ad ſecundam quatuor proportionalium? Quæ iſta eſt illatio? Scilicet ea, ò Critice, quæ ex corollario prop. 20. lib. 6 de tribus lineis proport. huc traducta eſt, & poſita eſt inter quatuor contin. proport. modo nõ vſitato, ſed ingenioſo, & prorſus congruente cũ corollario prop. 20; ex quo vis tota eſt demonſtrationis de reciprocis baſibus quadratis, & altitudinibus.

Conſultò hìc clariora non addimus, ac expectamus dum Momus aliquis audeat hiſcere in Villalpandum, ac nobis, vel alicui è noſtris occaſionem præbeat redarguendi cynicorum cenſorum geometricam imperitiam. Cautè legendi docti ſcriptoris ſunt, ideſt eorum ſcripta non vulgaria oculo non vulgari ſunt introſpicienda, nec lippienti temerè carpenda.

COROLLARIVM, &

Vſus ſingularis proximè antecedentis problematis, ac

Pro-

PROBLEMA XXXVII.

Data liquidorum (aut etiam frugum, ac rerum aridarum, quæ vaſis menſurantur) quantitate, cubicum vas eius præciſè capax geometricè conſtituere.

Data ſit aquæ, vel liquidi alterius, vel aridi vaſe menſurabilis quantitas. Conſtituatur vas parallelepipedum (per æſtimationem maius quantitate capienda) cauum, cuius baſes ſint quadratæ, ac parallelus horizonti conſtitutæ, velut (in fig. 6, ſec. 2) AB ſuper quadrata baſe AC. Infundatur liquidū, vel aridum, &c. & cum quierit liquidum, vel aridum concuſſionibus fuerit bene inuaſatum, & ſub forma rectì parallelepipedi ED, eius notetur altitudo, velut AD, & latitudo, ſiue latus vnum quadratæ baſis, velut AE. Sintq; rectæ illis æquales expoſitæ F, G, inter quas duæ mediæ proportionales I, H interponantur. Dico cubicum vas excitatum, & fabrefactum ex latere H eſſe id, quod pręcisè capiet quantitatem infuſam ED.

Patet demonſtratio eodem modo inſtituēda, quo proximè antecedens problema, præſertim expoſitum è noſtro lemmate. Nam vt quadratum ex F ad quadratum ex H, ideſt baſis ad baſim, ita reciprocè recta H ad rectam G, ex lemmate, ideſt altitudo cubi ex H ad altitudinem G parallelepipedi ED, ac proinde, per 34. li. 11. à nobis in numeris oſtenſam, erunt æqualia parallelepipedum ED, & cubus ex H, qui præciſè capiet iniectam quantitatem ED.

Res ſi quam differentiam patiatur inter liquida, & arida propter liquidi baſem ſuperiorē non planè planā, haud tamen vllius ad vſum, & ſenſum erit incommodi, quod & facilè ingenio, & arte corrigetur.

PROBLEMATA XXXVIII, XXXIX.

Datum cylindrum, vel conum in æqualem cubum conuertire.

QVoniam ex ortu Cylindri, & Coni, iuxta eorum definitiones ante lib. 11 Elem. ea ſolida fiunt è rotatione (loquor de rectis) rectanguli, & trianguli, &c. eorumq; quantitas, è regula centri grauitatis, habetur è ductu rectanguli, vel trianguli in peripheriam ſignatam à centris grauitatis; &c. ac proinde cylindrus eſt æqualis parallelepipedo habenti pro baſe rectangulum, & pro altitudine rectam æqualem rotationi ſignatæ à centro grauitatis; conus verò eſt æqualis priſmati habenti pro baſe triangulum rectangulum, & pro altitudine rectam æqualem rotationi à centro grauitatis; ideò ſi fingas (in tab. ſect. 1, fig. 5) cylindrum gracilem oblongum ex rotundo in parallelepipedum ſub planis rectangulis eſſe expoſitum (per probl. 32, & ſchol.) quale eſt AB, & AE ſit rectangulum rotatum, BE verò ſit æqualis peripheriæ à centro grauitatis ſignatæ in rotatione, &c. ſiue, ſi dato cylindro parallelepipedum AB cõſtituas æquale, ſeruata eàdem altitudine BE, & mutatà baſi circulari in rectangulum AE; ac poſt hæc, circa AB exequaris quæ prędicta ſunt, & facta in antecedenti problemate 36, erit cubus ex alterà mediarum proportionalium ęqualis dato cylindro, cui ęquale factum eſt parallelepipedum AB.

Pari ratione ſi conum, vel cono ęquale priſma transferas in æquale parallelepipedũ, & opereris vt in antec. probl. 36, erit cubus ex alterà duar. med. proport. ęqualis cono, &c. Adde noſtris aliquid tuæ induſtriæ.

Pro-

PROBLEMA XL.

Conuerſum probl. 36 anteced. Dato cubo parallelepipedum ęquale in data altitudine conſtituere cum vſu propoſ. 36 li 11.

QVòd eàdem formà ex 34 propoſ.lib.11. ſoluitur à Villalpando, nos ex vſu 36 prop.li.11, à nobis in numeris oſtenſæ, facilius, ac breuius pro Tyronibus ſoluemus. Dati cubi latus (in fig.5, ſec.2.) ſit I, altitudo parallelepipedi (quod cubo æquale lubet conſtituere) ſit recta G; ipſis G I inueniatur tertia maior proportionalis K. Dico parallelepipedum ſuper baſi ex K, I, & ad altitudinem G excitatum eſſe æquale cubo ex I. Cùm enim ſint tres proportionales G, I, K, erit (per 36 prop. li. 11. à nobis in numeris oſtenſam theor. 7, ſect.1) ex ijs parallelepipedum ęquale cubo ex media I.

PROBLEMA XLI.

Sphæram in cubum æqualem transformare, cum vſu geometrico centri grauitatis.

HOc problema quicumq; ſoluere nituntur confugiunt ad ea, quæ ſunt extra elementa Stereometrica, ſcilicet ad theoremata varia Archimedea; quorum veſtigia ſi nos premere vellemus, extra inſtitutum noſtrum egrederemur, & inter elementaria reponeremus ea, quæ demonſtrantur ex ijs, quorum cognitio nondum ad Tyrones elementares peruenit. Itaq; nos id ſoluemus ex antedictis, & prædemonſtratis à nobis in conſtitutione, & dimenſione ſphæræ ex vſu geometrico centri grauitatis. Ex quo, iuxta dicta in analec.4 ad Apiar.2, & alibi in hoc

Æra-

Ærario, ad propoſ. 20 lib. 6, & in ſec. 1. hu. Breuiar. &c. cùm conſtet ſphæræ (in fig. 7 ſec. 2.) TPVX ſoliditatem eſſe æqualem parallelepipedo habenti baſim æqualem ſemicirculo TPV, & altitudinem æqualem peripheriæ ſignatæ à centro grauitatis P ſemicirculi TPV ſphæram rotatu ſuo conficientis; ſi ſemicirculus TVP mutetur in quadratum, ſuper quo excitetur parallelepipedum altitudinis ęqualis peripheriæ à P, deinde ex antecedenti problem. 36 fiat cubus æqualis dicto parallelepipedo, &c. erit ille cubus datę ſphęrę ęqualis.

PROBLEMA XLII.

Præcedentis problematis conuerſum, dato cubo ſphæram æqualem ponere.

DAti cubi, cui æqualis conſtituenda ſphæra eſt, ſit (in fig. 7, ſect. 2.) latus A, ac intelligatur ſphæra quępiam, finge ipſam TXVP, cuius diameter ſit ęqualis lateri cubico A. Per antecedens problema ſphęrę TXVP, fiat ęqualis cubus, cuius latus ſit C; & fiat ſicut C ad A, ita A ad B, erit ſphæra deſcripta circa B æqualis cubo ex A.

Cùm enim ſint tres proportionales, per conſtructionē, erunt (ex theoremate 8, ſectione prima) cubus ſuper C prima ad cubum ſuper A, ſecundam, vt ſphæra ex eàdem ſecundà (pro tertià tamquam diametrò) A ad ſphęram ex quarta B tamquam diametro deſcriptam. Sunt enim & ſphęrę inter ſe, & cubi inter ſe in eadem, ideſt triplicata proportione diametrorum, & laterum, ex 33 vndecimi, & 18 duodecimi à nobis aliter, ac facillimè demonſtratis in theorematibus § 6 ſectionis 1 hu. Breu. ergo & permutando erit vt cubus ex C ad ſphęram ex A, ita cubus ex A ad ſphęram ex B; at cubus C, & ſphęra ex A conſtructa ſunt ſolida ęqualia, ergo cubus ex A, & ſphęra ex B erũt ęqualia;

lia;ergo dato cubo lateris A conſtituta eſt ſphęra æqualis, quæ circa B.

PROBLEMATA XLIII, XLIV.

Datis cylindro, vel cono ſphæram æqualem conſtruere.

SVnt hęc duo problem.prima propoſita ab Archimede initio lib.2 de ſphæ.& cyl.quæ aliter à nobis, quàm ab Archimedeis, ſoluũtur, & quaſi corollaria ex hìc antecedentibus deducuntur. Nam —

— Si cylindrum, vel conum tranſtuleris in æqualem cubum per antec. probl.38, 39, ver. gr. in cubum (in fig.7, ſec.2)cuius latus A, & per proximè antec. probl. 42, cubo ex A ſphæram æqualem diametri B conſtitueris, erit ſphęra circa B æqualis dato cylindro, vel cono. Ponũtur enim cylindrus,& conus ſingillatim æquales cubo ex A, & ſphæra circa B æqualis eidem ex A, ergo inter ſe ęquales ſunt cylindrus, vel conus, & ſphęra, &c.

COROLLARIVM,

Et regula vniuerſalis etiam pro ſolidis vltraelementaribus,ſcilicet rotundis omnibus tranſformandis in æquale parallelepipedum.

E Corollario in fin.§ 2 hu.2 ſec.& ex citatis ibi noſtris ad finem lib.2 elem.& ex ortu rotundorum omnium ſolidorum numero infinitorum patet hoc etiam corollarium. Nam ſi planum, quod rotatur, vertas in æquale rectangulum, & ad quantitatem rotationis ſignatæ à centro grauitatis plani rotati erigas perpendiculares ab angulis

gulis rectanguli, eaſque rectis vnias, erit conſtructum parallelepipedum æquale ſolido rotundo, quod fit ex dati plani rotatione; iuxta exempla peculiaria in antecedentibus exhibita.

---

§ V.

De augendis, & imminuendis ſolidis elementaribus in data proportione, etiam ſeruata figuræ ſimilitudine.

PROBLEMA XLV, & Propoſitio vniuerſalis.

Dato ſolido ſimile ſolidum maius, vel minus in data proportione conſtituere.

Exemplum I in Parallelepipedis.

MAnifeſtam iniuriam arbitrarer à me fieri noſtro Villalpandio ſi quod ex me poſſem, non potius ab eo ſoluerem propoſitum vniuerſaliſſimum problema Stereometricum, dum nemo adhuc ab orbe cõdito (quà licet è ſcriptis videre) maiori cum diligentia, ingenio, ac præciſione verſatus ſit circa theoricen, & practicen augendorum, vel minuendorum in data ratione corporũ, quàm doctiſſimus ille Auctor, vt & in Schol. ſeq. indicabimus. Itaque ſic ille: *Conſtituendum ſit (in fig. 8, ſec. 2.) ſolidum ſimile dato ſolido A, ad quod datum A ſe habeat vt B ad C: Ipſius igitur ſolidi A lateri cuipiam æqualis aſſumatur recta linea D, & vt B ad C, ſic fiat D ad E, atq; inter D, E duæ rectæ inueniantur mediæ proportionales F, G, atque ſuper rectà lineà ipſi G æquali*

æquali conſtituatur ſolidum H ſimile, & ſimiliter poſitum ſolido A dato. Et quia ſi quatuor rectæ proportionales fuerint, ſicut prima ad quartam, ſic eſt quod ex primà ſolidum ad id, quod ex ſecundà ſimile, ſimiliterq; poſitum. Igitur ſolidum A ad ſolidum H eſt vt D ad E; hæc autẽ poſita fuit vt data B ad C. Dato igitur ſolido A ſub data ratione cõſtitutum eſt ſimile ſolidũ H. Quod erat propoſitum.

SCHOLION I.

Cautiones in præced. probl.

SVper recta ipſi G æquali. *Corrige typographi mendum, & pro G pone F.* Ad ſolidum H. *quod eſt ſuper ſecundà F. Corrige etiam in noſtræ tabellæ fig. 8, & pro S pone G.*

SCHOLION II.

De mirifico Villalpandi inſtrumento pro augẽdis, vel imminuendis ſolidis in data proportione.

LIbet ſaltem indicare mirificum inſtrumentum (quod longioris eſſet operæ apponere) iam apud ſuum Authorem copioſiſsimè ad praxim, & ad theoricen expoſitum, vt conſtet à me non temere fuiſse Villalpandi diligentiam reliquis in hoc genere ſcriptoribus antepoſitam. Igitur ille in tom. 3. part. 2. de pond. & menſ. li. 1. cap. 5 prop. 23 (præter antecedentes) & ſequentibus vſq; ad finẽ capitis, docet exactiſsimè geometricè, & arithmeticè in figuris, & tabulis fabricam, & vſum inſtrumenti à ſe inuenti pro augendis, minuendiſq; ſolidis in datà ratione, pluribuſq; exemplis explicat, & confirmat in variorum metallorum ſolidis. &c. ac deniq; formam inſtrumenti ſatis amplam à ſe inciſam exhibet in fine cit. 5 capitis. Egregiũ, ac regium plane opus, quod docta poſteritas ſemper eſt admiratura. Vide indicatũ à me apud ſuũ Authorem, ac fruere.

COROLLARIVM, ſeu PROBLEMA XLVI, & exemplum II — In famoſa cubi duplatione.

PRoblema id celeberrimum, de quo apud nos habes in antecedentibus tum ad 47 lib. 1, tum ad 13 li. 6. & alibi, circa quod Antiquorum Geometricorum Philoſophorum mirifica ingenia ingenioſiſſimè laborauerunt, tamquam corollarium iam hìc deducitur è proximè antecedenti vniuerſaliſſimo problemate.

Sit (in fig. 9, ſec. 2.) cubus datus CL, qui duplo augendus ſit ita, vt ſeruet cubicam figuram, ſiue qui ad alium cubum conſtituendum habeat proportionem, quam recta A ad rectam B, ſcilicet ſubduplam. Dati cubi CL latus quodlibet CD fiat ad rectam EF, vt A ad B, & inter duas CD, EF duæ mediæ proportionales inueniantur GH, IK; ſitq; vt CD ad GH, ita GH ad IK, & vt GH ad IK, ſic IK ad EF, & ſuper ſecunda GH excitetur, per 27 vndecimi, ſolidum GM ſimile, &c. ſolido CL, ideſt cubus GM; qui erit duplus cubi dati CL; ac demonſtrabitur eodem modo, quo in anteced. vniuerſali problemate. Nam vt prima CD ad quartam EF, ſic cubus ſuper prima ad cubum ſuper ſecunda GH; at prima CD eſt ad quartam EF, vt A ad B, ideſt ſubdupla, ergo & cubus CL ſubduplus eſt cubi GM, hoc eſt GM duplus conſtitutus eſt dati cubi CL.

SCHOLION.

PRoportionali modo agendum erit, ſed contrario, pro imminutionibus dati maioris ſolidi in minus ſimile. &c.

Pro-

PROBLEMA XLVII, & exemplum III —

— In ſolidis rotundis.

SIt (in fig. 10, ſec. 2) conus ABC imminuendus in ratione D ad E. Accipiatur ipſius baſis conicæ diametro AC æqualis F, & fiat vt D ad E, ſic F ad G; inter F, G inuentis duabus medijs proportionalibus H, I, erit ſuper diametro H excitatus conus, velut KLM, minor ipſo ABC in ratione D ad E, iuxta præmonſtrata in antecedẽtibus problematis de ſolidis non rotundis; in quibus vt latera alterius ad alterius latera, ſic in rotundis diameter ad diametrum, ſiue latus quadrati è diametro ad latus alterius quadrati ex altera diametro; iuxta expoſita facilè à nobis ex cẽtro grauit. §§ 18, 19 Epil. plan. pro 2 prop. l. 12.

Notandum tamen, atq; addendum pro quantitate altitudinis ipſius KLM determinandà ita vt ſit ipſi ABC verè ſimilis, iuxta def. 24 lib. 11, efficiendum vt ſint altitudines in proportione diametrorum, ex aliqua praxe ʋn noſtrarum ad propoſ. 12 li. 6. Vt BC ad KM, ita NA ad OL.

SCHOLION.

Problemata de aliorum ſolidorum elementarium, præſertim rotundorum, auctione, vel imminutione proportionalibus.

QVemadmodum exempla, quæ protulimus de parallelepipedis, & cubis, poſſunt proportionali modo exerceri in reliquis elementaribus ſolidis non rotundis, in pr.ſmates, pyramidibus; &c. ſeruatà tamen definitione 9 li. 11 de ſimilibus

bus ſolidis; ſic & à conis ad cylindros, & ſphæras licebit progredi, acceptis diametris pro lateribus ſolidorum non rotundorum. Itaq; Tyrones ſignata iam à nobis geometrica veſtigia ſequantur, nec nos à breuitate abducant.

§ VI.

Pro vſibus, & praxibus facilior alia ratio augendorum, vel minuendorum ſolidorum in data proportione, non ſeruatá indiuidualis figuræ ſimilitudine.

POteſt enim ſeruari ſimilitudo ſaltem in ſpecie figuræ, velut ſi conus in conum augeatur ſed non in ſimilem, ex def. 24, priſma in priſma, ſed non in ſimile, ex def. 9. Ac tunc negotium auctionum, vel imminutionum in data ratione figurarum ſolidarum longe facillimum eſt, ſine vſibus, & ambagibus duarum mediarum proportionalium; ſed ſolum habità cognitione augendarum, vel imminuendarum in data ratione baſium, ex ijs, quæ apud nos habes in 1, & 2 tomo huius Ærarij ad lib. 1, propoſitiones 45, § 6; ad lib. 6, propoſ. 1, § 5; prop. 2. § 4, 5; & ſeruatà eadem altitudine in figuris vel auctis, vel imminutis. Quæ res percommodè cadit in vſus, & praxes, in quibus nihil refert ſimilitudo indiuidualis figuræ, dummodò vaſis figurati capacitas diuiſa ſit in ea proportione, quæ ſit opus. Si enim, exempli gratia, cylindricum vas ſit opus imminuere tertià parte, & conflare vas cylindricum tertiæ partis capax; ſatis fuerit baſim imminuere tertia parte, ex citatis apud nos; deinde eiuſdem altitudinis vas cylindricum conflare ſuper baſe imminuta. &c.

§ 7.

§ VII.

Vſus aliqui militares prædictorum de auctionibus, & imminutionibus ſolidorum indicati.

HAbent viri militares ex anteced. vnde ſcientificè, ac facilè ad praxim augere, aut imminuere poſſint, pro exigentia, ſphæricos globos bellicorum tormentorum, ac pariter augeant, vel imminuant iuxta requiſitam propoitionem caua ipſa tormenta. Quoniam enim cylindricæ figuræ eſſe ſolent tormentorum cauitates, accipienda erit diameter baſis, ſiue oris ipſius tormẽti, illiq; linea apponenda in proportione augendi, vel imminuendi tormenti, deinde interponẽdę duæ mediæ proportionales, & ex diametro lineæ proximæ alteri extremę facto circulo, ſuper eo extitandus cylindrus, vel cum ſimilitudine ad datum cauum tormentum, iuxta indicata in prox. anteced. Schol. vel cum eàdem altitudine.

Pariter datà diametro ſphæricæ pilæ æreæ, & inuentà alia diametro v.gra. triplo maiore, inuentis deinde duabus medijs proportionalibus, ſphæra ex diametro lineæ proximæ maiori extremæ erit triplo auctior. &c. Exemplis explicanda prædicta permittimus ijs, quibus plus otij, quam nobis ad praxes. Quas ſaltẽ indicamus, ne qui praxibus egent ſcientificè firmatis putẽt ſe à ſcientificis neglectos. Vide exempla applicationum, præſertim militarium in §§ 12, 23, 30 ad prop. 20 lib 6.

Notandum hic eſt praxes à nobis hìc indicatas, præter facilitatem, habere etiam breuitatem. Fruſtra enim aliqui cylindros, & ſphæras vertunt primò in parallelepipeda, & ipſa parallelepipeda augent, aut imminuunt pro ratione quæſita, ac deniq; rurſus parallelepipeda vertunt in cylindros, & ſphæras auctas, vel imminutas. Satis eſt ab

exemplis noſtris accipere diametros baſium circularium, vel ſphærarum, & operari, vt nuper docuimus.

§ VIII.

De diuiſionibus elemẽtarium ſolidorum ad datam rationem, cum vſu centri grauitatis, varia problemata indicata.

Diuiſio dati ſolidi ad datam proportionem eſt quædam ſpecies imminutionis dati ſolidi, poſſetq; hoc caput tamquam corollarium, vel conuerſum præcedentis de auctionibus ſolidorum deduci. Tamen quia nos in hoc capite circa aliqua exempla verſabimur modo diuerſo ab antecedenti, & cum vſu aliquo tam centri grauitatis, quàm aliquorum problematum à nobis de planis in 1, & 2 tomo huius Ærarij expoſitorum, ideo nonnihil hìc breuiter addemus.

PROBLEMA XLVIII.

Datum parallelepipedum ad datam rationem ſecare.

IN figurà 7 ſectionis primæ huius Breuiarij eſto parallelepipedum AB, in cuius baſis latere AH fiat ſectio, velut in E, ad rationem, ad quam velis ſecare ipſum parallelepipedum, & per E fiat ſectio à plano EF parallelo vtriq; E plano AG, HB; erit ſectum AB per EF in ratione ſectæ AH in E. Nam per 1 prop. li. 6, baſes AL, LH ſunt inter ſe vt latera AE, EH, & per 25, & 32 lib. 11

aliter,

aliter, ac facilius à nobis demonſtratas in § 4 ſec. 1. huius Breu. ſolida AF, FH eiuſdem altitudinis ſunt inter ſe vt baſes AL, LH.

Aliter.

POtes & aliter ſecare parallelepipedum AB, ſi ad rationem ſectæ AH in E ſeces altitudinem MA in N, & per N planum ducatur parallelum ipſis MB, AI, iuxta ea, quæ habes demonſtrata in theor. 13. 1 ſect. hu. Breu. Aequalium enim baſium parallelepipeda ſunt inter ſe vt altitudines, apud nos.

PROBLEMA XLIX.

Datum cylindrum ſecare ad datam rationem.

PVta (in ead. fig. 7, ſec. 1.) cylindrum AB diuidendũ in tres partes ſolidas AC, CD, DB habentes inter ſe datam proportionem. Iuxta quam ſecetur latus FB in C, E, & per C, E fiant ſectiones à plano parallelo baſibus GB, AF, erit in data proportione diuiſus cylindrus, per prop. 13 li. 12 aliter, ac facilè à nobis in § 4 ſect. 1 huius Breu. eſt enim pars cylindri diuiſi ad partem vt ipſius axis pars ad partem, id eſt vt partes lateris FB, quod axi parallelum, & æquale eſt. Ac vt FC ad CB, ſic AC ad CG. &c. Cùm enim ſint æquales baſes circulares ſegmentorum cylindricorum, differunt tantum in proportione data eleuationum, &c. in quas ductæ baſes conſtituunt ſolida ea ſegmenta cylindrica.

Pro-

PROBLEMATA L, LI.

Priſmatum, & Pyramidum facillima proportionalis ſectio.

REuiſe ad propoſ. 38 li. 1 § 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. & ad propoſ 1 li. 6, § 13, 14, 15, 16, vbi geodetica exercuimus, ac planas aliquas figuras variè diuiſimus, præſertim triangulares, & pentagonicas. Ex ijs facilis fit etiam partitio priſmatum, & pyramidum habentium triangulares, & pentagonicas eas figuras pro baſibus. Nam factâ ſectione vel in priſmate à plano ſecante oppoſitas baſes iuxta datam proportionem, vel in pyramide à plano iuxta proportionem lubitam ſecante baſim vſque ad verticem pyramidis, quoniam ſegmenta erunt in eadem altitudine, erunt & inter ſe, vt baſes, iuxta § 4, & 5, ſect. 1 hu. Ærar.

Licebitq; problemata exercere cum aliqua varietate, ac venuſtate vel à puncto dato in latere baſis, vel intra baſim, diuidere in duas, vel tres, vel quinq; æqualia ſolida. &c. Reuiſe citata problemata geodetica apud nos, & applica varijs exemplis, quæ nos pro inſtituta breuitate ſaltem indicamus (facillima tamen in praxi) ne ea vel neglexiſſe, vel ignoraſſe videamur.

§ 9.

§ IX.

Regula vniuerſalis, & corollarium pro ſolidorum etiam vltraelementarium ſcilicet rotũdorum omnium numero infinitorum auctionibus, imminutionibus, ſectionibus in datà ratione.

EX antecedentibus peculiaribus exemplis, & è corollarijs in fine § 1, & 9 ſect. huius 2, & è citatis ibi apud nos in fine lib 2 elem & ex ortu ſolidorum rotundorum patet hoc hìc extremum vniuerſaliſſimum corollarium de ſolidis etiam vltraelementaribus, & omnibus rotundis numero infinitis. Nam tranſlatis rotundis ſolidis in parallelepipeda, quibus ex ortu ſuo ſunt æqualia, dum fiunt ex plano rotato, & ducto in viam rotationis à centro grauitatis plani rotati ſign.tæ, & ijs parallelepipedis auctis facillime, imminutis, diuiſis, & mox in ſolida rotunda ſimilia reformatis, iuxta problemata in antecedentibus §§, erunt rotunda ſolida aucta imminuta, ſecta in datà ratione. Quæ hic plu ima indicantur, & imbutis iam cognitione antecedentium in hoc Breuiario, & in libris Elem. & noſtris ex ijs etiam ad ſolida deductionibus, indicant quanta copia Stereometrica in hoc Breuiario includatur.

SCHOLION.

Seges theorematum Stereometricorum.

HAbes in hac tota 2 ſectione practicà ſtereometricà plura, & egregia theoremata quaſi corollaria deducta è problematibus;

bus; quæ addita alijs theorematibus ſectionis primæ, poſſint eam ditare; velut, præter cætera, quæ habes in dimenſionibus ſuperficiarijs, ac ſolidis ſphæræ, cylindri, coni, & mutuis eorum transformationibus. &c.

---

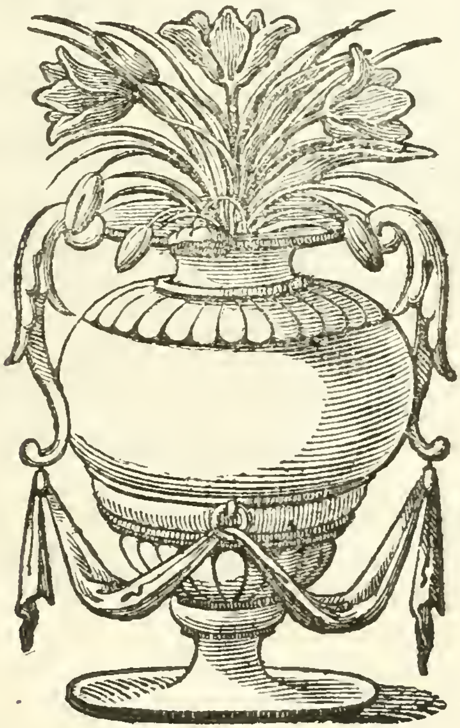
§ X.

CAMPVS Stereometricus.

De ſolidis etiam non rotundis, & de ſuperficiebus circa ea tam recta, quam obliqua, numero infinitis, & de eorum proportionibus, dimenſionibus, transformationibus, diuiſionibus, &c. cognoſcendis facillimè ex eorum ortu.

EX hactenus theoricè, & practicè antepoſitis in hoc Breuiario lucem habes, mi Tyro, qua proſpicias in campum apertiſſimum, ac patentiſſimum infinitorũ numero, ac forma (vt parallelepipeda, & rotunda ſolida verſiformia omittam) priſmatum, quorum tot formæ tam obliquæ, quam rectæ concipi poſſunt, quot fingi poſſunt baſes planæ rectilineæ, mixtilineæ, formarum in nitè diuerſarum, è quarum eleuationibus pluriformia priſmata gignuntur, quemadmodum & eorum verſiformes ſuperficies oriũtur ex eleuationibus linearum verſiformium ambientium baſes. Quorum ſolidorum, & ſuperficierum affectiones, præſertim pertinentes ad proportiones inter ſe, dimenſiones, & quantitates, transformationes, &c. habes in promptu ex antedictis exemplis, & regulis in hoc Breuiario de ſolidis notioribus, quorum affectiones demon-

monſtrauimus in theorematibus,& problematibus ex ortu ſuperficierum, & ſoliditatum, è quibus conſtant. Hìc habes quà,& quo in immenſum geometricè poſſis excurrere. Ilicet.





SECTIO TERTIA
THEORICA, ET PRACTICA
BREVIARII STEREOMETRICI,
DE SOLIDIS REGVLARIBVS,

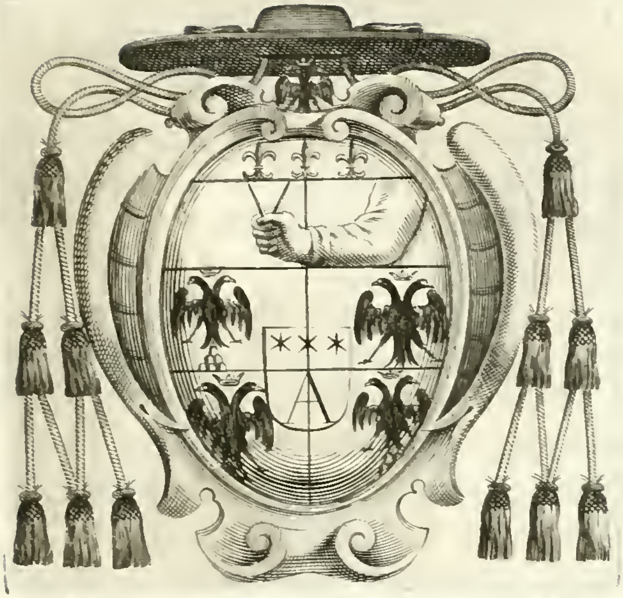
Pro Lib. 13, 14, 15 Elem.

ACCESSERE

Compendium demonſtratorium vniuerſaliſſimum,

PARALIPOMENON,

PARERGA.



Illuſtriſs. ac Reuerendiſs. D.
FRANCISCO TEDESCHIO
NOBILI FERRARIENSI,
Ciui Bononienſi, & Patritio Romano, I. V. D. & Protonotario Apoſtolico

ANTONIVS MARIA NELLVS
Perpetuam Fælicitatem.

SIngularis beneuolentia, qua (Illuſtriſs. ac Reuerendiſsime Domine) parentem meum Alexandrum, dum viueret, proſequebaris, & amica patrocinia, quibus Authoris huius Aerarij, auun- *Beneficia in Aerarij Authore.*

† 2 culi

culi mei materni, litterarum ſtudia fouiſti, & apud Eminentiſsimum tuum fælicis memoriæ Cardinalem Gennaſium illi honorificè fauiſti, à me poſtulant, vt apud poſteros hoc erga te grati animi monumentum conſtituam. Tertia hæc ſectio de corporibus *regularibus* tibi debetur, qui à teneris ad ſeniles vſq; annos vitam verè *regularem*, hoc eſt iuxta prudentiæ, ac cæterarum virtutum *regulas* pacatiſsimam inter aulicas curas produxiſti. Circinus erectis in altum cruribus, gentilitium ſtemma Gennaſiæ familiæ, quod pro tua in Eminentiſsimum Cardinalem obſeruantia, tuo ſtemmati præpoſuiſti, iure geometrico potiſsimæ, ac extremæ parti huius tertij geometrici voluminis debetur. Quo ſymbolo, ad Authoris mentem aptiſsimo, indicatur finis princeps geometricarum harum lucubrationum, ſcilicet in cęlo perpetuæ fęlicitatis circulum circinare, fixa in Deo mente, quod rerum omnium centrum, ac beatiſsima quies eſt.

In ſymbolo circini cruribus in cœlum obuerſis indicatur finis propoſitus Authori Aerarij.

Si quid ex huius Authoris Apiarijs ſapuit, aut publicè profuit tibi primo debetur, qui apud Eminentiſsimum Cardinalem Gennaſium effeciſti, vt iuberet ille Authorem huius Aerarij Bononia non abeſſe, vbi occaſio, & pecunia edendis Apiarijs opportunè ſuppeditarunt. Ac Romæ litterarij negotij cauſa diuerſanti Authori Aerarij non ſolum firmiſsima ſtudiorum patrocinia prouidiſti, ſed pro tua in eum beneuola, ac

bene-

benefica animi propenſione Eminẽtiſsimo Gennaſio ſuaſiſti, vt ſummis à te laudibus deprædicatum eccleſiaſtica ornandum dignitate cenſeret. Quam honorificã de ſe cogitationem ab ipſomet Eminentiſsimo Gennaſio vbi primũ Aerarij Author accepit, ſtatim ad Eminentiſsimi pedes genuflexus accidit, ac ſacram benefici præſulis dextram oſculatus, & gratijs actis pro illuſtriſsima erga ſe voluntate, oblata dècora ab ſe abrogauit, rogauitq; vt liceret ſibi priuato, ac cœnobitæ *ſtudijs florere ignobilis oti;* publicæ, atq; eccleſiaſticæ rei profuturũ ſe magis calamo, quàm pedo. *Eccleſiaſtica dignitatis repulſio.* *Virg.Geor.*

Scilicet hoc facto ſecutus eſt Author Aerarij exemplum modeſtiæ tuæ, qua, poſt annorum quadraginta probatiſsimam, & ingentibus meritis cumulatiſsimam in te fidem in honorificis, & primarijs munijs apud Eminentiſsimum Gennaſium, poſt grauiſsima negotia cum Summis Pontificibus (quorum etiam procreationibus bis in Eminentiſsimorum Electorum comitijs interfuiſti) cum Eminentiſsimis purpuratis, cum Principibus viris, & cum Prorege Neapolitano fęliciſsimè tractata, plurium Eccleſiaſticorum purpuratorum coniuratis, ac penè armatis precibus vnum te ad honorifica poſcentibus modeſta conſtantia obſtitiſti, ac te poſt aulicos Romanæ vrbis euripos, in pacatiſsimum Bononienſis libertatis ſinum recepiſti, Deo, tibi, ac domeſticis tuis vacaturus. *Modeſti animi exempla.*

Tedeſcha familiæ antiquiſſima, et moderna nobilitas.

Hic iucundum tibi eſt aliquando ſucciſiuis horis nobiliſsimæ familiæ tuæ domeſticos annales euoluere, ac recolere, quemadmodum Monachio è Bauaria proaui olim tui diuitijs, ac nobilitate inſignes Ferrariam anno 1428 trāſmearint, ampliſsima prædia coemerint, ad iura primariæ nobilitatis admiſsi fuerint, ac Oppidi olim inter Bononiam, ac Imolam Dynaſtiam obtinuerint, cum primarijs Bononienſibus, ac Ferrarienſibus familijs inſignitis eccleſiaſtica purpura, Senatoria dignitate, Marchionatibus, Comitatibus, ac Dynaſtijs conſanguinitates contraxerint, quales licet hic numerare Ludouiſios, Roſſetos, Albergatos, Sacratos, Montecuculos, Mareſcottos, Blanchinos, Bouios, Caſtellos. Relegis poſt numeroſam annorum ſeriem Franciſcum Tedeſchum Filium Alexandri auunculi tui nuptui accepiſſe Illuſtriſsimam Hyppolitam Mareſcottam patritiam Bononienſem; è duobus autem conſobrinis Alexandri auunculi, & Iohanis parentis tui Stephanum nupſiſſe Illuſtriſsimę Barbaræ Sacratæ Eminentiſsimi Cardinalis Sacrati Sorori, Cæſarem verò Illuſtriſsimæ Camillæ Caſtellæ. Memoras geminas Illuſtriſsimas Montecuculas ſorores geminis Tedeſchis fratribus nuptui traditas, Iuliam Alexandro, Iohanni verò Illuſtriſsimo parenti tuo Iſabellam, ex qua duos, ac viginti filios ſuſcepit, quorum tu ſuperes ætate poſtremus, meritis primarius. Vt alios

omit-

omittã, Hieronymus germanus tuus anno 1625 nupſit Eliſabettæ Bouiæ matri Marchionis Senatoris Blanchini, ac ſorori matris Eminentiſsimi, ac Reuerendiſsimi nunc Cardinalis Ludouiſij Archiepiſcopi Bononienſis, ac Principis. Aloyſius verò, Hercules, Albertus, Horatius duorum alter, illuſtria bellicæ fortitudinis exempla præbuere in bellis Belgicis, Germanicis, Venetis, militaribus præfecturis, ac vita honorificè perfuncti. Tu verò, pacatioris vitæ honoribus, ac dignitatibus auctus, Octauij Germani tui è viuis nuper ſublati geminis Illuſtriſsimis filijs Iohanni, & Iacobo amantiſsimi parentis vices exhibes; in quorum vtroq; illuſtria ſemina, ac ſpes ingentes, præſertim in Illuſtriſsimo Iacobo, auitæ virtutis, ac nobilitatis in ſeram poſteritatem propagandæ animo prouides.

Cæterum honeſtiſsima tui ſeceſſus otia ſolantur in primis Eminentiſsimi, ac Reuerendiſsimi gemini S. R. E. Cardinales, Carolus Roſſettus, & Dominicus Gymnaſius. Quorum alter adhuc in viuis (ac vtinam diutiſsimè, ac feliciſsimè) perſtat, alter è viuis iam pridem abijt. Alterius humaniſsima, & honorificentiſsima conſuetudine felix efficeris, alterius poſthuma memoria hilararis. Quorum immortalia erga te, tuamq; familiam promerita ne vnquam apud te in obliuionem abeant, habes in tuis delitijs breuiaria aliqua heroicarum in vtroq; virtutum. Quæ hìc

ego

ego nunc poſteritati tranſmittenda cenſui pro monumento animi in te gratiſsimi erga geminos Eminentiſsimos Purpuratos ampliſsimè, ac optimè de te meritos. Breuiar. 1 hoc eſt.

Elogium Eminētiſs. Card. Roſſetti.

Carolus Cardinalis Roſſettus
In magna Britannia, apud Reginam Apoſtolicus
primum Miniſter,
Archiepiſcopus deinde Tarſenſis,
Et Coloniæ Nuntius extraordinarius,
Tum Epiſcopus Fauentinus,
Demum ætatis ſuæ anno xxix
S. R. E. Præsbyter Cardinalis,
Et de Latere Legatus pro vniuerſali
inter Principes pace.

Vt amica poſteritas hìc etiam veſtigium aliquod admiretur, ac veneretur ingenij viuidè amœniſsimi, ac verè in Eminentiſsimo eminentiſsimi, appono exemplar, quod habes in tuo myrothecio, Epiſtolæ ab eodem Eminentiſsimo Roſſetto ad Sanctiſsimum, ac Beatiſsimum Summum Pontificem Innocentium Decimum perſcriptæ.

Tuos, Beatiſsime Pater, exoſculor humiliſsimè pedes, &, dum perennem auguror felicitatem, Innocentio quartum, qui iam ſubnaſcitur, annum ex animo gratulor. Toto triennium plaudente orbe imples feliciter, & tot inter minas benè cum Sanctitate tua ſtamus omnes. Quartum, quem inchoat Sanctitas tua, ominamur annum bono alite, id eſt Sanctitate tua ſemper ſoſpite

fæli-

fælicissimum; vt, qui in cæteris diſplicent, in Sanctitate tua iam placeant anni plurimi. Vitæ enim tuæ eundem, ac noſtræ fælicitatis curſum eſſe iudex autumo non falſus. Annum Sanctitati tuæ non iam quartum deuoueo, ſed, quia Decimus es, vltra decimum viue. Hæc Innocentij laus eſt, id mei animi votum merito non impar tanto, me ſi ſentiat Sanctitas tua non annos modò, ſed & ſæcula deprecari. Valeat, &, dum perhumaniter mecum, vt ſolet, egerit Sanctitas tua, benedices coronæ anni benignitatis tuæ. Fauentiæ, &c.

Plura olim, ac, vt ſpero, non erubeſcenda purpuræ Principis illius Eccleſiaſtici, ab auunculo meo materno prodentur poſteritati. Hæ interim hìc ſcintillæ luminis olim illuſtrioris, ac amplißimi. Venio ad breuiarium apud te Eminentißimi Gymnaſij.

Eminentiſſimus, ac Reuerendiſſimus Cardinalis Gennaſius, Sacri Cardinalium Collegij Decanus, quem Gregorius XIII vtriuſq; Signaturæ Præſidem, Sixtus V Campaniæ Gubernatorem, & Sipontinum Archiepiſcopum, Clemens VIII Apoſtolicum Nuntium apud Hiſpaniarum Regem, ac paulo poſt Cardinalem, crearunt. Gennaſius heroicarum virtutum Gymnaſium, Continentiæ, ac Magnanimitatis in opum contemptu, dum legatione Hiſpanica perfunctus, ſexdecim millia nummorum aureorum à Rege oblata repudiauit; Iuſtitiæ ſimul, ac Miſericordiæ, dum Piceni prouinciam ab exulum, ac prædonum direptionibus expurgabat, & capitalem ſententiam in ſontes conſcriptam lacrymis obliterabat, extremo *Elogium Eminētiſſimi Card. Gennaſij.*

tremo

tremo ſupplicio mulctatorũ orbatis puellis pecunias elargiebatur; Religionis, Pietatis, Liberalitatis, Munificentiæ, quibus duo millia nummûm aureorum ex Eccleſiæ Sipontinæ prouentibus ſepoſuit in ſubſidia ſeruorum ſuorum ægrotantium, & lautè peregrinos inopes excepit, ſacris virginibus, ac puellis etiam de pudicitia periclitantibus pecuniaria ſubſidia ſubminiſtrauit; Carpentoracte, Galliarum in Vrbe, annuam copioſam pecuniam prouidit in ſacra ſuffragia pro vita functi fratris, atq; aliorum pijs manibus purgatorio igni ſubducendis; Tybertnis Oſtijs Templum, & Xenodochium extruxit, Veliternis Sacellum ſupellectili pretioſà inſtruxit; in Monte Gargano D. Michaelis templum diuitijs cumulauit, in Oppido Bononienſi ſacrarum virginum cænobium ampliſſimè ditatum condidit, & dotalem annuam pecuniam octonis puellis nubendis aſſignauit; Romæ collegium totidem iuuenum laureandorum erexit; Palatium deniq; ſuum in Templum, & Sanctimonialium Cænobium regiè dotatum conſecrauit; ac ſpectatiſſimum ſpecimen præbuit quos in vſus Eccleſiaſtici cenſus impendendi ſint. Ab auro enim ſacro, hoc eſt eccleſiaſtico (quod eſt diuini cultus, & pauperum patrimonium) in otioſa, & pernicioſa expenſo Diuinæ Iuſtitiæ ferrum ad publicas Eccleſiæ calamitates prouocatur.

Tu verò Illuſtriſsime ac Reuerendiſsime Domine, Eminentiſsimi tui Gymnaſij (cui quatuor, ac 30 annis in cubicularia præfectura inſeruiſti) exemplis prouocatus opes tuas inopum, & ſacro-

cro-

crorum locorum, ac cætuum indigentiæ quàm potes ampliſsimè partiris. Dignus ea, & alia propter cuius virtutibus, & proauis Author Aerarij, ac ego, pro tuis in vtrumq; promeritis, literarium hoc animi erga te grati monumentum rependamus. Quod, enixè ac humillimè obſecro, ea excipias animi beneuolentia, qua Authorem tibi addictiſsimum amplecteris. Te interim Illuſtriſsime, ac Reuerendiſsime Domine, ac Eminentiſsimi tui Gennaſij pios manes humillimè veneror.

Bononiæ Idibus Septembris Anni 1647.

§ I.

Indicata quæ ad eruditionem, & ornatũ quinque corporum regularium pertinent, de quibus in libris Elem. 13, 14, 15.

NE à Breuiarij breuitate diſcedamus, nec tamen omittamus de more noſtro indicare ſaltem ea, quæ poſſint Tyronibus condire ſeueritates Geometricas, reuiſe quæ habes apud nos in 1. Tom. huius Ærarij ad prop. 46, § 1, & 2; cur hæc corpora regularia dicantur, cur tantum quinq; ſint, cur Platonica appellata, cur, & quænam eorum ſint ſingulis elementis attributa; circa eorum compoſitiones aliquorum Platonicorum hallucinationes. Reuiſe præterea Apiar. 10, progym. 1, propoſ. 6, vbi de horum corporũ harmonijs, reciprocationibus. &c. Adde Clauium ad finem lib. 13, vbi inter cætera, ſunt regulæ inueniendi numerum laterum, & angulorum cuiuſcumq; ſolidi regularis. Vide, recenſe, ac exige ad trutinam geometricam locum Ariſt. lib. 3. de Cælo, tex. 66, vbi affirmat: In ſolidis duæ tantum figuræ replent locum. *Ad eruditionem, & ornatum aduoca ea, quæ ſymbolica habes ad finem Pierij de hyeroglyphicis Ægypptiorum, de quinq; (ſeu potius de quatuor ibi) corporibus Platonicis. &c.*

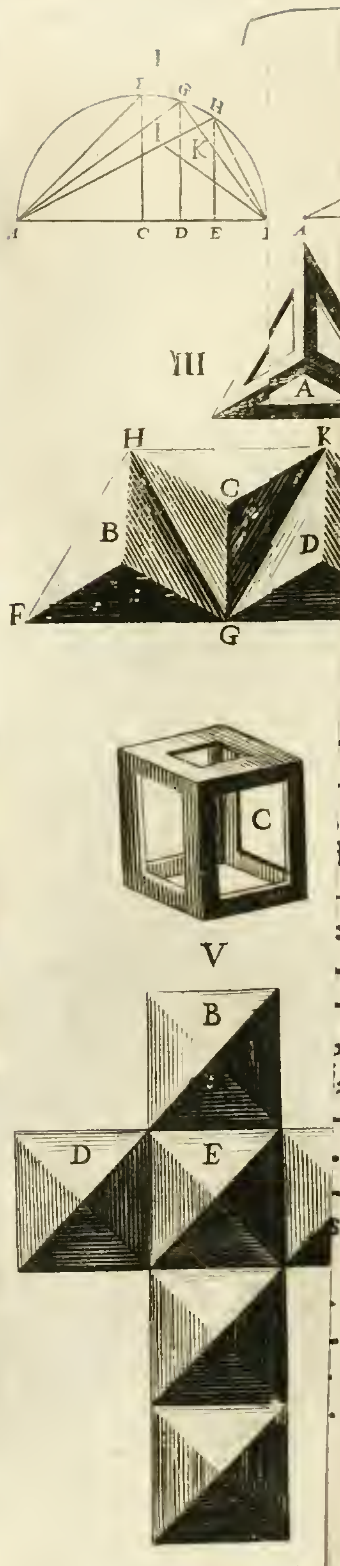


Figura S

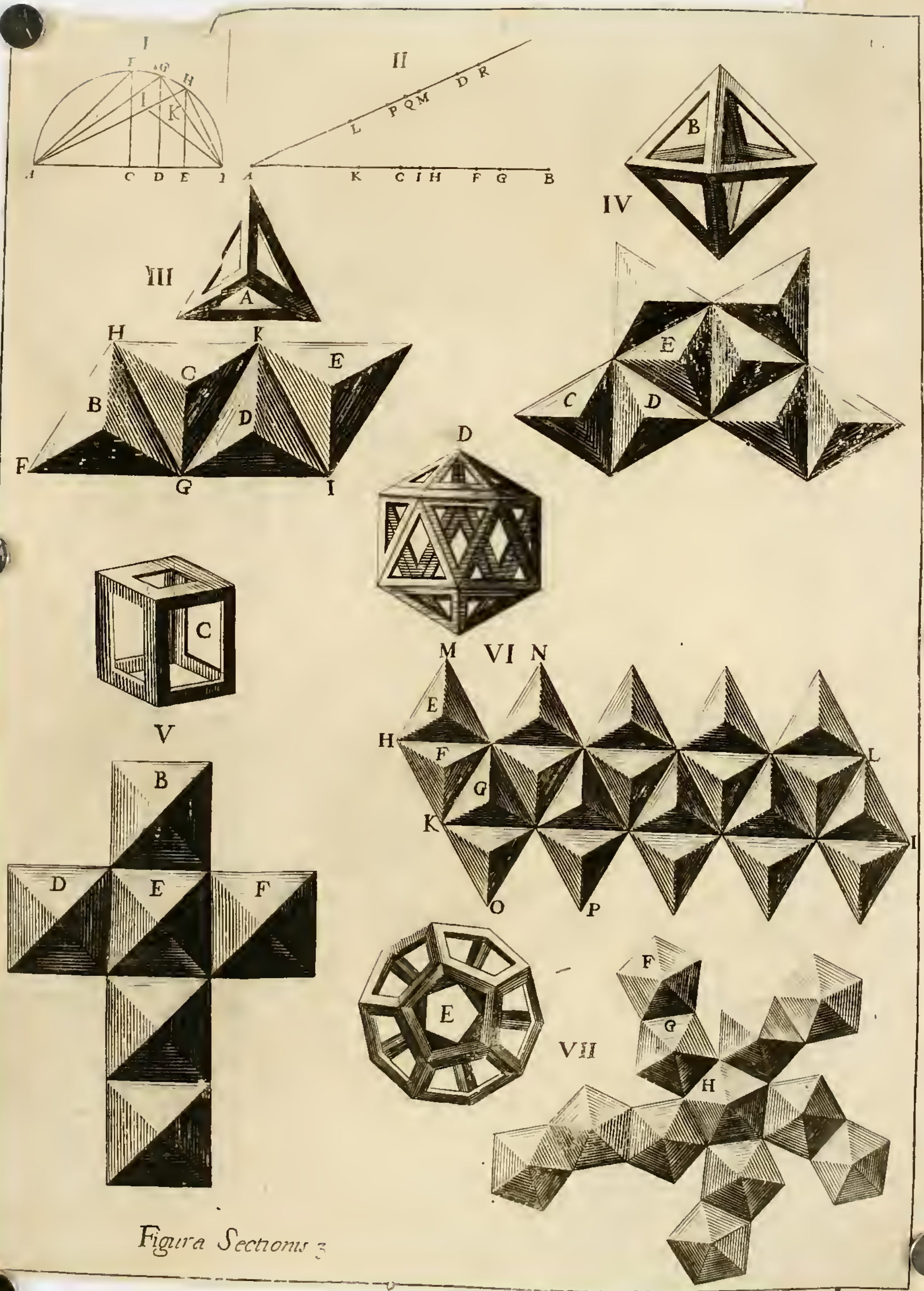


Figura Sectionis 3



§ II.

Libri 13 problemata (quæ ſunt propoſitiones propriæ, ac ſolę de ſolidis regularibus 13, 14, 15, 16, 17,) vniuerſali propoſitione, ac praxi expedire, & conuerſis augere.

LEMMA.

De lineà rectà diuisà iuxta latera quinq; regularium ſolidorum, & iuxta ſphæræ circumſcribendæ diametrum.

1 SVppono, in fine vltimę libri 13 propoſitionis, expoſitionem tam laterum quinque regularium ſolidorum, quàm diametri ſphæræ circũſcribendę. In Clauij figurà, quę 1 hìc appoſita eſt, & aptior, quã apud alios, accipe conſtructionem: AB diameter ſphæræ, cui ſolida quinq; regularia ſunt inſcribenda; AC ſemidiameter: DB tertia pars diametri: EB quarta pars eiuſdem diametri: AFB ſemicirculus: à punctis C, D, E erectæ perpendiculares ad circumferentiam. Iuncta eſt AF, & connexæ AG, BG, AH, BH; HI obſciſſa eſt latus decagoni eius circuli, cuius ſemidiameter eſt, ſiue latus hexagoni BH, iuxta praxes, quas habes apud nos ad 30. propoſ. li. 6, & ad lib. 4. Connectatur ergo ad I recta BI. GB ſecta eſt (etiam ex noſtris praxibus) in K media, & extrema ratione: BK maius ſegmentum eſt.

Quibus conſtructis, ſunt AG latus Pyramidis, ſiue Tetraedri. (paullo inferius nomina eorum regularium ſolidorum intelliges ex eorum figuris, conditionibus, & conſtructionibus) AF latus Octaedri: BG latus Cubi, ſiue Hexaedri.

BI

BI latus Icoſaedri.BK latus Dodecaedri, vt demonſtratur in ea 18.prop.L13.Omiſi in figura Clauij iungere BF,quia nihil facit ad meam praxim.

2 In appoſita figura hìc ſecundà ſunt ſphęrę diameter, & latera longitudine dupla eorum,quæ ſunt in antecedenti figurà, eſtq; ſphæræ diameter AB,ſemidiameter AC,AG latus Tetraedri,AF latus Octaedri, AH latus Hexaedri, AI latus Icoſaedri, AK latus Dodecaedri, quæ quinq; ſolida inſcribi ritè poſſunt in ſphæra, cuius ſemidiameter AC, iuxta definitionem 31.ante lib. 11. ſcilicet, vt omnes anguli quinque eorum corporum regularium inſcriptorũ conſtituantur in lateribus ſuperficiei ſphæricæ. Sectà ergo ſemel ſic rectà AB, habes paratum facillimum compendiũ ad ſoluenda omnia problemata de inſcriptionibus omnium regularium ſolidorum datorum in data ſphæra, pro conſtructionibus, & pro dimenſionibus ſolidis corporum regularium. &c. vt in ſeq. vniuerſali problemate mox videbis.

SCHOLION.

Quæ in lib.13 ante propoſitiones à nobis ſoluendas ponuntur, non ſunt de ſolidis, ſed pro ſolidis quaſi quædam lemmata, quibus nos non egemus pro noſtra vniuerſali propoſitione mox apponenda.

§III.

Corollarium de comparatione laterum in corporibus regularibus.

Apparẽt in fig.2 lineà AB ſectà ad quãtitates laterũ, ordo, & comparationes eorum, ſine neceſſitate poſterioris partis demonſtrationis in prop. vltima lib.13.

§ IV.

PROBLEMA I, ac vniuerſale.

Datà ſphæræ ſemidiametro, inuenire latus ſolidi regularis inſcribendi, aliter, ac facilius, quàm apud Euclidem.

INteruallo ſemidiametri AC, (in 2 fig.) cẽtro A duc arcum occultum à C etiam vltra P, & ex C ſeca ductum arcũ ad interuallũ datæ ſemidiametri velut in P. Aptatà regulà ad AP, & ductà occultà A etiam vltra R, itemq; centro A, interuallo ver.gra. AG, fac ſectionem in R, eritq; interuallum GR latus Tetraedri inſcribendi ſphæræ, cuius ſemidiameter eſt interuallum CP. Pariq; ratione inuenies aliorum regularium ſolidorum latera inſcribenda in eàdẽ ſphæra ſemidiametri CP; ſcilicet interualla FD, HM, &c. pro lateribus Hexaedri, Octaedri, &c.

§ V.

PROBLEMA II
Conuerſum præcedentis problematis vniuerſalis.

Dato latere ſolidi regularis, inuenire ſemidiametrum ſphæræ circunſcribendæ.

SIt in exemplo datum latus Tetraedri. Centro A, interuallo AG, quod eſt lateris Tetraedri, duc arcum ex G etiam vltra R: ex G fac ſectionem in ducto arcu

iuxta

iuxta quantitatem dati lateris, finge eſſe interuallum GR. Aptatà regulà ad AR, & ductà occultà AR, & interuallo AC factà ſectione in P, erit interuallum CP ſemidiameter ſphæræ circumſcribendæ Tetraedro, cuius latus eſt interuallum GR. Pariq; ratione de alijs aliorum regularium ſolidorum lateribus datis, quibus inuenienda ſit ſemidiameter ſphæræ circumſcribendæ.

§ VI.

PROBLEMA. III.

Tetraedri ſolida conſtructio, praxis, analyſis.

1 Solidas appello cōſtructiones, & reſolutiones quinque regularium corporum, quia quas alij purè mechanicè exhibent, eę ſunt ſuperficierum planarum ambientium corpus ſolidum; nos ita oculis ipſis exhibebimus, vt Tyrones poſſint facilè concipere animo compoſitionem, & reſolutionem in partes ſolidas componentes regulare ſolidum.

Paullo etiam aliter eas partes ſolidas nos diſponemus, quàm ſuperficies earum planas diſponunt aliqui alij. In ſolidis regularibus conſtruendis, reſoluendis, metiendis ſequemur ordinem laterum indicatum in § 2, nu. 2. hu. 3 ſec.

2 Igitur, Tetraedrum eſt ſolidum regulare ſub quatuor triangulis ęqualibus & ęquilateris quæ baſes ſunt quatuor pyramidum ſimilium, & æqualium, habentium vertices ad commune punctum, quod eſt centrum Tatraedri, & componentium Tetraedrum, quod habet quatuor angulos ſolidos, & acutos, ſex latera, & duodecim angulos planos acutos. Quale vides hìc in 3 fig. A, ſed excauatum, vt vno intuitu videas etiā oppoſitas partes, & numerum laterum, & angulos ſolidos, & planos, & baſes, quæ laterent oculis ſub ſolido non excauato. *Definitio Tetraedri.*

3 Pro

3 Pro partibus verò interioribus ſolidum componentibus vide appoſitas, & expoſitas hìc quatuor pyramides B, C, D, E, omnes inter ſe ſimiles, & æquales. Quod & demonſtro; nam ſingulæ ſunt ſuper baſibus quatuor triangulorum æquilaterorum inter ſe æqualium, iuxta definitionem Tetraedri. Præterea ſingulæ ſub tribus iſoſcelibus æqualibus; nam latera BF, BG, BH, & reliqua latera in tribus reliquis pyramidibus C, D, E ſunt èadem ſemidiameter à centro cõmuni Tetraedri, & Sphæræ, in qua Tetraedrum deſcribitur; quæ ſemidiameter pertingit ad inſcriptæ figuræ angulos in puncto communi cuſpidis anguli, & ſuperficiei ſphæricæ, iuxta definitionem 31 de inſcriptione figuræ ſolidæ in ſphærà; baſes verò eorum iſoſcelium ſunt latera triangulorum æquilaterorum æqualia. Ergo, iuxta defin. 10. lib. 11. ſunt omnes illæ quatuor pyramides B, C, D, E ſimiles, & æquales Quibus iuxta latera communia I, K, G, H complicatis, atq; inter ſe congruentibus, & cuſpides B, C, D, E in commune centrum Tetraedri conferentibus, fit cõpoſitio, ſeu cõſtructio ſolida Tetraedri. —

4 — Et, ad praxim in aliqua materia phyſicà habes in promptu apud nos compendiũ, in § 5 huius 3 ſectionis. pro inuentione ſemidiametri (dato latere Tetraedri) ſphæræ circumſcribendæ.

5 Habes etiam, ac vides in antecedenti conſtructione analyſim Tetraedri in ſuas partes componentes.

§ VII.

PROBLEMA IV.

Octaedri ſolida conſtructio, praxis, reſolutio.

Defin. Octaedri. 1 OCtaedrum eſt ſolidum regulare ſub octo triangulis æquilateris, quę ſunt baſes octo pyramidum ſimilium, & æqualium habentium vertices in

in centro Octaedri, & componentium Octaedrum, quod habet duodecim latera, ſex angulos ſolidos rectos, viginti quatuor planos acutos. Quale vides hìc appoſitum B excauatum, &c. in 4 fig.

2 Pro partibus verò interioribus ſolidum componentibus vide appoſitas, & expoſitas hìc octo pyramides C, D, E, &c. omnes inter ſe ſimiles, & æquales. Quod eodem modo licet demonſtrare, quo demonſtratæ ſunt ſimiles, & æquales pyramides Tetraedrum cõponentes. Æquales enim habent baſes, & ſub æqualibus ſunt iſoſcelibus ex eàdem ſemidiametro. &c.

3 Pariter pro inuentione ſemidiametri ſphęrę circumſcribendæ dato Octaedro, ad praxes phyſicas habes ex dato latere Octaedri modum in § 5 hu. 3 ſect.

4 Reſolutio Octaedri patet in expoſitis Pyramidibus.

§ VIII.

PROBLEMA V.

Cõpoſitio, praxis, analyſis Hexaedri, ſiue Cubi.

1 HExaedrum, ſiue Cubus eſt ſolidum regulare ſub ſex ſuperficiebus quadratis habens octo angulos ſolidos, viginti quatuor planos, omnes rectos, & latera duodecim, ceu vides in appoſ. cauo C, fig. 5. *Defin. Hexaedri ſiue cubi.*

2 Componitur è ſex pyramidibus, quas hìc expoſitas vides B, D, E, F. &c, quæ habent baſes quadratas, & ſunt ſingulæ ſub quatuor iſoſcelibus, quorum bina æqualia latera ſunt ſemidiametri à centro ſphæræ circumſcribendæ dato Cubo vſque ad angulos eiuſdem. Suntq; omnes illæ pyramides ſimiles, & ęquales ex demõſtratione ſimili eius, quę eſt in § *6*.

3 Similiter, & hìc ad praxes phyſicas, & conſtructiones Hexaedri, ex dato eius latere licet elicere ſemidiametrum

ſphæ-

ſphæræ circumſcribendæ, vt in § 5.

4 Patet & analyſis in expoſitis pyramidibus.

§ IX.

PROBLEMA VI.

Compoſitio, praxis, analyſis Icoſaedri.

Defin. Icoſaedri. 1 ICoſaedrum eſt ſolidum regulare ſub viginti planis triangularibus æquilateris, habens triginta latera, duodecim angulos ſolidos obtuſos, & ſexaginta acutos planos, quale vides hic in fig. 6, appoſitũ D, & expoſitas etiã 20 pyramides E, F, G, &c. quarum baſes triãgulares æquilateræ oſtendunt (multiplicatis 20. per 3.) triangula acuta 60; anguli verò 12 ſolidi fiunt à bis ſenis communibus iuncturis inter H, I, K, L, dum complicatæ pyramides conſtruunt ſolidum Icoſaedrum.

2 Quod ad ſimilitũdinem, & æqualitatem 20 pyramidum inter ſe, & quod ad praxim cõſtructionis phyſicæ, cui ſeruit inuentio ſemidiametri in Icoſaedro, dato eius vno latere; & quod ad eiuſdem Icoſaedri analyſim, & conſtructionem, patent hìc omnia per modos ſimiles in §. 5, 6. &c.

§ X.

PROBLEMA VII.

Compoſitio, praxis, analyſis Dodecaedri.

Defin. Dodecaedri. DOdecaedrum eſt ſolidũ regulare ſub duodecim pentagonis regularibus, habens triginta latera, viginti angulos obtuſos ſolidos, & ſexaginta angulos obtuſos planos; Quale vid. in fig. 7 E, & eius expoſitas py-

pyramides interiores ipſum componentes F, G, H. Quod ad latera attinet, & angulos, oculo ipſo ſcrutari potes eorùm numerum in ſolido cauo E. Pyramidum componentiū Dodecaedrum æqualitatem, praxim ad phyſicam compoſitionem, analyſim habes per ſimilia ijs, quæ in § 5; 6. &c.

§ XI.

COROLLARIVM.

Pro lib. 13. Elem. de ſolidis regularibus noſtra compendia & auctaria.

HAbes in antecedentibus conſtructionibus quinque ſolidorum regularium breuiter, facilè, ac aliter, quàm apud Eucl. expoſita omnia problemata libri 13 ſolidorum. Nam præcedentes in eo libro propoſitiones nòn ſunt de ſolidis, ſed quaſi lemmata ad problemata de ſolidis. Quibus nos lemmatibus dum non egemus, compendioſius inſtruximus Tyrones circa ſolidorum regularium conſtructiones, quibus & opem ad praxes phyſicas, & analyſes, & conuerſas addidimus; quæ omnia non habet Euclides, ſicut nec vſum, ac fructum Tyrònibus iucundum hìc ſequentem de dimenſionibus ſuperficierum, & ſoliditatum corporum regularium.

§ XII.

PROBLEMA VIII *vniuerſale.*

Dati ſolidi regularis ſuperficiem metiri.

FAcillima, & expeditiſſima operatio eſt, ſuppoſitis ijs, quæ apud nos habes in 1. To. huius Ærarij de dimen-

ſionibus planarum figurarum, præſertim regularium, ad propoſ. 32, §. 20. Ad 41, § 2; theor. 1, 2, 3, &c. Dati enim ſolidi regularis dimensà vnà è planis regularibus ſuperficiebus, ſi toties addatur ſibi, quot habet planas ſuperficies id ſolidum, ſumma conficiet quantitatem totius ſuperficiei ſolidum regulare ambientis. Applica regulã hanc vniuerſalem ſingulis quibuſcumq; regularibus ſolidis, & vtere præciſione numeraria tu, mi Tyro, ne nos breuitatem in hocce Stereometrico breuiario amittamus.

Finge (in fig. 3) vnum è quatuor triangulis ęquilateris Tetraedri A continere menſuram trium quadratulorum: pro numero quatuor triangulorum conficientium ſuperficiem Tetraedri, quater ſibi addita tria conficient 12 quadrata pro tota ſuperficie Tetraedri. Proportionaliter de reliquis regularibus ſolidis.

§ XIII.

COROLLARIVM.

Pro aliquibus propoſitionibus lib. 14 Elem. noſtra compendia.

HAbes in antecedenti regulà vniuerſali compendiũ longe facilius, quàm ſint modi aliqui, qui elici poſſunt ex propoſ. 2, 6, 14 lib 14, pro dimenſionibus ſuperficierum quinq; omnium corporum regulariũ. Cùm tamen in eo libro elementari deſideretur dimenſio Icoſaedricæ ſuperficiei, ſicut in cit. prop. indicantur quantitates ſuperficierum Dodecaedricæ, Octaedricæ, Tetraedricæ, Cubicæ,

§ XIV.

LEMMA.

Inuenire perpēdicularem à centro ad baſim dati ſolidi regularis pro dimenſione ſoliditatis quinq; corporum regularium.

ELicitur huiuſce lemmatis regula vniuerſalis partim ex lemmate in § 2, partim ex noſtris poriſmatis ad propoſitiones li.4; eſtq; adeo facilis, & expedita, vt nihil magis.

1 Igitur, dato regulari ſolido, ſi ſcire aueas quantitatē perpēdicularis à centro ſolidi (ſiuè ſphæræ ſolido circūſcriptæ) ad vnamquāq; planarum baſium regularium eius ſolidi, accipe per § 5 ex dato latere ſolidi quantitatem ſemidiametri ſphæræ ſolido circumſcribendæ, & ex numero quadrato eius ſemidiametri extrahe quadratum ſemidiametri eius circuli, qui circumſcriberet vnam ſuperficiem regularem planam dati ſolidi (iuxta à nobis expoſita ad lib.4 vbi, dato latere regularis figuræ, docuimus in circino proportionum ſtatim ſemidiametrum inuenire circuli circūſcribendi) & reliquus è ſubtractione numerus erit quadratum, cuius radix erit perpendicularis quæſita. Cuius operationis demonſtratio patet è 47 propoſ.li.1.

2 Finge in exemplo Dodecaedri E, ex dato eius vno latere, te, per § 5, elicuiſſe ſemidiametrum ſphæræ Dodecaedro circumſcribendæ, cuius quantitas ſit 6, & quadratum 36. Per dicta ad lib. 4, ex dato latere vnius pentagonicæ ſuperficiei Dodecaedri inueneris ſemidiametrum circuli pentagono circumſcribendi eſſe 3; cuius quadratum 9 ſubtractum ex quadrato 36 dat reliquum quadratum 27, cuius radix eſt perpendicularis quęſita. Nam per-

pēdicularis à centro ad vnam baſim, eo ipſo quod eſt perpendicularis, facit angulum rectum cum ſemidiametro baſis, quæ ſemidiameter ad angulum baſis pertingit: cui recto angulo ſubtēditur ſemidiameter ducta à centro ſolidi ad angulum ſolidi communem cum angulo baſis. Itaq; fit triangulum rectangulum propoſitionis 47, li. 1. Applica tu, mi Tyro, per imaginationem conceptis figuris hæc poſtrema in abſtracto dicta.

§ XV.

COROLLARIVM,

Et noſtrum compendium, & auctarium primum ad lib. 14 Elem.

HAbes in proximè antecedēti lemmate facillimam, & vniuerſalem inuentionem eius perpendicularis in quinque ſolidis regularibus, de qua, & pro qua plures ambages exponuntur in lib. 14 per aliquas propoſitiones; quarum inſtar, atque ad praxim eſſe poteſt hoc antecedens lemma.

§ XVI.

SCHOLION.

Hexaedri, & Octaedri à centro ad baſes inuenire etiam aliter perpendiculares.

HExaedri quidem C à centro perpendicularem ad baſes eſſe æqualem dimidio cuiuſlibet laterū, facilè patet. Octaedrū verò B cùm habeat diametrum iungentem duos oppoſitos angulos rectos ſolidos, & opponatur vtrinq; duobus lateribus,

(quæ

(quæ hic ſcribimus mi Tyro, applica oculo, & mente ipſi figuræ) angulum ſolidum rectum conficientibus, ex quantitate vnius lateris quadratè multiplicatâ, & geminatâ, & compoſitâ fit quadratum maius, cuius radix eſt diameter Octaedri, & radicis dimidium eſt ſemidiameter. Quæ patent pariter ex 47. li. 1.

§ XVII.

PROBLEMA IX,

In quo auctarium ſecundum ad lib. 14 elem. & regula vniuerſalis pro dati corporis regularis ſoliditate metienda, cum vſu Corollar. prop. 7 lib. 12.

VNiuerſalis regula eſt vt, inuenta, per lemma antecedens, perpendicularis à centro ſolidi ad baſes, ducatur in tertiam partem ſuperficiei inuentæ per problema 8 vniuerſale in § 12. Sic enim conſtabit dimenſio ſoliditatis dati ſolidi regularis. Cuius regulę rationem, ſiue demonſtrationem geometricam, in exemplo mox indico.

Inſpice Tetraedrum A. Quoniã eius ſoliditas ex oſtenſis in § 6. (reuiſe figuram Tetraedri, & expoſitas eius pyramides) conflatur ex quatuor pyramidibus B, C, D, E, habentibus vertices in centro Tetraedri, & baſes triangulares æquilateras, &, per theorema 15 in ſectione prima huiuſce Breuiarij, priſma triplum eſt pyramidis habentis eandem baſim & altitudinem cum priſmate (quemadmodum & cylindrus eſt triplus coni eandem altitudinem, & baſim cum cylindro habentis, propoſit. 10. lib. 12, & apud nos aliter, ac breuiter in § 19 ad propoſ. 23 lib. 6) ideo ſi baſis vna Tetraedri ducatur in perpendicularem à centro, ſiue in altitudinem pyramidis vnius ex quatuor,

ex

ex quibus conficitur Tetraedrum, fiet priſma triplum eius pyramidis; pariq; modo de reliquis tribus pyramidibus Tetraedrum conſicientibus, quarum tres baſes ductæ in altitudinem, ſiue perpendicularem à centro, producent tria priſmata tripla ſingula ſingularũ pyramidum; ergo èadẽ perpendicularis à centro ad baſes, ſiue èadem altitudo pyramidum quatuor conficientium Tetraedrum, ducta in quatuor Tetraedri baſes conficientes totam Tetraedri ſuperficiem, producet priſma triplum ipſius Tetraedri. Ergo, vt fiat productum æquale Tetraedro, ducenda eſt perpendicularis à cẽtro, ſiue èadem altitudo pyramidum Tetraedri, non in totam, ſed in tertiam partem ſuperficiei, ſiue ſingularum baſium, ſiue totius ſuperficiei Tetraedri. Si enim èadem perpendicularis ducta in totam baſim, vel ſuperficiem producit triplum, ducta in tertiam partem baſis, vel ſuperficiei producit æquale. Quare conſtat regula, quæ eodem modo eſt vniuerſalis pro dimenſionibus reliquorum regularium ſolidorum, quæ, iuxta oſtenſa in eorum compoſitionibus, & reſolutionibus, in pyramides diſſecantur. &c

Repoſito hìc exemplo quantitatis ſuperficiariæ Tetraedri ex § 12, quæ ſit 12 quadratulorum, finge perpendicularem à centro Tetraedri ad baſim eſſe numeri 2, ſuperficiei pars tertia eſt 4, ergo 2 in 4 producunt priſma continens 8 cubulos conficientes dimenſam ſoliditatem Tetraedri.

Prædictis ſimilem formam applica cæteris ſoliditatibus metiendis reliquorum corporum regularium. Scientifici, & breuitatem ſpectantis eſt vniuerſales in aliquo exemplo aperire fontes, quos deinde curioſiores ad ſingularia deriuent.

§. 18.

§ XVIII.

SCHOLION.

De Hexaedri, ſiue cubi alia faciliore dimēſione.

Licet cubi dimenſio & ipſa ſubeat præcedentem vniuerſalem regulam, tamen facilior, & Tyronibus aptior eſt ea, quæ fit ex ductu baſis cubicæ, ſiue quadratæ, in eius altitudinem.

§ XIX.

COROLLARIVM.

Ad librum 14 elementorum auctarium tertium, & compendium indicata de proportionibus ſuperficierum, & ſoliditatum regularium. &c.

Ex anteced. probl. 9 § 17 habes vſum, & fructum theoriarum apud Euclidem circa inuentionem, & quantitatem perpendicularis à centro ſolidi regularis ad baſes. Quæ theoriæ ſteriles ſunt, & parum iucundæ animis Tyronum, niſi condiantur praxibus aliquibus demonſtratiuis. Itaq; noſtrum hoc auctarium, vſum, & applicationem appone lib. 14 Elem. ditando, & ſapidando.

Ex hactenus à nobis expoſitis, & demonſtratis, præſertim circa latera, & dimenſiones quinq; regularium corporum facilè deducuntur eorum comparationes, & proportiones inter ſe, & cum ſphæra circumſcripta &c. Nam corporibus ijs per præcedentia noſtra dimenſis, dimenſionum numeri inter ſe comparati oſtendunt & laterum, & ſemidia-

me-

metrorum,& perpendiculariũ à centris,& baſium,& ſuperficierum,& ſoliditatum proportiones,præſertim accedentibus dimenſionibus ſuperficiei, & ſoliditatis ſphæræ, quas apud nos habes facillimas, & nouas, & varias, etiam vltra nouum vſum geometricum centri grauitatis, & præſertim in ſect. 2 antecedente huius Breuiarij Stereometrici.

Itaq; theoremata,& prępoſitiones illæ,quę cum pluribus ambagimus verſantur circa eas comparationes in lib. 14, ſunt apud nos corollaria facile deducenda ex hoc noſtro Breuiario.

§ XX.

SCHOLION, in quo

Auctarium quartum, & compendia indicata de transformationibus, auctionibus, imminutionibus, diuiſionibus, &c. ſolidorum regularium.

EX antepoſitis in ſecunda ſectione huius Breuiarij, & ex aliqua propoſitione in hac tertia ſectione de dimenſione regularium ſolidorum, facilè deducuntur eorumdem etiam trãsformationes, auctiones, imminutiones, & ſectiones in data proportione. Nec opus eſt nos extra inſtitutum Breuiarij vagari per exempla indiuidualia circa regularia, quæ proportionali modo transformantur, augentur &c. quo oſtendimus reliqua ſolida elementaria in ſect. 2. transformari, augeri &c. Ne tamen Tyrones etiam in hac parte videamur prorſus deſtituere, ſequentia notentur.

1. Ex § 17. hu. 3. ſect. conſtat ſolidũm regulare eſſe æquale priſmati habenti baſes æquales tertiæ parti ſuperficiei ſolidi regularis, & altitudinem lineæ perpendicularis à baſe ad centrum ſolidi. Id priſma transformatur in æquale parallelelipedũ, per dicta in ſec. 2. Parallelelipedum transformatur in æqualem cubum, per ibid. dicta.

Ecce

Ecce iam regulare datum corpus transformaſti in regulare, nempe in cubum. Quod ſi in datum regulare ſolidum transformandus ſit cubus, tunc, ſine antecedentibus transformationibus dati regularis ſolidi in priſma, in parallelepipedum, in cubum, habes compendiũ transformãdi ſolum datum cubum in corpus aliud optatũ regulare.

Itaq; vel dato cubo, vel dato regulari corpore transformato in cubum, vt deniq; habeas latus regularis corporis, in quod transformandus eſt cubus, vtere probl. 41, ſec. 2. ſimiliq; modo quo ibi ſphærã dato cubo æqualem inuenimus, ſic data, pro latere cub (ver. grat. in 1 figura tabellæ huius 3 ſect.) diametro AB, ſi velis inuenire latus Tetraedri æqualis Cubo ex latere AB, finge tibi lubitæ magnitudinis Tetraedrum, puta ipſum A tertiæ figuræ, illudq; per hic antedicta transforma in cubum æqualem, velut in ipſum C quintæ figuræ; deinde inuenias quartam proportionalẽ ſic: fac vt latus cubi C ad latus Tetraedri A, ſic latus AB, ad quartam, eaq; erit latus Tetraedri excitandi æqualis cubo ex latere AB, per theor. 8 ſec. 1. Parique ratione de cæteris regularibus ſolidis inter ſe transformandis.

2 *Quod pertinet ad eorundem regularium ſolidorum auctiones, imminutiones, ſectiones in data ratione, eæ omnes facillimè exercentur, & expediuntur ex indicata transformatione dati regularis ſolidi in cubum. Cubatum enim ſolidum regulare augetur, imminuitur, ſecatur in data ratione, iuxta exempla, quæ habes in 2 ſectione huiuſce Breuiarij; deinde ſic auctum, imminutum, ſectũ transformatur rurſus in cubum, & cubus ipſe transformatur in regulare corpus auctum, imminutum, ſectum iuxta datam proportionem, inuenta ſcilicet quarta proportionali pro latere ſolidi regularis excitandi, velut habes in antepoſito hic exemplo Cubi tranſlati in æquale Tetraedrum.*

Præterea hæc hic indicata quemadmodũ non paſſim iacent apud omnes, ſic ſub pauculis verbis cludunt ſegetem ingentem exemplorum, quæ in varijs transformationibus, auctionibus, &c. regularium ſolidorum licebit proferre otioſioribus, quàm nos ſumus, & affectantibus prolixitatem, quã nos in hoc Breuiario non profitemur, vt doctus Lector agnoſcat apud nos plura in rebus, quàm in verbis.

§XXI.

PROBLEMA decimum, & Exodicum.

Quinq; ſolidis regularibus Regularem vnum circumſcribere.

LOCVS FIGVRÆ, SIVE ICONIS PRO PROBLEMATE 10 EXODICO.

Sequitur demonſtratio, & eius partes in margine indicatæ.

Ecquis

ECquis Philoſophici huius Ærarij conditori vel extremum aliquem angulum ſuis ipſius in ædibus abneget? Quis aptior locus, quam Breuiarium breui, & inter ſolida regularia Regulari? Lubet igitur hic ſub operis finem reponere finem (præter alios honeſtos in præf. ad 1 To. & in fine § 22 huius Breu. ac alibi expreſſos) propoſitũ Authori Ærarij, & ſæpe Ouidiano diſticho ſuſpiratum: Quæſitum. Datum.

Per mare Chinenſem ſine me, liber, ibis in vrbem.
Hei mihi quòd Domino non licet ire tuo, —

— niſi, quem hic vides, cartaceo, & atramentato; vt illic ſcientificè, ac religioſe operetur ſaltem in ſuperficiaria figurà, & mortuus, vbi ſolidus, ac viuus non potuit. Si quis Authori etiam hoc poſthumum iter inuideat, in paginam coruinos vngues exerceat; ſi tamen liceat ſine vlciſcenda eorum iniurià, quorum ſtemmata gentilitia religioſæ Authoris obumbrant oblationi, eorum alterius ære, alterius iuſſu hic lineatæ; non ſolum vt præcipuæ parti epiſtolæ huius Tertij Tomi dicatoriæ, neceſſariam hinc, lucem afferat, ſed etiam vt longinquæ peregrinationis comitem illum habeant, a quo philoſophicũ huncce currum geometricis circulis ſubrotatum acceperunt. Procul Corui ab INNOCENTI Columba, quam hic vides alis in protectionem expanſis, ac torquatam Pontificijs Petri clauibus, publicæ paci referandæ. Constructio ſolida in ſuperficiaria figura. Reſolutio deſtructoria. Ab abſurdè. Confirmatio. A neceſſario. Ab æquo, & honeſto. Cofirmatio altera præcipua.

Aſpice igitur hic, ò quicunq; oculo & tu pacato, nec læuo, nec liuido, nec iconomacho. Concluſio à pari.

Fr. Io. Baptiſta Riccius Sac. Theol. Doct. Coll. & Mathem. publ. lect. Authoris, & Ærarij ſtudioſiſsimus.

§XXII.

SCHOLION.

Indicata compendia apud alios pro Stereometricis libris elementaribus.

M*Aurolycus alia methodo, & breniore concinnauit ea omnia, quæ prolixius, ac diſſicilius expoſita habentur apud Euclidem lib.* 13, *& apud Hypſiclem in lib.* 14, *&* 15 *Elem.*

Præterea Pappus etiam aliter, (ac facilius, vt quibuſdam videtur, quàm Euclides) docet, ac demonſtrat inſcriptiones regularium ſolidorum in ſphæra. Pro Pappo habes etiam apud Clauium ex Pappo faciliora.

§ XXIII.

CAMPVS demonſtratorius, in quo –

– Compendioſus, & vniuerſaliſſimus modus indicatus pro demõſtrationibus particularibus vniuerſalizandis, hoc eſt facilè, ac breuiter traducendis ad ſcibilia, & genera vniuerſalia vtriuſq; quantitatis diſcretę, & continuæ, abſtractæ, & concretæ, planæ, ac ſolidæ.

De ſolido deniq; fine Authori Ær. propoſito.

1 VNiuerſaliſſimus quidem etiam eſt modus ille demonſtratiuus, quem præcipuè in Epilogo planimetrico, & in antecedenti Stereometrico Breuiario vſurpauimus, ſcilicet à figurarum ortu, & ab vſu geometrico centri grauitatis; ſed hìc alterum vniuerſaliſſimum demonſtratorium modum apertè, atq; vniuerſim indicamus, quem in exemplis peculiaribus vſurpauimus ad aliquas propoſitiones præcedentium librorum de planis, præcipuè in lib. 2, & 6, atq; etiam alicubi in Epilogo planimetrico; vt hìc, in fine Breuiarij de Solidis, appareat quemadmodum plures propoſitiones, non ſolum elementares, ſed aliæ etiam extra elementa de planis facere poſſint ad ſolida; & vt in fine noſtrarum harum geometricarum lucubrationum habeant acuriſſimæ huiuſce Philoſophiæ ſtudioſi hocce quaſi corollarium vniuerſaliſſimum demonſtratorium, in quo quaſi Breuiario verè mirifico infinitæ opes circa theorias vtriuſq; quantitatis clauduntur. Formam demõſtrandi vniuerſaliter de toto genere vtriuſque quantitatis ſubſtituendo numeros non ſolũ pro theorijs diſcretæ quantitatis, ſed & pro continuæ lineis, pla-

nis,

nis,ac ſolidis nos vſurpauimus vniuerſaliorem,quàm Antiqui in lib. 5.de proportionibus. Quo in libro eſt primum apud Antiquos veſtigium demonſtrandi vniuerſaliter de toto genere quantitatis continuæ,ſubſtituendo lineas pro planis,& ſolidis,circa quæ concludit eàdem demonſtrandi formà quidquid de ſolis lineis demonſtratum eſt.

Nota vniuerſ. dem.l. 5.

Quin etiam, quia, vt initio eius libri prodidimus, proportiones extenduntur etiam ad quantitatem continuam, & diſcretam, & ad concretam cum varijs materijs phyſicis, ideo valent demonſtrationes illæ geometricæ pro varijs etiam applicationibus.

Nos dum in eo libro 5,vniuerſaliter demonſtrante,pro lineis ſubſtituimus numeros(quemadmodum & in libro 2) vniuerſalitatem demonſtrandi & faciliorem, & ampliorē aſſecuti ſumus, dum etiam in diſcreta quantitate demonſtramus ea, quæ in continua demonſtrabantur.

Pr terea vt Tyronibus faciliorem demonſtrandi modū proponeremus pro lib.7,8,9 Elementaribus,exemplis noſtris numerarijs oſtendimus quemadmodum pleræque,ac præcipue librorum eorum propoſitiones oſtendi poſſint in numerarijs vulgatæ Logiſticæ notis, ſine abſtractis formis demonſtrandi per puncta locata pro notis arithmeticis.

2 Noſtros iſtos conatus roborarunt mirificè non ſolum apud antiquos aliqua (licet non pleniſſimè vniuerſalia) veſtigia huius formæ demonſtrandi, ſed in primis ingenioſiſſimus Maurolycus, qui iuſtis libris, & ingenti numero propoſitionum modum hunc vniuerſaliſſimum & ipſe prouidit,dum in 2.libro Arithmet.ſubſtituit numeros partim, partim lineas pro vtroq; genere quantitatis, & quod ſeorſim vel de numeris, vel de ſolis lineis, vel de ſolis planis, vel de ſolis ſolidis demonſtraretur ab alijs, ipſe vnico demonſtrationis complexu in numeris demonſtrat ſimul de toto genere quantitatis pertinentis ad lineas, plana, ſolida. &c.

Nos verò facilitatem adhuc maiorem Tyronibus in hoc genere demōſtrandi expoſuimus,poſitis ſemper,pro ſignis de-

demonſtrationum, vulgatis notis arithmeticis loco linearum, quas Maurolycus plerumq; pro quantitate etiam diſcretà vſurpat; ac prӕterea nos formas ab eo demonſtrãdi vſurpatas, quę ſupponunt varia è libris elementaribus, nos ſimplici expoſitione, atq; inductione per exempla vulgatarum logiſticarum operationum, multiplicationis, additionis, diuiſionis, &c. expreſſimus.

Ac denique elementares propoſitiones traduximus ad vniuerſalitatem, etiam extra vtrumq; genus quantitatis abſtractӕ, ad concreta, & applicata omni artium, ac ſcientiarum generi, & ad vſus, propè dixerim, infinitos in noſtro hoc toto, licet contracto, Ærario Philoſophiӕ Mathematicӕ.

3 Confirmatoria noſtrorum ex Maurolyco, ac alijs accipe. Maurolycus in lib. 2 Arith. propoſ. 1. *Quod de numerorum, linearum, & ſolidorum ductu, ratione, proportione, & ſymmetria, atq; ſimilitudine ratiocinamur, idem de quolibet quantitatis genere demonſtrare, atq; concludere poſſumus.* &: *Quidquid in ſeptimo, octauo, nono de numeris oſtendit Euclides, idem de quantitatibus in genere oſtendere poſſumus. Alicubi tamen pro numeris quantitates rationales ſubſtituendo.* &: *Quidquid in ſecundo, ſexto, & vndecimo elementorum de ductu, & proportione linearum, arearum, & ſolidorum traditur poteſt ad quantitates in genere ſumptas conuerti.* &: *Quidquid decimus elementorum de linearũ, & arearum ſymmetria, & ductu, aut proportione ratiocinatur, poteſt totum ad quodlibet genus quantitatis conuerti.* Concludit: *Omnis geometrica ſpeculatio redigitur ad numerariam praxim.* Scilicet etiam de lineis, de planis, de ſolidis ſimul intelligendo ſingula, quӕ in numeris demonſtrantur.

Li. elem. 7, 8, 9 vniuerſalizati.

& 2, 6, 11.

& 10.

In prӕfatione partis ſecundӕ lib. 2. Arith. idem Maurolycus de irrationalibus quantitatibus ſic: *Non per lineas, & areas quemadmodum Euclides* (*in lib.* 10) *ſed ſub terminis commenſurabilium, & incommenſurabilium quantitatum, earum conditiones, & proprietates, & colligantias proponemus. Nec facilè fuit elementa huiuſmodi à lineis, & areis ad quantitatem in genere ſumptam transferre, & numerariam ſimul praxim hinc deriua-*

tam

tam oſtendere. Mox: *Ordior nouum demonſtrandi genus; tantoq; in hac parte præſtantius Euclideo, quanto generalis quãtitas dignior, ac purior eſt primariæ Mathematicæ, quam linea ſpecialis, & conuenientior. Simul per viam hanc, quam in demonſtrando aſſumimus, multa noteſcent, quæ in decimo elementorum deſiderantur.* Vide apud citat. Maurolyc. exempla in praxi, & relege, quæ habes apud nos ex eodem Authore ad li. 5. vbi de vſu numerorum in Geometricis.

Elẽ. Cõ. elem. vniuerſal. Apollonius in Conicis elementis aliqua ex parte (ſcilicet ſaltem in quatuor ſimul conicis ſectionibus) vſus eſt modo demonſtrandi ſemiuniuerſali, dum eàdem demonſtratione aliquas affectiones demonſtrat ſimul in circulo, & tribus reliquis conicis ſectionibus.

4 Habent Doctores Geometrici, atq; Auditores ex prędictis ampliſſimum campum, & modum dũ vel docent, vel diſcunt vnam aliquam propoſitionem elementarem, eam eleuandi ab indiuiduo ad genera, & in numeris oſtendendi propoſitionem, quæ, verbi gratia, lineis applicata eſt, etiam de areis, de ſolidis, &c. Sic enim & ditantur, & iucundantur varietate copioſa propoſitiones, & cognitiones per genera, quæ ſiccæ ſunt in indiuiduo, vel in ſpecie.

Habes & tu, amice Lector, propoſitionum fæcunditatẽ elementariam hìc indicatam, etiam abſtractam, hoc eſt etiam circa genus vtriuſq; abſtractę quantitatis; quemadmodum habuiſti à nobis elementariarum earumdem propoſitionum fæcunditatem concretam, & applicatam varijs vſibus in omni artium, & ſcientiarum genere. Breuiarium igitur demonſtratorium pro numeris, lineis, planis etiam ad ſolida producendis meritò addidimus de ſolidis elementaribus noſtro Breuiario

In quo, ni fallor, facilè, ſaltem breuiter, vt in Breuiario, ac vtinam etiam ſolidè de ſolidis à nobis eſto geometricè, atq; arithmeticè philoſophatũ. Sanè animum ſolidat quòd in hoc Stadio Geometrico publicum bonum, atq; in primis Deum ipſum nobis pro meta (qua conus verè ſolidus eſt) poſuimus. A quo, ad quem, circa quem ſemper verſari fælicíſsima quies eſt.

§ XXIV.

CAMPVS, in quo

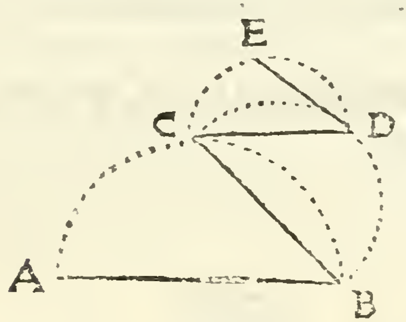
De quantitate habente proportionem irrationalem, & materia pro Tomo Ærarij Octauo indicatur.

POſt problemata, & theoremata elementaria circa figuras planas, & ſolidas, quæ habent inter ſe proportiones rationales, ſupereſt, iuxta noſtram methodum poſteriore loco contemplatio circa incommenſurabiles non ſolum lineas, ſed & figuras non ſolum planas, ſed etiam ſolidas proportionem habentes inter ſe irrationalem. Interim dum de ijs apparamus neſcio quę noſtra, ſi lubitum ſit Tyronibus pro ijs, ſiue (præter ea, quæ ſunt apud Euclidem in li. 10 de lineis, ac figuris incommenſurabilibus) compendioſius, & vniuerſalius diſcere quæ pertinent ad theorias proportionum irrationalium, videant, & apponant hiſce noſtris ea, quæ ingenioſiſſimus Maurolycus demõſtrat in parte 2 libri 2 Arithmeticorum. E cuius Authoris præfa-

fatione opportunè habes, Amice Lector, citata verba aliqua in proximè antecedenti Compendio demonſtratorio vniuerſaliſſimo.

Licebit etiam ex noſtris aliquibus antecedentibus, ſi quis ingenio ſit geometricè perſpicaci, deducere non nulla ſpectãtia ad praxim circa incommenſurabilia. Exempli causà: quoniam in numeris habes ad propoſ. 47 lib. 1, S 15 demonſtratam incõmenſurabilitatem diametri cum coſtà quadrati, licebit vſum eius proportionis ſic educere.

Datis duabus lineis incommenſurabilibus, alias quotcunq; in eàdem proportione incommenſurabiles in infinitum adſtruere ad minores, & maiores terminos.



AB, BC incommenſurabiles ſint, ideſt AB ſit diameter, & BC latus eiuſdem quadrati. Super BC deſcripto ſemicirculo occulto CDB, & bifariatà ſemicirculari in D, applicata CD erit pro latere quadrati, cuius diameter eſt BC. (Iunctà enim AC, eſſet in ſemicirculo angulus rectus C ſub lateribus æqualibus quadrati, &c.) Rurſus ſuper CD deſcriptà ſemi-

circulari occultà lineà CED, & biſariatà in E, applicata DE erit latus quadrati, cuius diameter eſt CD. Ac deinceps in infinitum eodem modo ad minores terminos.

Ad maiores oppoſità via progrediendum erit, datis, verbi gratia, ED, DC progrediendo à coſtis ad diametros, &c. Hæc ſatis indicata ſunto pro alijs exemplis extra Euclidiana. Reuiſe ad propoſ. 20 in 3 To. § 17, de inuentione ex incommenſurabilibus lineis etiam ſuperficierum, & ſolidarum figurarum incommenſurabilium.

Interim ingentes materiæ plurium voluminum indicatæ, & contractæ in hoſce tres Tomos continent proportiones rationales, quas opto, ac ſpero probatum iri Lectoribus humanis, hoc eſt rationalibus.

Chriſti Domini anno 1646, æui mei 65, Kal. Iulijs, Bononiæ.

§ XXV.

PARALIPOMENON,

In quo geminę Propoſitiones maximi momenti, ac ſæpius in hoc Ærario citatæ, ac ſuppoſitæ.

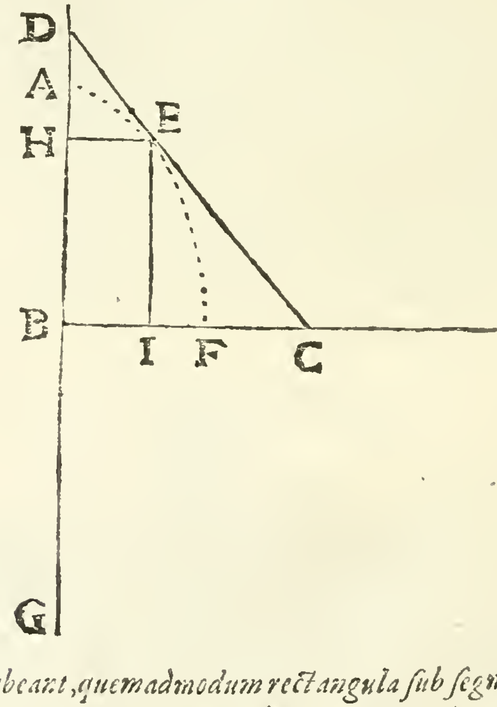
NE Tyrones, ac alij Mathematicarum ſcientiarum ſtudioſi, (dum noſtra in hoc Aerario legunt, ac vident in propoſitionibus aliquibus ſingulares, ac non vulgatas affectiones vel parallelogrammorum inter aſymptotos, vel rectæ lineæ ſub angulo recto ſignantis quartas ellipticas, & circulares, quibus demonſtrandis aſſeruimus, ſeu potius ſuppoſuimus aliqua in Analectis ad Apiaria) cogantur fidem pro ſcientia obtinere, ſi quando Analecta in promptu non habeant; neceſſarium duximus hic demonſtrationes quam maximè poſſumus ordinatas, ac breues apponere duarum ſequentium propoſitionum, quæ ob admirandas proprietates, quas produnt, dignæ ſunt non vnà euulgatione.

PROPOSITIO I.

Sub angulo recto recta linea ſi moueatur ita, vt eius extrema ſemper ſint in anguli lateribus, ac altero extremo motum incœperit ab angulo donec alterum extremum perueniat ad eundem angulũ, ſignabit medio ſui puncto quartam circularem, reliquis punctis inter extrema, & medium ſignabit quartas ellipticas.

PROLEMMA.

Veritas huius admirandæ, atq; vtiliſsimæ proprietatis in punctis lineæ motæ ſub angulo recto demonſtrabitur, ac patebit è ſecunda parte eximiæ propoſitionis 21, lib. 1 Conicorum, ſæpius à nobis citatæ in §§ ad 28 propoſ. li. 6. in 2. To. hu. Ærarij. Et qua, poſt Guidubaldum, vtitur etiam Clauius in lemm. 5. ante Aſtrolabium geometricum. In qua prop. 21 demonſtratur linearum hyperbolicæ, ellipticæ, circularis affectio, qua ſit vt quadrata ordinatim actarum ad axem, (velut ipſarũ BF, HE)



ita inter ſe habeant, quemadmodum rectangula ſub ſegmentis axis intercepta inter verticem ſectionis, & ordinatim actas, habent inter ſe; velut rectangulum (ſeu quadratum) ſub GB, BA ad rectangulum ſub GH, HA. Hoc demonſtrandum eſt conuenire quartæ AEF, &c. præmiſsis tantum concluſioni neceſſarijs. Hæc Tyronibus.

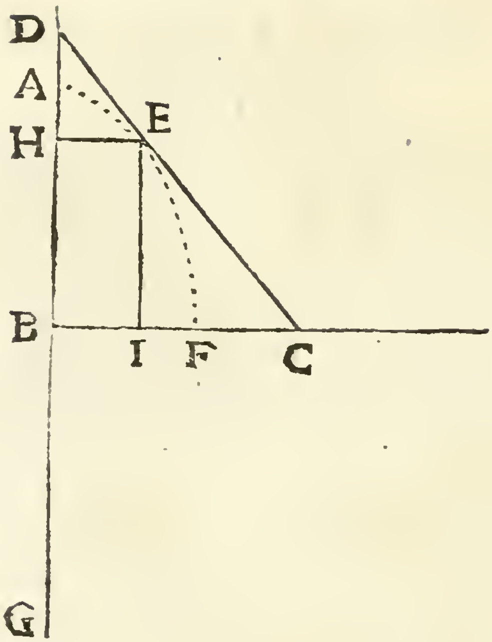
Pro-

PROPOSITIONIS demonſtratio.

SIt igitur angulus rectus CBD, & recta DC mota ſit ſub eo angulo recto ita, vt extremum eius D à B per rectam BD progreſſum ſit vſq; in D, dum alterum extremum C progreditur per rectam CB verſus B, & punctum non medium E eiuſdem rectæ CD ſignarit curuam FE, quam finge etiam perfectam ab E vſq; ad A motu ipſius CD perfecto, cũ extremum C peruenerit ad B, & CD congruerit cum ipſa BD. Dico à puncto E curuam FEA deſſignatam eſſe quartam ellipticam. Duplicetur enim AB, & fiat ellipſeos axis AG, ad quem in H educatur ab E recta EH æquidiſtans ipſi BC, eruntq; BF, HE ordinatim actæ ad axem, iuxtà Eutocij expoſitionem ad definit. 10 l.1 Con. Pariter ab E demittatur EI parallela ipſi HB, eritq; BE parallelogrammum, eiuſq; oppoſita latera, per 34 pri. erunt æqualia inter ſe.

Quoniam igitur angulus externus EIC, per 28 prim. eſt æqualis interno DBC recto, ergo, per 47 pri. quadratum ex EC ærit æquale quadratis ex EI, IC. Rurſus, quoniam recta AG ſecta eſt in æqualia in B, & in inæqualia in H, erit, per 5 ſecundi, quadratum ex alterutrà dimidià GB, BA æquale rectangulo ſub GH, HA, & quadrato ex BH, ſiue ex EI. At EC æqualis eſt ſemiaxi maiori AB, per corollarium noſtrum in § 23 ad propoſ. 28 li. 6 in to. 2 hu. Ær. (quemadmodum ex eodem corol. DE eſt æqualis ſemiaxi minori BF) ergo quadratum ex EC erit æquale rectangulo ſub GH, HA, & quadrato ex BH, ſiue ex EI; ablato communi quadrato ex BH, ſiue IE, remanent quadratum ex IC, & rectangulum ſub GH, HA inter ſe æqualia.

Quoniam verò in triangulo DCB lateri BD parallela ducta eſt EI, erit, per 2 prop. li. 6, & per 16 lib. 5 permutando, vt DE (ideſt BF ordinatim acta) ad BI, ideſt ad HE,

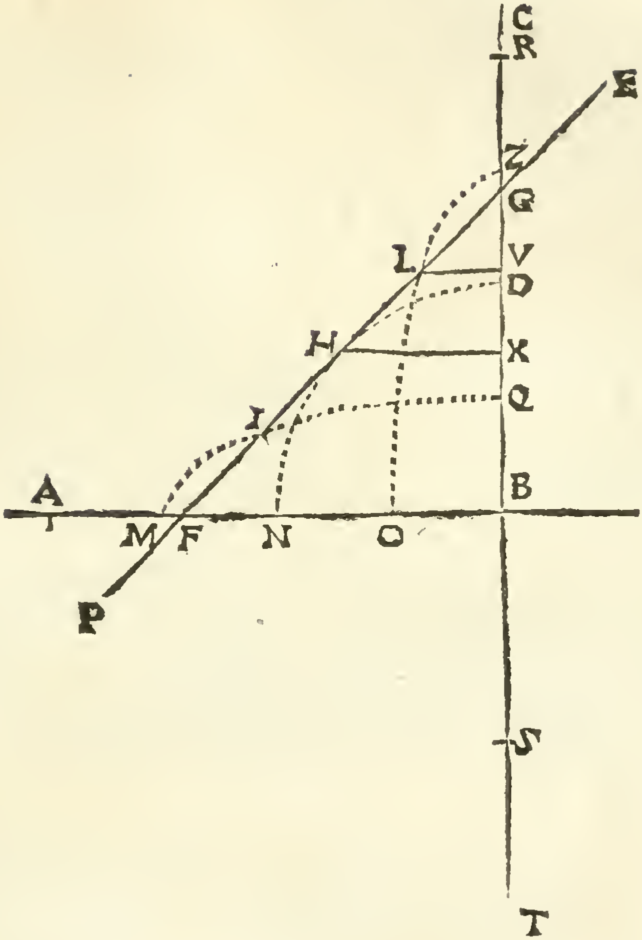


vt EC, ideſt AB ad IC; & per 16 lib. 6, erit vt quadratum ex BF ad quadratum ex HE, vt quadratum ex AB, (ideſt vt rectangulum ſub GB, BA) ad quadratum ex IC, ideſt (per hìc antecedentia) ad rectangulum ſub GH, HA, iuxta proprietatem in 2. p. propoſit. 21 Con. demonſtratam de ellipſi, & circulo. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLION I.

Indicata demonſtratio de quarta circulari à puncto medio, &c.

Eadem demonſtratio fiet etiam de quartà ſignatà à puncto medio rectæ CD, ſimili factà conſtructione, ac proinde valet demonſtratio etiam de quartá circulari deſcripta à medio pũcto. Ceu vides in hac noſtra figura, in qua ex puncto quo-libet



libet H circularis quartæ eductâ HX parallelâ ipſi AB, ſi ex H demittatur perpendicularis, ſeu parallela ipſi XS, oſtendetur eſſe vt ad axem applicatæ HX quadratum ad quadratum ex NB, quæ (per § 23 ad 28 li.6) æqualis eſt dimidio motæ FG, ita rectangulũ ſub SX, XD ad rectangulum ſub SB, BD, ideſt ad quadratum ſemidiametri. Quemadmodum pro elliptico puncto L acta eſt LV ordinatim ad axem, &c.

Non

Non eſt verò neceſſe lineam ſub angulo recto motam eſſe tantum tangentem, vt eſt in figura propoſitionis antecedentis, ſed eſt etiam ſecans, in punctis varijs ſubducta ellipticæ ſectioni peractæ, vt habes in hac noſtra figura, & docebit te, mi Tyro, experientiæ veritas, ſi eam amas.

COROLLARIA eximia ad Theoricen, & praxim.

QVæ in To. 1 hu. Ærarij, § 5 ad definitiones 2, 3, 4 in inſtrumento Quidubaldi, & in Tom. 2, § 22 ad prop. 28, lib. 6 partim indicauimus, partim ſiluimus, hìc (vbi iam Tyrones cognitionem habent demonſtrationis antecedentis) expreſſius accipe.

I.

Non ſolum puncta rectæ motæ (excepto medio) quæ ſub angulo recto ſunt, ſed etiam quæ extra angulum in recta producta (veluti in figura, producta LK vtrinq; ad D, & E) puncta omnia deſcribunt ellipticas quartas; non ſolum extremum D, vt prodidit Quidubaldus, ſed & alterum extremum E, & omnia inter OE, ſicut omnia inter DN.

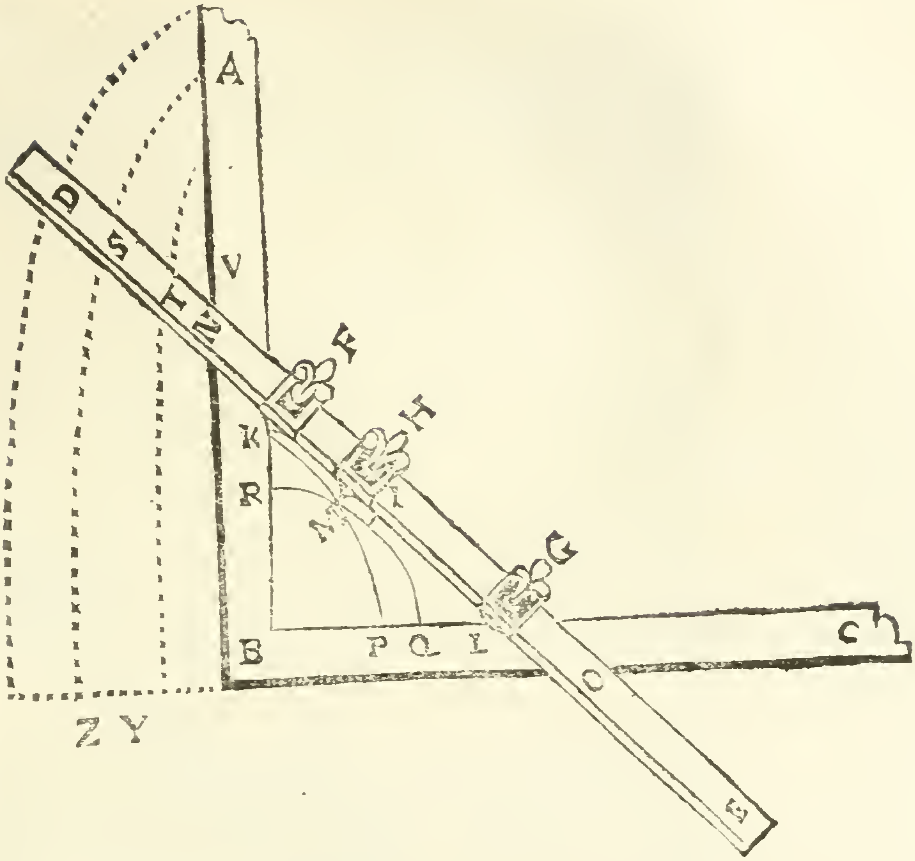
II.

Hic habes compendium ad Praxen dum eodem regulę motu licet deſcribere duas diametraliter oppoſitas, ac æquales quartas ellipticas punctis pari diſtantibus interuallo ab vtroq; axe, velut ſi extrema (vel citra extrema) quælibet alia puncta D, E paribus interuallis diſtent à normæ lateribus AB, BC.

III.

Quin immo etiam intra angulum rectum puncta ęqualiter à medio diſtantia (vt in altera antec. figurà, I, L æqualiter ab H) deſcribũt æquales oppoſitas quartas ellipticas MIQ, OLZ.

Pa-



IV.

Patent in figura noſtri inſtrumenti conditiones, quas requirit in ſuo Quidubaldus, vt ſcilicet è puncto quolibet O minoris axis BO educta, verb.gr. ipſa OS, ſit æqualis ſemiaxi maiori AB, & ſecet AB velut in N, ac ſit ſegmentum NS æquale ſemiaxi minori BZ. Quoniam .n. iuxta propoſitionem noſtram, OS in fine motus congruit cum AB ſemiaxe maiore, eſt illi æqualis, & in principio motus dum tota OS congruit ipſi CZ, etiam ſegmentum NS congruit ſemiaxi minori, cuius quantitatem determinat ſegmentum ipſum NS, ac proinde recta NS ſemiaxi minori BZ eſt æqualis.

Lice

V.

Licebit iuxta modū, quo nos expoſuimus demonſtrationem de quarta elliptica intra angulum rectum, inſtituere etiam demonſtrationem de quartis ellipticis extra angulum rectum: v.gr. eductà ex S perpendiculari in V, & altera perpendiculari demiſſa ex S ad ZB in Y. Tunc, per 15 quinti, vt tota OS compoſita ex ON, NS, ad OY cōpoſitam ex OB. BY, ſic NS ad BY; & vt quadratum applicatæ YB, ideſt imaginatæ SV, ad quadratum applicatæ BZ, ſic quadratum (pro rectangulo) ex OS, ideſt ex AB, ad quadratum ex YO, quod eſt æquale rectangulo ſub ABV, & ſub VA. Nam quadrato ex SO æqualia ſunt quadrata ex OY, & ex imaginata YS; item quadrato ex AB (ideſt ex SO) æquale eſt rectangulum ſub ABV, & ſub VA vnà cum quadrato ex VB; ideſt ex imaginata SY; ablato igitur communi quadrato SY, remanent æqualia quadratum ex YO, & rectangulum ſub ABV, & ſub VA. ergo S eſt in ellipſi. Tantum indico, non expono, aut vllas propoſitiones ex elementis vel communibus, vel conicis vix cito.

VI.

Ex indicatis in antecedenti demonſtratione huius 1 propoſit. ſi geometricè ſapis, intelligis quomodo aliter, ac breuius Quidubaldi praxis demonſtretur, ac quę apud illum eſt vnica ſub extremo puncto D, præterea ab alijs etiam intermedijs, iuxta nos, demonſtratiuè peragatur, ac firmetur.

VII.

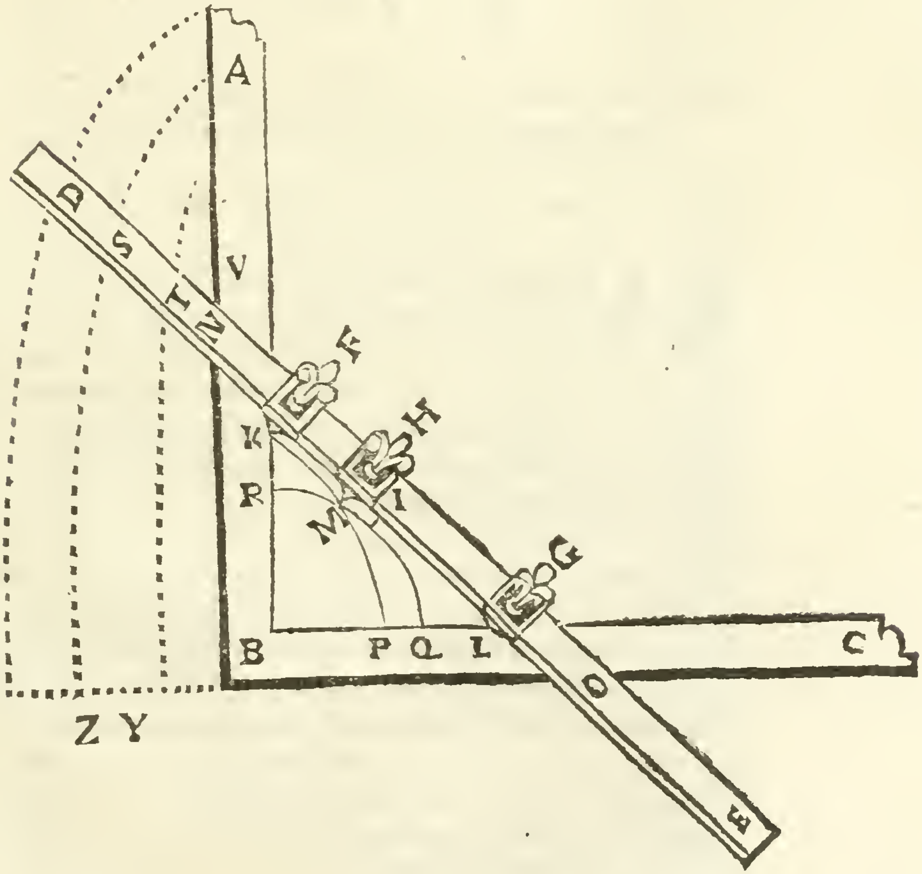
Ex pręcedentibus corollarijs conficitur ſumma, & prodit ſequens demonſtrata in antecedentibus —

— *Propoſitio vniuerſaliſsima, & Mirifica.*

Recta ſub angulo recto vtrinque in infinitum producta, & ſecans anguli latera, ſi altero

ſectio-

ſectionis puncto incipiat moueri ab angulo ſecus alterum latus, altero ſecus alterū, donec ſiſtat in eodem angulo, omnibus ſui punctis ſignabit intra, & extra angulum quartas ellipticas, etiam oppoſitas, & æquales, medio pūcto ſub angulo ſignabit quartam circularem.



SCHOLION II.

Relege, quaſi corollariorum loco, theorias de triplici ſupremo linearum genere, quod ſignat recta mota ſub angulo recto, cum vſibus ad ſcientias, & artes, § 27 *ad propoſ.* 28, *Tom.* 2.

---

§ XXVI.

PROPOSITIO II.

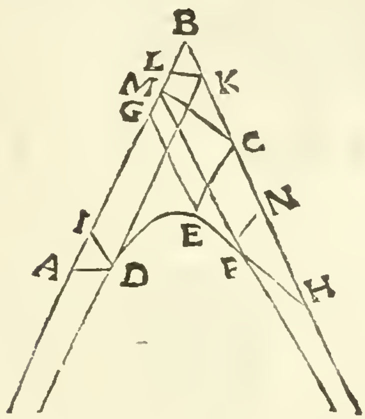
Parallelogrammata inter hyperbolen, & rectas aſymptotos omnia inter ſe ſunt æqualia.

PROLEMMA.

Miraculum in miraculo geometrico eſt hęc affectio parallelogrammorum inter aſymptotos (ideſt ſemper inter ſe accedentes nunquã ſe tangentes lineas) etiam ſuper inæqualibus baſibus, nec intra eaſdem parallelas æqualium. Ac demonſtrabitur ope alterius admirandæ affectionis, quæ eſt in propoſitione 12. lib. 2. Conic. vbi oſtẽditur ſi à puncto, velut D, in ſectione DEF educantur duæ DI, DK in quocumq; angulo ad aſymptotos ABH, & ab altero puncto, velut E, educantur ad eaſdem aſymptotos aliæ duæ EG, EC æquidiſtantes prioribus IDK, rectangulum ex prioribus eductis IDK eſſe æquale rectangulo ſub poſterioribus eductis GEC. Hæc Tyronibus. Erit verò ſolertiæ geometricæ ſequentem demonſtrationem ita inſtituere, vt vnica vniuerſali regula demonſtres, & comprehendas conbinationes omnes, & caſus quorumcumq; parallelogrammorum in infinitum inter ſectionem, & aſymptotos poſſibilium. &c.

Pro-

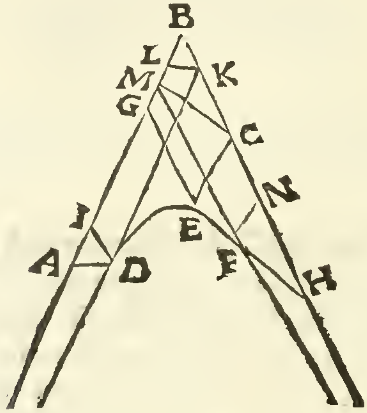
Propoſitionis demonſtratio.



INter hyperbolen DEF, & aſymptotos ABH inſcripta ſint parallelogrammata quæcunque ALKD, FMCH. Quę dico eſſe inter ſe ſe ęqualia. Ex angulis ad ſectionem hyperbolicam, velut ex F, & D, educantur aſymptotis parallelæ DI, FN, eruntq; parallelogrammata duo IBKD, FMBN laterum oppoſitorum (per 34 pri. & definitionem parallelogrammi) æqualium, & parallelorum. Quoniam ergo à puncto D in hyperbola eductæ ſunt duæ DI, DK parallelæ aſymptotis ABH, hoc eſt duabus ab altero puncto F eductis FM, FN, nempe DI ipſi BN (hoc eſt ipſi FM) & DK ipſi MB (hoc eſt ipſi FN) ergo rectangulum ex IDK erit æquale rectangulo ex MFN, per 12 ſec. Con. ergo, per priorem partem propoſ 14 li. 6, latera ID, DK, hoc eſt oppoſita æqualia IB, BK reciprocantur cum lateribus MF, FN, hoc eſt cum oppoſitis æqualibus MB, BN, & quidem circa communem angulum B; ergo circa parallelogrāmata BD, BF vt IB ad MB, ita BN ad BK, ergo per 2 partem eiuſdem propoſ. 14. lib. 6, parallelogrammata BD, BF ſunt inter ſeſe æqualia. At ſuper eadem baſi DK, & inter eaſdē

parallelas DK, AB parallelogrammum AK eſt æquale parallelogrammo DIB, & ſuper eadem baſi FM, & inter eaſdem parallelas FM, BN parallelogrãmum MH eſt æquale parallelogrammo FB, per 35 pri. ergo & parallelogrammata ALKD, FM CH, per ax. 1, ſunt inter ſe æqualia. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.



EAdem demonſtratione quaſi corollarij loco probata ſunt æqualia etiam DB, MH; & FB, DL; eademq; forma demonſtrationis probabitur, ductis à quocunque puncto E parallelis ad aſymptotos ipſis EG, EC, ipſum EB ęquale quibuslibet alijs inter hyperbolen, & aſymptotos.

Scho-

SCHOLION I,

In quo Regula vniuerſalis pro demonſtratione ſecundæ huius propoſitionis.

QVæcumque conſtituantur inter hyperbolen, & aſymptotos parallelogrammata, ſi habeāt vnum tantū latus parallelū aſymptoto, fiet & alterū latus (eductum ab angulo in puncto hyperboles) parallelum alteri aſymptoto, vt exemplum habes in anteced. demonſtratione. Si vero habuerint duo latera parallela vtrique aſymptoto, breuior erit demonſtratio.

Cùm verò quælibet parallelogrammata inter aſymptotos, & hyperbolen habeant vnum ſaltem latus in aſymptoto, non poſſunt non habere etiam ſemper ſaltem latus vnum parallelum aſymptoto, per definitionem parallelogrammi.

SCHOLION II.

Cur propoſitiones huius § 25 antecedentis, cum antecedentibus §§ 23, & 24, repoſitæ ſint inter Stereometrica.

Incommenſurabilium Stereometria.

Rectè finis Ærario in propoſitionibus § 25 antec. impoſitus.

VIdentur prædictorum paragraphorum materiæ nihil habere cur inter ſtereometrica reponantur, ac extra debitum locum collocatæ. Sed ſi, amice Lector, relegas, & recolas, animaduertes in § 23 *doceri modum vniuerſaliſsimum demonſtrandi, quo planorum veritates etiam ad ſolida eleuantur; & in* § 24 *incommenſurabilitas linearum etiam ad plana, & ad ſolida tra-*

traducitur ; vt ibi indicatur , & citatur § 17 *ad propoſ.* 20. *lib.* 6, *To.*2 *hu. Aerarij. Quibus adde è veteri ſcholio apud Commandinū in ſine vltimæ propoſitionis libri* 10 *ſequentia.Lineis, & planis incommenſurabilibus* oſtenſis,oſtendemus etiam ſolida incommenſurabilia. Nam ſi in quadratis, vel rectilineis, quæ ipſis æqualia ſint, ſolida æque alta conſtituamus, ſiue parallelepipeda, ſiue pyramides , ſiue priſmata , erunt ea inter ſe vt baſes ; & ſi baſes incommenſurabiles ſint , erunt & ſolida incommenſurabilia. *Concludit:* Ex quibus perſpicuum eſt non ſolum in lineis , & ſuperficiebus eſſe incommenſurabilitatem, ſed & in ſolidis figuris . *Quapropter & nos campum illum non ſolum planorum , ſed & ſolidorum incommenſurabilium indicatum inter noſtra Stereometrica repoſuimus.*

Solida incōmēſurabilia cōſtituere.

In § *verò antec.*25 *geminæ propoſitiones mirificæ , quarum altera ſolidam ſectionem ellipticam coni tot praxibus , & theorijs illuſtrat; altera verò parens vberrima nobis fuit tot theorematum de ſuperficiebus circa ſolida conum , & cylindrum , & de eorum etiam ſolidis proportionibus inter aſymptotos, vt habes exempla in* 2 *To. hu.Aerar.ad propoſ.*14, 15, 23 , *&c. quidni ſub Stereometriæ noſtræ inſcriptione verſetur?*

Hic ergo nunc finis eſto Ærarij noſtri in duabus propoſitionibus admirandis (ſi quæ aliæ in vniuerſa Geometrica Philoſophia)& fæcundiſſimis, (vt habes crebra exempla in To. 1, & 2 Ærarij) pro ellipticis theoriis , ac praxibus, vſibus , applicationibus; pro ſuperficiebus circa ſolida aliqua rotunda inter aſymptotos ; pro gemino nouo modo deſcribendæ hyperboles inter rectas aſymptotos. &c.

Par.

§XXVII.
PARERGON GEOMETRICVM,

In quo Ergo, ſiue Concluſio Cyclica Ærarij, & finis ſubſignatus puncto, quod eſt æquale circulari ſuperficiei etiam infinitæ.

A*Mice Lector, proloquij loco, verba inſcriptionis interpretabor, vt quid hic velim intelligas.*

Parergon. *Non quod ſit extra rem Aerarij, ſed quod conſultò à me diſtractum eſt à Corollario 6 poſt problema 26 ſect. 2 Breuiar. noſtri Stereometrici, cuius problematis, & Corollarij corollarium eſt hoc etiam pertinens ad ſolida, & è quo, (vt videbis inferius) corollaria, & problemata alia Stereometrica non iniucunda deducuntur.*

In quo Ergo. *Hoc ergon eſt quaſi ergo, & Cōcluſio Aerarij, ſed* — — Cyclica *ſcilicet, vt in circularibus peripherijs à puncto, vnde fit digreſſio, in idem fit & regreſſio. Aerarij initium in To. 1 à puncto eſt § 3 ad 1 definitionem li. 1, vbi paradoxum de puncto in figura ſolida, hic finis Aerarij redit in paradoxū ſimile, ac mirabilius de puncto in ſolida figura. Vt in hoc etiam philoſophico noſtro opere verū id videas, quod apud Boetium li. 3. metr. 2 Philoſophia cecinit de curſu ſolari, ac de reliquis naturæ operationibus in Orbe in orbem euntibus.*

Cadit Heſperias Phæbus ad vndas,
Sed ſecreto tramite rurſus
Currum ſolitos vertit ad ortus.
Repetunt proprios quæq; recurſus,
Redituq; ſuo ſingula gaudent.
Nec manet vlli traditus ordo,
Niſi qui fini iunxerit ortum,
Stabilemq; ſui fecerit orbem.

Saltem hoc ipſo perfectum erit hoc Aerarium, quòd in ſimilitudinem perfectæ figuræ circularis cyclicè clauditur, quemadmodum & Apiaria ab Aranea geometrizante producta ſunt in Araneam coſmographicam, &c.

Finis ſubſignatus puncto. *Poſt finem alter hic finis eſt Aerarij de puncto; ceu finis etiam finalis periodi puncto ſubſignatur.*

Quod eſt æquale circulari ſuperficiei. *Hoc paradoxum longè mirabilius eſt, quàm id in To.1 ad definit. 1. lib. 1. de puncto æquali peripheriæ circulari. Ac licet in eodem To.1 ad definit. 16, § 3 indicauerimus quemadmodum Circuli centrũ quodammodo æquetur etiam ſuperficiei Circulari; tamen idem hic è ſolidis quaſi ſolidius geometricè demonſtrabimus cum fœnore ſcientifico Corollariorum Stereometricorum.*

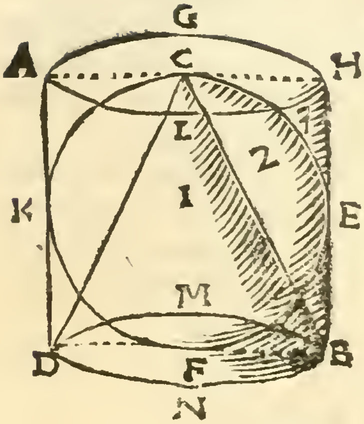
Etiam infinitæ. *Hoc paradoxum, propter infinitatem hanc indicatam ſuperficiei, videtur repugnare definitioni 4 lib. 5 elem. vbi definiuntur ea, quæ geometricam habent inter ſe proportionem, eſſe talia, vt ſe inuicem æquare, ac ſuperare poſsint multiplicata. Qua ſanctione excluditur à proportione geometrica infinitum, propter ea, quæ à nobis habes ad eam definitionẽ. Quæ tua igitur (inquies) iſta proportio puncti cum ſuperficie infinita? Quid ni igitur etiam liceat geometricè philoſophari circa figuras per indiuiſibilia, licet ea in qualibet figurà, diuiſibili in infinitum, ſint infinita? Inferius in fine huius parergi geometrici, mi Tyro, hæc difflabimus, poſt paradoxum propoſitum, & demonſtratum, & Corollaria ex eo, nè prolixitate hìc nunc non neceſſarià incommodemus rei, quam primo, ac per ſe quærimus.*

§ XXVIII.

P A R A D O X V M.

Punctum æquale ſuperficiei infinitæ.

Sit



SIt repoſita hìc figura corollarij 6 poſt problema 26 ſect. 10 Breuiar. antecedentis noſtri Stereometrici, quæ eſt AB, habens in cylindro AB inſcripta ſolida ſphæram KCEF, & conum DCB ſuper baſi cõmuni cum cylindro, & æquali circulo maximo ſphæræ KCEF. Dico punctum C verticis conici æquale eſſe ſuperficiei circuli AGHL. Quoniã enim, (è citato corollario 6, & alijs antecedentibus poſt problema 26 hu. Breu. Stereom. Sect. 2) ſphæra KCEF aufert à Cylindro duas tertias, reliqua pars Cylindri ſphæricè incauata (ſcilicet ſub KCEF, & ſub DAHB, & ſub baſibus circularibus AGHL, DMBN) erit vna Cylindri tertia; & quoniam (per theor. 14, ſect. 1, & per §§ 22, 23, 24 Epilogi planimetrici in fine 1 partis hu. 3 To.) Conus DCB eſt tertia pars cylindri AB, erunt inter ſe æquales duæ tertiæ, ſcilicet Conus DCB, & Cylindri pars ſphæricè incauata. Ergo & dimidium Coni ſecti parallelæs baſi erit æquale dimidio partis cylindri ſphæricè incauatæ, ac ſectæ parallelæs baſi, hoc eſt Scaphio hemiſphericè vacuo KCEHLAG. &c.

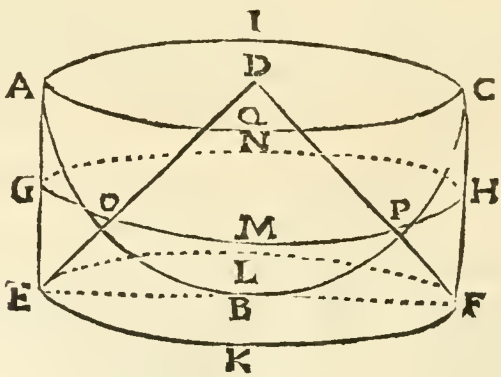
Accipiatur dimidium Coni, ſiue finge ſuper baſi, cuius diameter imaginaria habeat extrema K, E, excitatum Conum habentem verticem in C, & dimidià hic parte mulctetur, ac reliqua ſit quarta pars coni habens verticem in puncto C, ac ſic de reliquis dimidijs partibus, octauà, decimaſextà, &c. ſemper imminuendo conum verſus C, erunt eæ coni partes æquales partibus ſimilibus ſcaphij cylindrici hemiſphæricè incauati, quartæ, octauæ, decimæſextæ, ac reliquis, ſemper ſecando latera KA, EH magis, ac

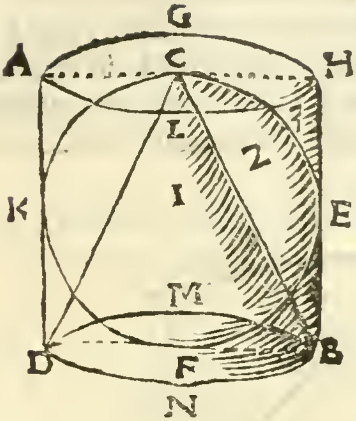
magis propè ſuperficiem baſis, cuius diameter AH, donec tandem, continuatis imminutionibus per partes æquales Coni, & Scaphij, perueniatur ad vtriuſq; extrema æqualia, ſcilicet ad extremum coni punctum C, & ad extremam Scaphij baſim, videlicet circularem ſuperficiem AGHL inter ſe ſe æqualia. Quod erat demonſtrandum.

Et quoniam concipi poteſt Cylindrus baſium maiorum, ac maiorum in infinitum, & in eo inſcriptus Conus maior, ac maior, erit tamen ſemper idem punctum verticis C æquale ſuperficiei circulari AGHL quantumuis in infinitum ampliatæ. Quod longè miriſſimum eſt.

SCHOLIA.

1 *Licet in tom. 2, § 20 ad prop. 23 lib. 6 indicauerimus vbi demonſtrentur ea, quæ ſuppoſuimus in citat. § 3 ad defin. 1 lib. 1; tamen hic à nobis ex antecedentibus habes demonſtratum quomodo (quidquid in citato § tertio ex alieno ſenſu, & intelligentiâ ſuppoſuerimus) in appoſita figurâ conus EDF ſit æqualis Cylindrico Scaphio CABCFK. Nam (in figura paradoxi antecedentis) vt Conus DCB eſt æqualis duplicato Scaphio, ſcilicet cylindro ſphæricè incauato; ſic, ſi ſuper baſi DMBN erectus*





ctus ſit Conus dimidiæ altitudinis ipſius FC, erit æqualis dimidio cylindri ſphæricè incauati, ideſt Scaphio cylindrico hemiſphæricè incauato KFEBNDM.

2 In noſtris theorijs circa ſolida, conſulto (præter Guldinum, & Villalpandum noſtros) quoſcūque alios Neotericos Geometras neglEximus legere, nec curabimus, ſiquid fortè noſtrorū ſimile (quod neſcimus) in ijs reperiatur; præſertim cùm apud nos corollaria ſint è noſtris deducta etiam ſi quæ ſint apud veterum aliquem, & à nobis longè aliter, quàm ab alijs, tractata, & demonſtrata.

§ XXIX.
COROLLARIA, & PROBLEMATA.

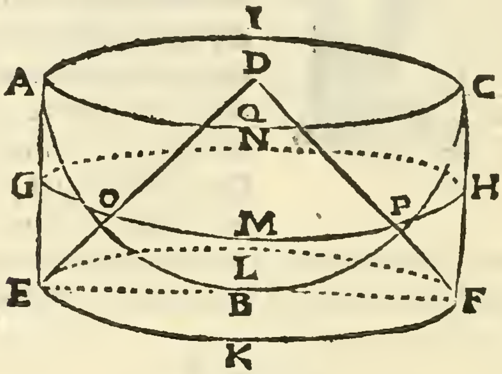
I.

Dato Cono altitudinis æqualis diametro baſis, ſolidum cylindricum ſphęricè cauum ęquale conſtituere. Et conuerſim.

VElut dato Cono DCB habente altitudinem FC æqualem diametro DB baſis DMBN, ſi ſemidiametro baſis, vel dimidiatà altitudine FC, velut in I, & centro I deſcribatur per verticem C circulus KCEF pro ſphærà &, è lib. 4 elem. circa circulum KCEF deſcribatur quadratum ADBH pro Cylindro, erit (è demonſtratis in anteced paradoxo § 28) ſolidum Cylindricum ſphæricè incauatum (ſcilicet ſub KCEF, & ſub DAHB, &

ſub AGHL, DMBN) æquale cono datarum conditionum.

Conuerſũ facilius conficitur. Dato enim ſolido cylindrico ſphæricè incauato, id eſt habẽte diametrũ baſis vtriuſq; æqualem altitudini, Conus ſuper èadem baſe, & eiuſdem altitudinis erit conſtitutus ęqualis incauato illi ſolido, &c.



II.

Dato cono (in cuius baſi diameter ſit dupla altitudinis) ſcaphium cylindricum hæmiſphæricè cauum æquale ponere. Et conuerſim.

Poſito cono EDF cõditionum propoſitarum, ſi fiat pro cylindro rectangulum EC ſub altitudine, & diametro dati cylindri, & acceptà coni altitudine pro ſemidiametro, & centro I, ſignatà ſemiperipherià ABC pro hemiſphærio, erit conſtitutum Scaphium EABCFK æquale dato Cono.

Conuerſum facilè fit, & dato Scaphio ponitur Conus ęqualis, ſuper diametro baſis ELFK erecto (pro cono) triágulo iſoſcele altitudinis eiuſdem cum Scaphio, &c.

Scho-

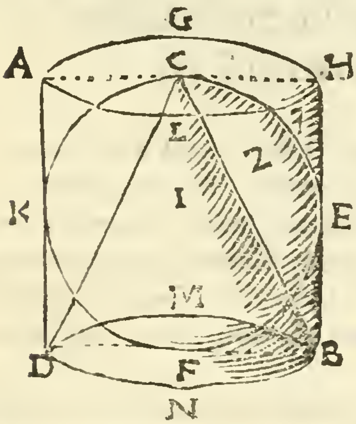
SCHOLION.

Quoniam accipiuntur cylindri excauati à Sphæra, vel hemiſphærio, ideo problemata ſunt determinata in altitudinibus & baſibus ſolidorum mutuò æquandorum, &c.

III.

Formatio vtriuſq; ſolidi caui(de quibus in vtroque antecedente problemate)ex eorum ortu.

SI fingas circa coni EDF imaginatum axem BD gyrari mixtilineum triangulum AE BA ſub rectis AE, EB,& ſub circulari AB, latere AE in motu ſemper parallelo axi BD, perfecto motu circulari, conflatũ erit Scaphium cylindricum hemiſphæricè cauum.



Et geminato eodem triangulo mixtilineo, velut habes in alterà hìc figurà, verticibus iunctis in K, triangula DFKCA, (latere AD ſemper parallelo axi imaginato CF in motu circulari circa coni axem)producunt cylindrum ſphæricè cauum.

IV.

Dimenſio ſolida prædictorum cauorum ſolidorum.

SOlidam hìc dixi dimenſionem (nam de ſuperficiarià paullo hìc inferius) vtriuſq; antecedentis ſolidi caui, quæ patet è 1, & 2 ſect anteced. Breu. Stereom. & ex hìc antecedentibus corollarijs, ac problematibus 1, & 2; dum dimenſio ſolida coni (i. ductus baſis in tertiam partẽ altitudinis cylindrorum vel AB, vel CE) cui æquale eſt vtrumque cauum ſolidum, dat vtriuſq; ſolidam dimenſionem. Tranſ-

V.
Transformationes —

— CAuorum eorumdem duorum ſolidorum in conos, conorum in caua ea ſolida exercentur in antecedentibus hìc problematibus 1, 2, 3.

SCHOLION I.

Cautiones è primis geometricæ philoſophiæ Principijs contra Hallucinationes in anteced. paradoxo in § 28.

CAutionibus, quas in 1 *To.ad definit.* 1, § 5 *addidimus paradoxo de puncto æquali lineæ circulari, adde & ſequentes. In paradoxis non eſt temerè, ac primo impetu procedendum, ac (quod aliqui ſibi blandientes fecerunt) pronuntiandum pro admirando, ac vero quidquid menti occurrit, ne à ſolidè philoſophantibus arguantur leuitatis acumina apparenter, nec verè ingenioſa.*

Itaq; de puncto, quòd initio 1 *Tom.lineæ, in extremo verò hu.* 3 *Tomi ſuperficiei æquale aſſeritur, intellige non geometricè, ſed de puncto, lineà, ſuperficie phyſicis, ideſt habentibus quantitatem, ac diuiſibilitatem. Ac quod pertinet ad hoc noſtrum paradoxum in antec.* § 28, *intellige pro puncto verticis conici extremum, ac minimum conulum, & pro ſuperficie baſis Cylindrici Scaphij, intellige extremum eius propè ſuperficiem baſis. Itaq; comparatio eſt legitima in eodem genere, ideſt inter ſolida alterum conicè, alterum ſcaphicè (vt ſic loquar) extrema. Quod mirum eſt (etiam phyſicè acceptū) intuēti anguſtias verticis conici, & amplitudinem in baſe Scaphij.*

Niſi iuxta prædicta philoſopheris, ac intelligas, non paradoxa, ſed (ſi liceat dicere) paralogiſmata effuties contra prima principia Geometricæ philoſophiæ. Nam, ex 3 *definit.lib.*5, *& Scholijs noſtris*

ad

ad eam, non eſt proportio geometrica inter ea, quæ diuerſi ſunt generis, velut inter punctum, & lineam, ac multo minus inter punctum, & ſuperficiem.

SCHOLION II.

Quænam ſit noſtra comparatio, & ęquatio puncti cum Superficie infinitâ.

IN poſtremis reſpondeo impingentibus mihi ſimilitudinem philoſophantium circa figuras geometricas per indiuiſibilia. Longe longius à me abſit fruſtrari geometricas meas theorias optato fine demonſtratæ veritatis. Quod fieret, ſi (contra 4 definitionē lib. 5, & Scholia noſtra ad eam) compararem inter ſe quæ geometricam inter ſe proportionem non habent; qualis eſt comparatio figurarum, & philoſophatio circa eas per indiuiſibilia. Nos, dum comparamus minimum extremum Conulum verticalem cū extremo Scaphio propè baſim circularem, comparamus finitum cum finito, ac in eodem genere quantitatis ſolidæ, ideſt trinam dimenſionem habentis. Dum verò infinitam ſuperficiem nominamus, intelligimus ſyncathegorematicè, ſcilicet finitam, ac definitè magnitudinis figuram baſis in Scaphio in infinitum, ſi lubeat, augendam; velut, ampliatà in infinitum baſe ſcaphij, fit etiam ampliatio baſis communis cum cono, & ipſius coni, & verticis conici. Fit igitur à nobis comparatio partis definitæ, ac certæ cum parte Scaphy certa, & definità in omnibus imminutionibus, & auctionibus verſus vel verticem coni, vel baſim ſcaphij. E totis æqualibus partes etiam ſimiles æquales inferuntur, quaſcumq; numerando acceperis. Non ſic per indiuiſibilia. Relege partem 2 in Epil. Geometrici.

§ 30.

§ XXX.

THEOREMA.

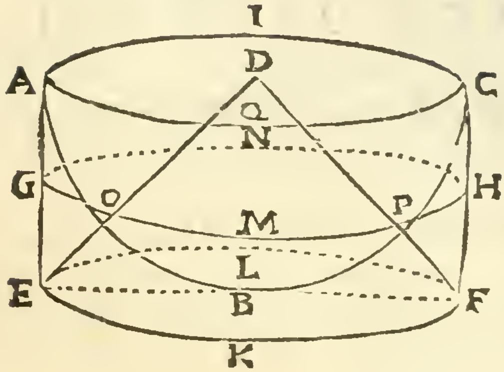
Cylindrus ſphæricè cauus habet cauam ſuperficiem interiorem æqualem exteriori cylindricæ ſine baſibus.

PArergi alterius geometrici loco lubet addere ſequẽtia etiam circa ſuperficies incauatorum cylindricorum ſolidorum. Itaque theorema hoc primum eſt quaſi Corollarium è corollario 2 poſt probl. 17 ſect. 2. Breuiarij noſtri Stereometrici, vbi patuit cylindricam ſuperficiem ſine baſibus æqualem eſſe ſuperficiei ſphæricæ cylindro inſcriptæ. eſt enim interior caua ſuperficies eadẽ quæ ſphæræ inſcriptæ. Applica figuræ. &c.

COROLLARIVM.

Scaphium hemiſphæricè cauum eſt ſub æqualibus ſuperficiebus, interiore hemiſphæricà, exteriori cylindrica ſine baſibus.

SCilicet ſuperficies interior hemiſphærica ſub ABC (ſemiperipherià ſemiperiphericè gyratà circa imaginatam AC) æqualis eſt ſuperficiei exteriori cylindricæ ſub AE perfecto orbe gyratà, & parallelà imaginato axi DB. Patet, & Corollarium eſt ex anteced. theoremate. Nam ſi tota caua ſphærica ſuperficies, ideſt duplicata



cata ABC, eſt æqualis toti cylindricæ, ideſt duplicatæ A-EFC, ſine baſibus, ergo & dimidia dimidiæ erit æqualis in Scaphio EABCF.

PROBLEMA, & Corollarium.

De dimenſione ſuperficierum in ſcaphijs hemiſphæricis.

EX antedictis, & è ſect. 2. Breu. vbi ſuperficiei ſphæricæ varias dimenſiones excudimus, habes vnde dati hemiſphærici ſcaphij ſuperficiem vtramq; intimam, & extimam metiaris; velut ſcaphij ABCQ, intimam ABC, ſcilicet ducto ambitu circularis oris AICQ in ſemidiametrum imaginariam DB. Quemadmodum enim è citat. ſect. 2 Breuiar. ſphærica ſuperficies habetur è ductu peripheriæ circuli ſphæræ maximi in ſphæræ diametrum, ſic hìc è ductu ipſius AICQ in ſemidiametrum. Quod idem eſt cum eleuatione baſis EKFL ad altitudinem BD pro cylindrica ſuperficie æquali ſuperficiei hemiſphæricæ, &c. iuxta antedicta.

Scho-

SCHOLION I.

De quadraturis infinitis ſuperficierum curuarũ extimæ, & intimæ in ſcaphijs.

EX anteced.& ex corollario, quod habes in 2 par. Epilog. Planimetr. vbi de numero infinitis quadraturis ſuperficierum cylindricæ, & ſphæricæ, & circuli, & ſphæricorum triangulorũ, § 29, faciunt huc ad rẽ quadraturæ numero infinitæ ſuperficierum curuarum in ſcaphijs, & circa ſcaphia, quæ nihil aliud ſunt, quam cylindricæ, & ſphæricæ ſuperficies. Hic tantum indico, vbi, ex citat. Epil. & Breuiar. Ster. habes, ſine ſuppoſitionibus demonſtrata omnia.

SCHOLION II.

Ergo, ſeu Concluſio parergi.

TOtum hoc noſtrum geometricum Parergon ergo concludamus in paradoxi admiratione etiam accepti phyſicè, quo conſtat minimum conulum, quaſi punctum, æquari ampliſſimæ in infinitum baſi ſolidæ ſcaphij. *&c. iuxta in antecea. expoſita. Atq; hocce conico puncto noſtri Aerarij geometrici extrema ſubſignamus.*

INDEX PRIMVS,

In quo Campi, & vniuerſalia de lineis, & figuris planis curuis, & ſolidis in tribus Tomis Ærarij.

IN TOMO PRIMO.

1.

DEfinitio 4 lib. 1. ampliata, & additæ praxes, & vſus pluriformium linearum.

2.

Definitio 8 de angulis ampliata, & additi pluriformes anguli.

Item anguli vno plures ſub duabus rectis, & angulus maior duobus rectis.

3.

Figuris rectilineis additæ cylogoniæ, ſiue cauiangulæ, ac earum paradoxa.

4.

Pene omnia problemata Geometricæ Philoſophiæ vnicà circini datà, & inuariatà diductione ſoluũtur. To. 1. prop. 12, § 11, & 12 & To. 2. prop. 9. § 19.

5.

Omnifaria tractatio geometrica quadratarum figurarum. prop. 47. § 6, & ſeq. ad § 10.

6.

Compendia è 47 prop. lib 1. ad præcipua problemata, & theoremata Geometricæ philoſophiæ. prop. 47, ante § 18, & ſeq.

7.

Campus Geometricus è 47. prop. pro praxibus diuidendorum, augend. immin. &c. circulorum. ibid. § 22, & ſeq.

8.

Ad praxim dimetiendarum ſuperficierum triãgularium, & figurarum regularium. Prop. 41, §, 1, 2, 3.

9.

Transformationes figurarum etiam irregularium in rectangula prop. 44, § 2, & ſeq.

10.

Ad transformationes, augmentationes imminutiones, proportiones, dimenſiones planarum figurarum. § 6, 7, 8, 9, 10. Propoſ. 45.

11.

Transformationes planarum figurarũ per partium tranſpoſitiones. prop. 41, § 4, 5, 6, ſeq. & propoſ. 44, § 2, probl. 1, 2, 3, & ſeq.

12.

Pro Geodeſia, ſiue diuiſione planarum figurarum problemata, corollaria. &c. To. 1. Propoſ. 34, § 6, 7, 8, & ſeq. & Propoſ. 38 § 1, 2, 3, 4, & ſeq. pluribus. & To. 2, Prop. 1. § 10, 11, 11, 13, 14, & ſeq.

IN TOMO SECVNDO.

13.
Linearum, angulorum, arcuum, quoruncunq; proportiones inter ſe noſſe circino proportionum. Prop.1.§ 6.
14.
Figurarum ractilinearum auctiones, imminutiones in data proportione. Ibid.§ 9.
15.
Inuentiones linearum plurium in eadem proportione. Prop. 2. § 2. prop. 12.§ 1, 2, 5, 10.
16.
Inſtrumentorum Geometricorum, & Aſtronomicorũ pręcipuorum theorice, & demonſtratio è 4 propoſ. li. 6.§ 34.
17.
Compendium diuiſorium linearum in Harmonica, Gnomonica, & quacumq; alia diuiſione. Prop. 10, § 4.
18.
Theorice vniuerſalis omnium linearum, & operationum in, & è circino proportionum. ibid. §.6.
19.
Fundamenta totius Geodeſiæ iu prop. 9, & 10.lib.6.§ 12.
20.
Proportionalitatum plures ſpecies, & earum praxes organicæ, & geometricæ. Prop.10.§ 13, & ſep.
21.
Traductio propoſitionis 10 etiam ad ſectiones arcuum.§ 20.
22.
Numerorum mediorum plurium proportionaliũ inuentio. Prop.13.§.11.
23.
Traductio inuentionis linearum proportionalium etiam extra geometricam ad alias proportionalitates. Prop.13, poſt § 12.
24.
Traductio propoſitionis 14 lib. 6 ad ſuperficies curuas circa ſolida aliqua rotunda. Prop.14, § 2, & ſeq.
25.
Eleuatio eiuſdem prop. 14 ad ſolida aliqua rotunda. ibid. § 5, & ſeq.
26.
Vniuerſaliſſima demõſtratio propoſitionis 14 lib.6 pro quantitate non ſolum plana, ſed & ſolidà, & diſcretà, &c.ibid. § 10.
27.
Eleuatio propoſitionis 15 lib.6 ad ſtereometrica, Próp.15, § 3.
28.
Vniuerſaliſſimè demonſtratæ propoſ. 16, & 17 de toto genere quantitatis continuæ, diſcretæ, planæ, ſolidæ. Prop.17.§ 20.
29.
Libri 12 elem. propoſitio 2 facta vniuerſaliſſima de circulis habentibus proportionem non ſolum quadratorum, ſed ſimilium omnium figurarum ſuper diametris. Propoſ.20, lib.6.§ 14.
30.
Planarum figurarum transformationes è 20 propoſ.lib.6.§ 31.
31.
Traductiones propoſitionum geometricarum etiam ad uumeros. Prop. 20, poſt § 31, & alibi.
32.
Ampliatio, & vniuerſalitas prop. 22. ibid.§.2.
33.
Fundamentum vniuerſale conſtituẽdorum rectilineorum proportionalium. Prop. 22, § 4.
34.
Ampliatio ad numeros, & ad ſolida propoſitionis 22, § 8.

Am-

35.
Ampliationes propoſitionis 23, § 7, 9,
36.
Vniuerſalis inueſtigatio proportionis inter quæcũq; rectilinea, Prop. 23, § 12.
37.
Traductio propoſitionis 23 lib. 6. ad proportiones ſuperficierum curuarum, & ſolidorum aliquorum rotundorum. § 16, 17, 18, 19.
38.
Traductio propoſitionis 25 lib. 6 ad transformationes figurarum etiam non rectilinearum.
39.
Rectilinearum figurarum proportionalium inuentiones, &c. Prop. 25. § 10, 11, 12. &c.
40.
Curuilineorum proportionalium inuentiones. ibid. § 13.
41.
Auctiones, imminutiones, diuiſiones planarum figurarum, ſeruatà ſimilitudine. ibid. § 14.
42.
Traductiones propoſitionum 28, & 29 lib. 6 ad conicas ſectiones, praxes, vſus, &c.
43.
Ex vnica linea quotlibet alias diuidere extrema, & media ratione. Propoſ. 30 lib. 6. § 2.
44.
Diuiſio in infinitum rectæ extremà, & medià ratione ibid. § 5.
45.
Cãpus Stereometricus ad corpora regularia à lineà proportionaliter ſectà. Prop. 30. § 14.
46.
Campus geometricus, & vniuerſalis ex vſu propoſit. 31 li. 6, pro auctionibus, imminutionibus, diuiſionibus rectilinearum planarum figurarum, ſeruata eàdem figurà in totis, partibus, reſiduis, compoſitis. § 1, & ſequentibus.

IN TOMO TERTIO.

47.
Vniuerſalitas libri 5 elem. non ſolum ad quantitatem diſcretam, & continuam, planam, curuam, ſolidam, ſed etiam ad omnes artes, & ſcientias. To. 3. li. 5. § 1.
48.
Conuerſa ratio demonſtrata vniuerſaliter de toto genere quantitatis. li. 5. prop. 19. Schol. 2.
49.
Propoſitiones aliquæ libri 5 traductæ ad ſolutionem aliquarum libri ſeptim. li. 5. prop. 25, corollar.
50.
Propoſitio 24 libri tertij traducta etiã ad curuilinea, ibid. in Schol.
51.
Campi Geometrici, & Traductio libri 3 elem. ad Conica. Poſt propoſ. 37, in Appendice, §. 1.
52.
Traductio libri 3 elem. ad Stereometriam. Poſt prop. 37, § 2.
53.
Traductio, & vſus lib. 4 elem. ad militarem architecturam, ad Aſtronomica. &c. § 1, & in ſeq. propoſitionibus eius libri.
54.
Vniuerſalia de qualibet figurà regulari inſcribenda, & circumſcribendà circulo. li. 4, poſt propoſ. 16, in Appendice, § 4, & 5.

55.
Problema vniuerſale pro militari architectura, ſcilicet: ſuper datà quàlibet linea quamlibet regularem figuram excitare. lib. 4, in Appendice, § 6.

56.
Liber 2 elem. traductus ad algebratica, & ad arcana numerorum, varijs exemplis, § 1, 8, 9, 13, 14, &c.

57.
Vniuerſaliſſima facta de toto genere quantitatis, etiam ſolidæ, prima prop. lib. 2, § 5.

58.
Propoſ. 4 lib. 2 traducta ad omnia genera quantitatis etiam ſolidæ. Propoſ. 4. Schol. 3.

59.
Traductæ propoſ. 12, & 13 lib. 2 ad ampliſſimos vſus vniueſæ gaometriæ. § 18.

60.
Auctarium propoſitionum vniuerſalium de toto genere quantitatis, ad lib. 2. § 15.

61.
Campus Geometricus circa quadrationes curuilineorum. li. 2. § 20.

62.
Campi Geometricus, & Stereometricus, in quibus è lib. 2 elem. compoſitiones ſolidorum, & eorum analyſes in librum 2. § 20, 21.

63.
Propoſitiones 35, 36 lib. 1 traductæ ad ſolida. In Epil. Planim. Poſt § 1.

64.
Ampliationes propoſitionum aliquarum de ſolidis. Epilog. Planim. poſt § 23.

65.
Campus Quadratorius, in quo legitimæ Geometricæ Philoſophię Corollaria de numero infinitis quadraturis ſphæricarum, & cylindricarum ſuperficierum, triangulorum ſphæricorum, circulorum. In Epilog. Planim. § 29.

66.
Regula noſtra vniuerſalis de ſolidorum etiam diuerſæ ſpeciei baſibus, & altitudinibus reciprocis. Breuiar. Stereom. ſect. 1. Schol. poſt theor. 8.

67.
Regula vniuerſalis de diuerſæ ſpeciei ſolidis eiuſdem altitudinis habentibus inter ſe baſiū proportionem. ſec. 1. § 4.

68.
Regulæ apud nos vniuerſales, breues, ac faciles pro peculiaribus, quæ apud Euclidem ſunt circa triplicatas proportiones, &c. ſolidorum ſimilium. ibid. § 6.

69.
Vniuerſales regulæ ad praxes etiam geometricè organicas pro cognoſcendis proportionibus datorum ſolidorum etiam non ſimiliū. Breu. Stereo. ſec. 1. Schol. poſt Theor. 22.

70.
Regula vniuerſaliſſima de proportione ſolidorum etiam non ſimilium, & vltra elementariū, ex eorum ortu. ſec. 1. § 7.

71.
Regula vniuerſalis pro quadrādis curuis ſuperficiebus. ſec. 2. Schol. 2 poſt probl. 12.

72.
Regula vniuerſalis pro inuentione organicà centri grauitatis. Sec. 2. corollar. 5 poſt probl. 17.

73.
Vniuerſalia ad dimēſionem quarumcumq; etiam irregularium ſuperficierum circa ſolida rotunda. ſec. 2. Schol. 3 poſt probl. 18.

74.
Vniuerſalià pro dimenſionibus ſolidorum rotundorum. poſt probl. 26 in fine §. 3. Sec. 2. Schol. 2.

75.
Regulæ vniuerſales pro transformationibus ſolidorum. Sec. 1, Schol. 2 poſt

poſt probl.30, & cor.poſt probl. 44.

76.

Regula vniuerſalis etiam pro ſolidis vltraelementaribus, ſcilicet rotundis omnibus transformandis in æquale parallelepipedum. ibid. poſt probl.43, 44.

77.

Regula vniuerſalis pro ſolidorum rotundorum auctionibus, imminutionibus, &c. in data proportione. Sec. 2. § 2.

78.

Seges Theorematum Stereometricorum. Schol.poſt § 9, ſec.2.

79.

Campus Stereometricus de quoruncunq; ſolidorum, & ſuperficierum circa ea proportionibus, dimenſionibus, transformationibus. &c. ex eorum ortu. In fine ſec.2.§ 10.

80.

Vnicà vniuerſali regulà ſoluere libri 13 element. propoſitiones à 12 ad 18 excluſiuè de ſolidis regularibus. Sec.3. § 2, 3, 4, 5.

81.

Vniuerſale probl. Datâ ſphæræ ſemidiametro inuenire latus ſolidi reguleris inſcribēdi aliter, ac facilius, quàm apud Eucl. Sec.3. § 4.

82.

Vniuerſale conuerſum antecedentis: dato latere ſolidi regularis, inuenire ſemidiametrum ſphæræ circumſcribendæ. Sec.3.§ 5.

83.

Auctaria, & compendia noſtra pro 13 lib.de ſolidis. Sec.3.§ 11.

84.

Problema vniuerſale de ſolidi regularis ſuperficie metienda. Ibid.§ 12.

85.

Pro aliquibus propoſitionibus libri 14 elem.noſtra vniuerſalia Auctaria, & compendia. Sec. 3.§ 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20.

86.

Regula vniuerſalis pro dati corporis regularis ſoliditate metiendà. Ibid. § 17.

87.

Compendia indicata de transformationibus, auctionibus, imminutionibus, dimenſionibus, &c. corporum regularium. Ib.§ 20.

88.

Campus demonſtratorius vniuerſaliſſimus, & compendioſus pro eleuandis propoſitionibus ad omnia genera quantitatum, diſcretæ, continuæ, planæ, curuæ, ſolidæ, abſtractæ, concretæ. &c. Sec. 3. § 23.

89.

Campus, & compendia pro quantitate irrationali. &c. Sec.3.§ 24.

INDEX SECVNDVS

Theorematum de figuris ſolidis.

IN TOMO SECVNDO.

1.

Cylindri recti, ęqualium ſine baſibus ſuperficierũ, facti ex gyratione circa aſymptoton ęqualium rectangulorum, habent inter ſe proportionem ſemidiametrorum in baſibus. Ac demonſtratur ex nouo vſu geometrico centri grauitatis.

tis. Propoſ. 14, § 5.

2.

Cylindrorum rectorum (iſoperimetrorum ſine baſibus) reciprocantur ſicur ſemidiametri (etiam diametri, & peripheriæ baſium) ſic etiam ſoliditates cum altitudinibus. Ib. § 6.

3.

Conorum iſoſcelium ex gyratione triangulorum æqualium inter hyperbolen, & aſymptoton ſoliditates inter ſe ſunt vt ſemidiametri baſium, & reciprocè vt altitudines, è nouo vſu centri grauitatis. Propoſ. 25, § 3.

4.

Sphęræ habent inter ſe proportionem triplicatam ſemidiametrorum demonſtratam ex vſu geometrico cẽtri grauitatis. Prop. 20, § 18.

5.

Sphæræ inter ſe ſunt vt à diametris cubi, Ib § 28.

6.

Sphæra Solis (quæ terrà longè minor oculis apparet) eſt maior terrę ſphęrà pluſquam centies, & quadragies. Ibid. § 30.

7.

Coni, & Cylindri recti eiuſdem altitudinis, & baſis facti è rotatione circa aſymptoton ex æqualibus rectangulis, & triangulis inter hyperbolen, & aſymptoton, habent inter ſe proportionem compoſitam ex proportione trianguli ad rectãgulum, & ex proportione trientis ad ſemiſſem ſemidiametri baſis communis. Prop. 23. § 18.

8.

Omnis conus tertia pars eſt cylindri eamdem cum ipſo baſim habentis, & altitudinem æqualem.

IN TOMO TERTIO,

Et in Breuiarij Stereometrici

Sectione prima.

1.

PArallelepipeda æqualium baſiũ, & altitudinũ ſunt ęqualia. theorem. 1.

2.

Priſmata æqualium baſium, & altitudinum ſunt æqualia. Theor. 2.

3

Cylindri etiam obliqui ęqualium baſium, & altitudinum ſunt æquales. Theor. 3.

4.

Coni æqualium baſium, & altitudinum ſunt æquales. Theor. 4.

5.

Parallelepipeda, quorum baſes, & altitudines reciprocantur, ſunt æqualia. Theor. 5.

6.

Cylindri, & Coni, quorum baſes, & altitudines reciprocantur, ſunt æquales. Theor. 6.

7.

Parallelepipedum ex tribus lineis proportionalibus, eſt æquale parallelepipedo ex media, &c. iuxta propoſ. 36 li. 12. Theor. 7.

8.

Solida ex quatuor lineis proportionalibus ſimilia, ſimiliterq; deſcripta ſunt proportionalia. Theor. 8.

Pa-

9.
Parallelepipedi ſecti parallelis, &c. ſegmẽta ſũt inter ſe vt baſes. Th. 10.

10.
Cylindri ſecti parallelis baſibus ſegmenta ſunt inter ſe, vt axes. Theor. 11, 12.

11.
Paralllelepipeda ſuper æqualibus baſibus, ſunt inter ſe vt altitudines. Teor. 13.

12.
Conus eſt tertia pars ſui Cylindri. Th. 14.

13.
Pyramis eſt tertia pars ſui priſmatis. Theor. 15.

14.
Coni, & Pyramides eiuſdem altitudinis, ſunt inter ſe vt baſes. In Schol.

15.
Solida parallelepipeda ſimilia ſunt in triplicata proportione laterum homologorum. Theor. 16.

16.
Priſmata ſimilia ſunt in triplicata proportione laterum homologorum. Theor. 17.

17.
Similes pyramides ſunt inter ſe in triplicata proportione laterum homologorum. Theor. 18.

18.
Cyllndri ſimiles habent inter ſe triplicatam proportionẽ ſemidiametrorum (ſiue diametrorum) in baſibus, ex eorum ortu. &c. Theor. 19.

19.
Coni ſimiles habent inter ſe triplicatam proportionem ſemidiametrorum (ſiue diametrorum) in baſibus. Ex eorum ortu. Theor. 20.

20.
Sphęræ habent inter ſe triplicatã proportionem ſemidiametrorum (ſiue diametrorum) ex earum ortu, etiam ſine vſu geometrico centri grauitatis, &c. Theor. 21.

21.
Si fuerint quatuor lineæ rectæ continuè proportionales, vt eſt prima ad quartam, ita eſt parallelepipedum ſuper prima deſcriptum ad parallelepipedum ſimile, ſimiliterq; deſcriptum ſuper ſecunda. Th. 22.

In Sectione Secunda Breuiarij.

22.
Cylindri ſuperficies ſine baſibus æqualis eſt ſuperficiei ſphæræ in cylindro inſcriptę, at verò cũ baſibus eſt ſeſquialtera. &c. Poſt probl. 17, coroll. 2.

23.
Superficies ſphærica eſt æqualis ſuperficiei ſine baſibus ſemicylindri, ſiue cylindri diſſecti iuxta axem, & habentis pro baſe ſemicirculum ſphærę maximum, & pro altitudine duplicatam ſphęrę diametrum. Poſt probl. 18, coroll. 1.

24.
Sphæra eſt æqualis ſemicylindro, ſiue cylindro biſecto iuxta axem habẽti pro baſe ſemicirculum, & pro altitudine duas tertias duplicatæ diametri eiuſdẽ ſemicirculi. Poſt probl. 28, coroll. 1.

25.
Sphæra eſt æqualis cylindro habenti pro baſe circulum ſphære maximũ, & pro altitudine duas tertias diametri. Poſt probl. 25, corollar.

26.
Sphæra æqualis eſt cylindro habenti pro baſe circulum æqualem ſphæricæ ſuperficiei, & pro altitudine tertiam partem ſemidiametri eiuſdem ſphæræ. Poſt probl. 36. corol. 1.

Co-

27.
Conus habẽs pro altitudine ſemidiametrum ſphæræ, & pro baſe circulum æqualem ſuperficiei eiuſdem ſphæræ, æqualis eſt ſphæræ. ibid. coroll. 2.

28.
Conus habens pro baſe circulũ ſphæræ maximum, pro altitudine duplicatam diametrum, eſt æqualis datæ ſphæræ.

29.
Sphæra ad Conum habentem pro altitudine diametrum eiuſdem ſphæræ, & pro baſi circulum eiuſdem ſphæræ maximum, habet proportionem duplam. Ibid. coroll. 5.

Duo theoremata aliter, ac facilius, quàm ab Archimede.

30.
Sphæra quadrupla eſt coni habentis pro altitudine ſemidiametrũ ſphæræ, & pro baſi circulum eiuſdem ſphæræ maximum.

31.
Cylindrus habens pro altitudine diametrum ſphæræ, & pro baſi circulum eiuſdem ſphærę maximum, habet ad eandem ſphæram proportionem ſeſquialteram. Coroll. 3, & 4 poſt probl. 26.

In Sectione tertia Breuiarij.

32.
SVb angulo recto recta linea ſi moueatur ita, vt eius extrema ſemper ſint in anguli lateribus, ac altero extremo motum incœperit ab angulo donec alterum extremum perueniat ad eundem angulũ, ſignabit medio ſui puncto quartam circularem, reliquis punctis inter extrema, & medium ſignabit quartas ellipticas. Sec. 3. ſub § 25.

33.
Recta ſub angulo recto vtrinque in infinitum producta, & ſecans anguli latera, ſi altero ſectionis puncto incipiat moueri ab angulo ſecus alterum latus, altero ſecus alterum, donec ſiſtat in eodem angulo, omnibus ſui punctis ſignabit intra, & extra angulum quartas ellipticas, etiam oppoſitas, & ęquales, medio pũcto ſub angulo ſignabit quartam circularem. Ib. in fine § 25.

34.
Parallelogrammata inter hyperbolen, & rectas aſymptotos omnia inter ſe ſunt æqualia. § 26. &c.

35.
Cylindrus ſphæricè cauus habet cauã ſuperficiem interiorem æqualem exteriori cylindricæ ſine baſibus. § 30.

INDEX TERTIVS

Problematum de ſolidis in tertio Tomo, & in Breuiarij Stereometrici Sectione 2, & 3.

In To. 3. Breuiar. Stereometr. Sec. 2.

1.
PArallelepipedi, Priſmatis, Cylindri ſoliditates metiri ex eorum ortu. Probl. 19, 20, 21.

2.
Pyramidis, & Coni ſoliditates metiri. Probl. 22, 23.

3.
Sphæræ ſoliditatem metiri. Probl. 24.

4.
Altera ſphæræ dimenſio. Probl. 25.

5.
Tertia ſphæræ dimenſio. Probl. 26.

6.
Datam Sphæram in æqualem conum transformare. Probl. 27.

7.
Datam ſphæram in æqualem cylindrũ transformare. Probl. 28.

8.
Dato cono cylindrum ęqualem ponere, Probl. 29.

9.
Datum cylindrum in ęqualem conum transformare. Probl. 30.

10.
Datum priſma in æquale parallelepipedum transformare. Probl. 31.

11.
Parallelepipedo cylindrum æqualem ponere. Probl. 32.

12.
Pyramidem in conum æqualem transformare. Probl. 33.

13.
Pyramidem in priſma, vel parallelepipedum, conum in cylindrum æqualia transferre. Probl. 34, 35.

14.
Datum parallelepipedum in cubum æqualem transferre. Probl. 36.

15.
Data liquidorum (aut etiam frugum, ac rerum aridarum, quæ vaſis menſurantur) quantitate, cubicum vas eius præciſè capax geometrice cõſtituere. Probl. 37.

16.
Datum cylindrum, vel conum in æqualem cubum conuertere. Probl. 38, 39.

17.
Dato cubo parallelepipedum æquale in data altitudine conſtituere, cum vſu propoſ. 36 li. 11. Probl. 40.

18.
Sphæram in cubum æqualem transformare, cum vſu geometrico centri grauitatis. Probl. 41.

19.
Dato cubo ſphæram æqualem ponere. Probl. 42.

20.
Datis cylindro, vel cono ſphæram æqualem conſtituere. Probl. 43, 44.

21.
Dato ſolido ſimile ſolidum maius, vel minus in data proportione conſtituere. Probl. 45.

22.
Cubum duplare. Probl. 46.

23.
Conum in data ratione imminuere. Probl.47.

24.
Datum parallelepipedum ad datam rationem ſecare. Probl. 48.

25.
Datum cylindrum ſecare ad datam rationem. Probl.49.

26.
Priſmatum, & Pyramidum facillima proportionalis ſectio.

In Sectione tertia.

27.
DAtâ ſphæræ ſemidiametro, inuenire latus ſolidi regularis inſcribendi, aliter, ac facilius, quàm apud Euclidem. Probl.1.

28.
Dato latere ſolidi regularis, inuenire ſemidiametrum ſphæræ circumſcribendæ. Probl.2.

29.
Tetraedri ſolida conſtructio, praxis, analyſis. Probl.3.

30.
Octaedri ſolida conſtructio, praxis, reſolutio. Probl.4.

31.
Compoſitio, praxis, analyſis Hexaedri, ſiue Cubi. Probl.5.

32.
Compoſitio, praxis, analyſis Icoſaedri. Probl.6.

33.
Compoſitio, praxis, analyſis Dodecaedri. Probl.7.

34.
Dati ſolidi regularis ſuperficiem metiri. § 12.

35.
Dati corporis regularis ſoliditatē metiri. ib. Probl.9.

36.
Dato Cono altitudinis ęqualis diametro baſis, ſolidum cylindricū ſphæricè cauum æquale conſtituere. Et conuerſim. § 29.

37.
Dato cono (in cuius baſi diameter ſit dupla altitudinis) ſcaphium cylindricum hæmiſphæricè cauū æquale ponere. Et conuerſim. ib.

38.
De dimenſione ſuperficierum in ſcaphijs hemiſphæricis. Poſt § 30.

INDEX QVARTVS,

IN QVO
De curuis ſuperficiebus Theoremata, Problemata, Corollaria. Item Corollaria de ſolidis.

DE CVRVIS SVPERFICIEBVS. &c.
IN TOMO SECVNDO.

1.
SI parallelogrammorum rectangulorum inter hyperbolen, & rectā aſymptoton latus aſymptoto parallelum ad diſtantiam alterius lateris gyrari concipiatur, fient ſuperficies cylindricæ ſine baſibus, omnes inter ſe ſe æquales. Prop.14, § 2.

Re-

2.
Rectorum cylindrorum ſuperficies ſine baſibus productæ à lateribus etiam inæqualibus æqualium rectangulorum ſunt inter ſe æquales. Ibidem.§ 3.

3.
Superficies cylindri recti ſine baſibus producitur, ducta cylindri altitudine in circumferentiam baſis. Ib.§ 4.

4.
Corollaria in re vaſaria pro liquidis. &c. Ibid.§ 7.

5.
Conorum rectorum, ac inæqualium altitudinum, quorum latera ſunt æqualia, ſuperficies ſine baſibus, ſunt inter ſe, vt baſiū ſemidiametri. Propoſ. 15, § 4.

6.
Superficies ſine baſibus conorum rectorum factę à triangulis ęqualibus inter hyperbolen, & aſymptoton, habent inter ſe proportionem compoſitam ex lateribus, & è ſemidiametris baſium. Prop. 23, § 16.

7.
Conorum, & cylindrorum rectorum, habentium æquales baſes & altitudines inter hyperbolē, & aſymptoton, ſuperficies habent inter ſe proportionem cōpoſitam ex lateribus, & ex diametro, & ſemidiametro baſis. Ibid.§ 17.

DE CVRVIS SVPERFICIEBVS IN TO. 3.

8.
Rectorum cylindrorum ſimiliū ſuperficies ſine baſibus ſunt inter ſe in duplicata proportione ſemidiametrorum in baſibus. Breuiar. Ster. ſec. 1, Theor. 23, & aliter 1, 2.

9.
Superficies rectorum ſimilium cylindrorum ſunt in duplicata proportione altitudinum. Ibid. Theor. 24.

10.
Similium conorum ſuperficies ſine baſibus ſunt in duplicata proportione quorumlibet trium laterum triāguli gyrati circulariter in ortu cylindricæ ſuperficiei. ib. Theor. 25, & Aliter.

11.
Sphæricæ ſuperficies ſunt in duplicata ratione ſemidiametrorum. Ibidem Theor. 26.

12.
Superficies ſine baſibus cylindrorum rectorum, quorum latera, & diametri baſium reciprocantur, ſunt ęquales. ib. Th. 27.

13.
Cylindri recti datæ ſuperficiei ſine baſibus æqualem circulum deſcribere. Sect. 2. probl. 1.

14.
Coni recti datæ ſuperficiei, ſine baſibus, æqoalem circulum deſcribere. ib. probl. 2.

15.
Dati cylindri ſuperficiē in conicam ſine baſibus transformare. ibidem Probl. 3.

16.
Conicam ſuperficiem in æqualem cylindricam ſine baſibus, transferre. ib. Prob. 4.

17.
Cylindri, & coni ſuperficies ſine baſibus ſunt inter ſe æquales, quorū latera æqualia ſunt, & diameter baſis coni dupla eſt diametri baſis cylindri. ibid.

18.
Dato circulo cylindricam, vel conicam ſuperficiē ſine baſibus æqualem inuenire. ib. prob. 5, & 6.

19.
Sphæricæ ſuperficiei circulum ęqualem ſtatim deſcribere.
20.
Datis cylindricæ, vel Conicæ ſuperficiebus, ſine baſibus, æqualem ſphæricam ſuperficiem facillimè conflare. ib.probl.8, & 9.
21.
Datæ ſphæricæ ſuperficiei æquales cylindricam, vel conicam ſuperfi- ſine baſibus. facillimè conflare. ib. Probl.10, 11.
22.
Triangulo ſphærico, hoc eſt octauæ parti ſuperficiei ſphæricę circulum æqualem deſcribere. ib. probl.12.
23.
Parallelepipedorum, Priſmatum, Cylindrorum ſuperficies metiri, ex earum ortu. Ib.probl.13, & 14, 15.
24.
Corollaria ad Sacra. Ibid.
25.
Corollaria ad Architecturam.ibid.
26.
Conicam ſuperficiem metiri ex eius ortu, & cum vſu geometrico centri grauitatis. ibid.probl.16.
27.
Corollar. milit. pro Tentorijs. &c. Ib.
28.
Sphæricę ſuperficiei dimenſio, ex eius ortu, cum vſu centri grauitatis. Ib. probl.17.
29.
Sphæricę ſuperficiei cylindricam ſine baſibus æqualem ponere. ibid. poſt probl.17, coroll.1.
30.
Cylindri ſuperficies ſine baſibus æqualis eſt ſuperficiei ſphæræ in cylindro inſcriptæ; at verò cum baſibus eſt ſeſquialtera, &c. ib. coroll. 3.
31.
Quanta ſit ſoperficies globorum Lunaris, vel Terreſtris. ib.coroll. 5.
32.
Sphæricæ ſuperficiei dimenſio altera. &c. idid.probl.18.
33.
Superficies ſphærica eſt æqualis ſuperficiei ſine baſibus ſemicylindri, ſiue cylindri diſſecti iuxta axem, & habentis pro baſe ſemicirculum ſphæræ maximum, & pro altitudine duplicatam ſphæræ diametrum. ib.corollar.1.
34.
Inuenire quantitatem rotationis, in quam gyrata ſemiperipheria circa diametrum producit ſuperficiem ſphæræ. ib.coroll.3.
35.
Recta linea peripheriæ circuli æqualis; etiam ſine ſpiralibus Archimedis. ib.coroll.4.

COROLLARIA DE SOLIDIS

IN TOMO SECVNDO.

38.
DImenſiones facillimæ ſolidorũ ex antedictis, Auctiones, &c. Prop.20, § 21.
39.
Corollaria, & paradoxa eximia vniuerſalia Aſtronomica indicata de cœlorum, & cœleſtium ſphærarum inter ſe, & cum terra proportionibus. &c. ib. § 28.

COROLLARIA DE SOLIDIS
IN TOMI TERTII.
Breuiatio Stereometrico.

40.
DE parallelepipedis,& priſmatibus obliquis. Sect. 1. poſt Th. 4, coroll. 1.

41.
De pyramidibus ęqualibus rectis, & obliquis. &c. ib. coroll. 2.

42.
De parallelepipedis, priſmatibus, cylindris, pyramidibus, conis etiam mixtim æqualibus. ib. Coroll. 3.

43.
Si fuerit reciprocè vt planum ad planum; ita linea ad lineam, ſolidum ex medijs plano, & lineà, eſt æquale ſolido ex extremis plano, & lineà. ib. poſt Theor. 8.

44.
Quanto ſol terra ſit maior. De comparatis magnitudinibus inter ſe Planetarum. Ac vſus alij militares præcedentis Theorematis 21 indicati apud nos. Ib. poſt Theor. 21.

45.
Corollar. & applicatio demonſtrationum cylindri, parallelep. in liquidis, &c. Ibid. poſt probl. 19, 20, 21.

46.
Corollar. & applicatio dimenſion. Pyram. Coni, &c. in re militari, & ruſticà. Ibid. poſt probl. 22, 23.

47.
Sphæra eſt æqualis ſemicylindro, ſiue cylindro biſecto iuxta axem, habēti pro baſe ſemicirculum, & pro altitudine duas tertias duplicatæ diametri eiuſdem ſemicirculi. Ibid. corollar. poſt proble. 24.

48.
Sphæra eſt æqualis cylindro habenti pro baſe circulum ſphæræ maximum, & pro altitudine duas tertias diametri. Ibid. Coroll. poſt prob. 25.

49.
Sphæra æqualis eſt cylindro habenti pro baſe circulum æqualem ſphæricæ ſuperficiei, & pro altitudine tertiam partem ſemidiametri eiuſdem ſphærę. Corol. 1. poſt probl. 26.

50.
Conus habens pro altitudine ſemidiametrum ſphærę, & pro baſe circulum æqualem ſuperficiei eiuſdē ſphęræ, æqualis eſt ipſi ſphæræ. Corollar. 2.

51.
Propoſ. 31 lib. 1 Archimedis de ſphęra, & cylindro demonſtrata directè ex antecedentibus, ſcilicet: Sphęra quadrupla eſt coni habentis pro altitudine ſemidiametrum ſphæræ, & pro baſi circulum eiuſdē ſphæræ maximum. ib. Coroll. 3.

52.
Corollarium propoſ. 31 lib. 1 Arch. de ſphærà, & cylindro expeditum ex anteced. ſcilicet: Cylindrus habens pro altitudine diametrum ſphæræ, & pro baſi circulū eiuſdem ſphęrę maximum, habet ad eandem ſphęram proportionem ſeſquialteram. ib. Coroll 4.

53.
Sphæra ad Conum habentem pro altitudine diametrum eiuſdem ſphęræ, & pro baſi circulum eiuſdem ſphæræ maximum, habet proportionem duplam. ib. Coroll. 5.

54.
Trium ſolidorum rotundorum elemen-

mentarium eiuſdem altitudinis inſcriptiones, ac dimenſiones inter ſe ordinatiſſimæ ex antedictis, iuxta numeros 1, 2, 3. ib. Coroll. 6.

55.

De famoſa cubi duplatione. Problema 46.

56.

De comparatione laterum in corporibus regularibus Sect. 3. § 3.

57.

Pro li. 13 Elem. de ſolidis regularibus noſtra compendia, & auctaria. ib. § 11.

58.

Pro aliquibus propoſitionibus lib. 14 Elem. noſtra compendia. Ib. § 13.

59.

Noſtrum compendium, & auctarium primum ad lib. 14 Elem. ib. § 15.

60.

Ad lib. 14 elem. & regula vniuerſalis pro dati corporis regularis ſoliditate metienda, cum vſu Corollar. prop. 7. lib. 12.

61.

Corollaria eximia ad Theoricen, & xim. &c. ib. ſub finem § 25.

62.

Corollaria de ſcaphijs. &c. ibid. § 29.

63.

Scaphium hemiſphæricè cauum eſt ſub æqualibus ſuperficiebus, interiore hemiſphæricà, exteriore cylindrica ſine baſibus. ib. poſt § 30.

64.

De dimenſione ſuperficierum in ſcaphijs hemiſphæricis. ib.

INDEX QVINTVS

Theorematum de planis.

IN TOMO SECVNDO.

1.

SI duo triangula æqualia habeant vnum latus commune, & in diuerſas partes vergant; Recta oppoſitos angulos connectens à latere illo communi bifariam ſecatur. Propoſ. 1. § 17.

2.

In parallelogrammo duę rectę lateribus parallelogrammi parallelæ, ac mutuò ſe ſecantes diuidunt parallelogrammum in quattuor parallelogrammata proportionalia, etiam permutata. Propoſ. 1. § 18.

3.

In parallelogrammis alterutrum cõplemẽtum eſt medium proportionale inter parallelogrammata circa diametrum. Propoſ. 1. § 20.

4.

Si in triangulo rectangulo ex quolibet acutorum angulorum interuallo lateris adiacentis arcus circuli deſcribatur ſecans baſim, & ex pũcto ſectionis demittatur perpendicularis in latus prędictum, idem latus erit media proportionalis inter baſim trianguli, & ſegmẽtum lateris contentum inter per-

pendicularem, & angulum acutũ. Propoſ.2.§ 5.

5.

In circulis concentricis rectę lineę à communi centro ductę, quę ſecant peripherias, proportionaliter à peripherijs ſecantur. Propoſ.2. § 6.

6.

Recta in ſemicirculo à quolibet puncto diametri ad ipſam diametrum perpendiculari, & ab vno terminorum eiuſdẽ diametri ductis pluribus lineis, quæ ſecent circumferentiam, & perpendicularem, ſiue intra, ſiue extra ſemicirculum: illa linea quę tranſit per interſectionem perpendicularis cum circumferentia, eſt media proportionalis inter illam cuiuſuis alterius lineę partẽ, quę continetur inter terminum diametri, & circumferentiam, & illam quę intercipitur inter eundem terminum, & perpendicularem. Propoſ.4, § 37,

7.

Si in ſemicirculo ex vno terminorum diametri ducatur tãgẽs, & ex altero termino linea ſecas tangentem, & circumferentiam, atq; à puncto interſectionis circumferentię in diametrum demittatur perpendicularis, tota ſecans, diameter, ſegmentum ſecantis intra ſemicirculum, nec non ſegmentum diametri inter ſecantem, & perpendicularẽ, erunt quattuor lineę continuè proportionales, Propoſ.4 § 39.

8.

Si in ſemicirculo recta quępiam ab alterutro termino diametri ad circũferentiam applicata, ſecet perpendicularem quampiam ſuper diametrum eductam, ſitque ſegmentum eius interceptum inter terminũ diametri, & dictam perpendicularem ęquale ſegmento diametri inter eũdem terminum, & perpendicularem quę in ipſam diametrum cadit à puncto applicatę in circumferentia; eadem applicata, eiuſdemq; ſegmentum inter terminum diametri, & priorem perpẽdicularem erunt duæ mediæ proportionales inter diametrum, & illud eius ſegmentum, quod continetur inter eundem terminum diametri, eandemque illam priorem perpendicularem. Propoſ.4, § 40.

9.

In omni triangulo tres rectæ ab angulis productæ, ac biſariantes oppoſita latera ſecant ſe in communi puncto. Propoſ.4.§ 41.

10.

Si tres lineæ rectæ continuè proportionales ad idem punctum cõueniant, & media ad reliquas ſit perpendicularis; rectæ quæ illarum coniungunt terminos, continebunt angulum rectum. Propoſ.3, & 6. § 2.

11.

Si tres lineæ continuè proportionales ſibi inuicem in terminis eodem ordine ad angulos rectos inſiſtant, quę illarum terminos nectunt duæ rectæ lineę ſe ſe mutuò ſecabunt ad angulos rectos, & in quattuor partes continuè proprtionales. Propoſ.8. § 10.

12.

Si duæ lineæ rectæ ſeſe ita ad angulos rectos ſecent, vt quattuor illarũ partes ſint ordine, & continuè proportionales; tres rectæ, quæ eodem ordine earum terminos coniungunt, & ipſæ ſunt continuè proportionales in ratione partium. Propoſ.8.§ 18.

13.

Si ſint tres lineæ continuè proportionales, & ſuper maxima deſcribatur ſemicirculus, ad quem ex termino diametri applicetur media, ab eodemq; termino diametri ex diametro abſcindatur ęqualis minimę; quę connectit terminos medię, & minimę ex diametro abſciſsę, perpendicularis erit ad diametrum, & eadem

me-

poteſt, ſimilibus rectilineis, vel circulis, facilè, ac demonſtratiuè cognoſcere quot rectilineis, vel circulis minoribus ęqualia ſint ſpatia quantumuis irregularia ab ipſis recto in baſim cadat perpendicularis, & rurſum ex angulo recto vnius triangulorum partialium alia perpendicularis in ſuam baſim, conſtitutę erunt quattuor lineę continuè proportionalis; nempe baſis trianguli totalis, & baſis partialis, nec non duo earumdem baſium ſegmenta intercepta inter perpendiculares, & angulum communem. Propoſ.8.§ 20.

15.

Diameter, & tangens ſunt medię proportionales inter ſecantem, & ſegmenta adiacentia, ſiue intercepta intra, & extra peripheriā. &c. Propoſ.8.§ 21.

16.

Inter eaſdem parallelas lineæ mutuò ſecant ſe in eadem proportione. Prop.10, § 10.

17.

Si ad rectam lineam perpendicularis ducatur, quę ſit media proportionalis inter ſegmenta lineę, ſemicirculus circa illam lineam rectam deſcriptus tranſibit per extremū punctum lineæ perpendicularis. Prop. 13.§ 3.

18.

In parallelogrammis omnia complementa eorum, quę circa diametrum ſunt parallelogrammorum, ſunt reciproca, ſiue habent latera reciproca. Prop.14, § 8.

19.

In ſemicirculo rectà perpendiculari erecta ex aliquo puncto diametri, & protractà etiam extra peripheriā, omnia rectangula comprehēſa ſub ſegmentis interceptis inter eundem terminum diametri, inter perpendicularem, & inter peripheriam, ſunt inter ſe ęqualia. Prop.17. § 13.

20.

Si ad diametrum circuli in extremis punctis duę perpendiculares excitentur, & ab eiſdem extremis per vnum, idemq; punctum circumferentię duę alię rectę circulū ſecantes ducantur occurrentes duabus perpendicularibus, erit rectāgulum comprehenſum ſub vtralibet ſecātium, & eius ſegmento interiore quadrato diametri ęquale. Propoſ 17. § 14.

21.

Si in circulo diametri ſeſe ad rectos angulos ſecēt, & ab vnius extremo puncto recta ducatur vtcumque ſecans circumferentiam, & alteram diametrum ſiue producta, ſiue non productam; erit rectangulum comprehenſum ſub duobus ſegmentis huius lineæ ductę, quorum vnum inter extremum punctū prioris diametri, & ſecundam diametrum, alterum verò inter idem pūctum extremum, & circumferentiam interijcitur ęquale quadrato intra circulum deſcripto. Prop.17. § 15.

22.

Quadratum coſtę eſt æquale rectangulo ſub diametro, & ſemidiametro quadrati. Propoſ 17.§ 16.

23.

Si curuę lineę recta ſubtendatur, & quę à linea ad ſubtenſam perpendiculares ducuntur poſſint æquale ei, quod ipſius ſubtenſę partibus continetur, ducta linea circuli circumferentia erit. Propoſ.17.§ 17.

24.

Circuli habent inter ſe duplicatam proportionem ſemidiametrorum, ex vſu geometrico cētri grauitatis demonſtratam. Propoſ.20.§ 8.

25.

Intra figuram rectilineam, vel circulum deſcriptis minoribus, & inter ſe ſe ęqualibus quotcunque capere

po-

poteſt ſimilibus rectilineis, vel circulis, facilè, ac demonſtratiuè cognoſcere quot rectilineis, vel circulis minoribus æqualia ſint ſpatia quantumuis irregularia ab ipſis rectilineis, vel circulis minoribus non occupata. Propoſ. 20. § 14.

26.

Sphæræ habent inter ſe proportionem triplicatam ſemidiametrorum demonſtratam ex vſu geometrico cētri grauitatis. Propoſ. 20. § 18.

27.

Circellus cæleſtis à ſtella polari circa mundi axem, & polum deſignatus longè maior eſt circulo cæli Solaris. Propoſ. 20 § 29.

28.

Sphæra Solis (quæ terra longe minor oculis apparet) eſt maior terræ ſphęrà pluſquam centies, & quadragies. Propoſ. 20. § 30.

29.

In omni parallelogrammo alterū complementorum eſt medium proportionale inter parallelogrammata circa diametrum. Propoſ. 24 § 2.

30.

Si dati pētagoni regularis latera vtrinque producantur donec in angulos coëant, omnia latera ſecantur mutuis geminis ſectionibus ſecūdū mediam, & extremam proportionem, in quarum ſectionum alterà maius ſegmentum eſt latus pentagoni maioris circumſcribendi, in alterà verò minus ſegmentum eſt latus dati minoris pentagoni. &c. Prop. 30 § 16.

IN TOMO TERTIO.

31.

THeorema de ſphęra planum tangente in puncto, ex propoſit. 2. lib. 3, § 1.

32.

Theorema de lineis ductis à puncto contactùs ſemicirculorum, quę omnes ſecantur in proportione ſectæ diametri. Ibid. Propoſ. 31 § 2.

33.

Datis duabus rectis lineis inuenire, ac oſtendere potentiam maioris ſupra minorem. ibid § 5.

34.

Si duæ rectæ mutuò ita ſecent ſe, vt earum ſegmenta ſint reciprocè proportionalia, circulus ibit per earum extrema. Ibid. prop. 35. § 3.

35.

Si in ſemicirculo ex quouis puncto intra diametrum aſſumpto ad ipſam erigatur perpendicularis, & ab vtroque termino diametri duæ rectę ducantur ſe mutuò ſecātes intra ſemicirculum in aliquo puncto lineæ perpendicularis; aliæ duæ rectæ ductæ ab iiſdem terminis diametri per puncta, in quibus priores duę ſecant circumferentiam, ſi producantur, concurrēt etiam ipſę extra ſemicirculum in idem punctum erectę perpendicularis. Ibid. Propoſ. 36 § 5.

36.

Si in ſemicirculo ab vtroque termino diametri duæ rectæ ducantur ſe mutuò ſecātes intra ſemicirculum, & ab eiſdem terminis, per puncta in quibus ductæ ſecant circumferētiam, ducantur duæ aliæ rectæ concurrentes extra ſemicirculum; recta, quæ coniungit vtrunq; punctum concurſus, erit ad diametrum perpendicularis. Ibid. § 7.

37.

Rectangulū comprehenſum ſub diametris quadrilaterorum circulo inſcriptorum æquale eſt duobus rectangulis ſimul, quæ ſub lateribus oppoſitis continentur. lib. 4. Propoſ. 6, § 2.

38.
Quadratum circa circulum eſt duplũ quadtati intra circulum. Ibid. Prop. 8. § 1.

39.
Octogonum med. proport. inter quadrata circulo inſcripta, & circumſcripta. Ib.prop 10.§ 2.

40.
Si per idem punctum diametri in rectangulo duæ lineæ ducantur lateribus parallelæ, erit rectãgulum ſub ſegmentis diametri comprehenſum æquale duobus rectangulis ſub ſegmentis duorum laterũ comprehenſis. Lib.2.prop.4 § 10.

41.
Quadratum duplæ quadruplum quadrati dimidiæ lineæ, etiam in numeris oſtenſum. Ib.§ 11.

42.
Theoremata eximia de proportionalitate arithmetica in numeris, & lineis indicata. Singularia etiam in numeris circa ꝓportionalitates harmonicas, & Geometricas compatatas cum arithmeticà ex 5 propoſitione elemen. lib.2, Ibidem propoſ.5, § 14.

43.
Si quantitas quælibet in duo ſegmenta diuidatur, id, quod fit ex vtrolibet aſſumpto ſegmento in quadratum totius, æquum erit his duobus, ſcilicet quæ fiunt ex vtraq; ſectionum in quadratum reliquæ, & ei, quod fit ex quadrato aſſumpti ſegmenti in totam. Ib.prop.11, § 15.

44.
Si quantitas quælibet in duo ſegmenta ſecetur, cubus, qui ex tota æquus erit his, ſcilicet duobus cubis ſectionum, & triplo eius, quod fit ex quadrato vtriuſq; in reliquum. Ib.

45.
Si quantitas quælibet in duo ſegmenta diſpeſcatur, cubus totius æqualis erit his, ſcilicet duobus cubis ſegmentorum, & triplo ſolidi ſub totâ, & ſingulis ſegmentis contenti.

46.
Ex ortu circuli demonſtrare duplicatam circulorum proportionme. Epil. Plan.§ 19.

47.
Aequalium altitudinum,& baſium Pyramis, & Conus æqualia ſunt ſolida, ex eorum ortu. Epil. § 33.

Vide, & in ind.1 theoremata vniuerſaliſſima, & inter Corollaria, & Paradoxa, & Scholia.

INDEX SEXTVS

Problematum de planis.

IN TOMO SECVNDO.

1.
Datis quibuslibet, & quotlibet figuris rectilineis, quam inter ſe proportionem habeãt faciliimé inuenire. Propoſ.1 § 7.

2.
A Trapezio ex pũctis in alterutro duorum laterum parallelorum imperatam partem auferre ad datam proportionem per lineam parallelam al-

alteri duorum laterum non paralle-lorum, modò cadat diuiſio intra latus alterutrum parallelum. Propoſ. 1 § 12.

3.

A dato pentagono etiam irregulari imperatam partem ad datam proportionem auferre per lineam ex angulo deductam, modo diuiſio cadat intra baſim oppoſitam angulo, &c. Propoſ. 1 § 13.

4.

A dato cuiuſuis lateris oblati trianguli puncto rectam ducere lineam, quæ ordinatam partem ab ipſo triangulo diſcindat. Propoſ. 1 § 15.

5.

Intra datum triangulum punctum inuenire, à quo in ſingulos angulos ductæ lineæ rectæ triangulum ipſum in tria, & inuicem æqualia diuidant triangula. Propoſ. 1 § 16.

6.

Duabus datis rectis lineis tertiam proportionalem inuenire in circino proportionum. Propoſ. 4. Poſt § 10.

7.

Tribus datis rectis lineis quartam proportionalem inuenire in circino proportionum. Propoſ. 4 § 11.

8.

E 4 Prop: lib. 6 deſcribere peculiarem regionem, & inuenire veros ſitus locorum, & inter ea veras diſtantias. Propoſ. 4 § 12.

9.

Datæ longitudinis quantitatem cognoſcere. Propoſ. 4 poſt § 13.

10.

Datam altitudinem (ex eius vmbra) cognoſcere quanta ſit. Propoſ. 4 § 14.

11.

Cognoſcere quãta ſit profunditas quælibet. Propoſ. 4 § 16.

12.

Latitudines obiectas dimetiri. Propoſ. 4 § 18.

13.

De latitudinum etiam inacceſſarum, & altitudinũ dimenſione per duas ſtationes, & per partem tantum cognitam longitudinis. Propoſ. 4 § 20.

14.

Altitudines turrium, &c. per normam ſubcontrariè poſitam dimetiri. Propoſ. 4 § 22.

15.

Plana ſub montibus latentia, & latentes montium perpendiculares altitudines per normam metiri. Propoſ. 4 § 23.

16.

Montes aliter metiri per vnicam normæ applicationem. Propoſ. 4 § 24.

17.

Cognoſcere quãta ſit altitudo alio modo, quam per Solem, ſcilicet per ſpeculum. &c. Propoſ. 4 § 25.

18.

Lunæ à terris diſtantiam agnoſcere per conſtructionem organicam trianguli geometrici æquianguli triangulo parallactico Aſtronomico. Propoſ. 4 § 26.

19.

Solaris diametri magnitudinem ſemigeometricè coniectari. Prop. 4 § 27.

20.

Solis magnitudinem per ſcaphia è 4 prop. lib. 6 Eucl. faciliimè cognoſcere. Propoſ. 4 § 28.

21.

Solis à terra diſtantiam metiri è radijs per feneſtræ foramen traiectis, ope 4 prop. 4 li. 6 Eucl. Propoſ. 4 § 29.

22.

Scientificam picturam è Philoſophia Optica exercere ope prop. 4 lib. 6, & corollarij apud nos primi ex ea. Propoſ. 4 § 34.

23.

Datis duabus rectis lineis mediã proportionalem inuenire. Prop. 8 § 2.

24.

Datis duabus rectis lineis tertiam mino-

norem proportionalẽ inuenire. Propoſ.8 § 3.

25.

Datis duabus rectis lineis maiorem extremam inuenire. Propoſ. 8 § 4.

26.

Tribus datis quartam proportionalem minorem, ac maiorem e coroll. propoſ.8 li.6 adiungere. Propoſ. 8 § 5.

27.

Tribus datis lineis quartam maiorem, vel minorem proportionalem organicè facillimè per normam inuenire, iuxta coroll.propoſ. 8 lib.6. Eucl. Prop.8 § 6.

28.

Duabus datis tertiam proportionalem lineam inuenire organicè per normam. Propoſ.8 § 7.

29.

Duabus mediam proportionalem per normam interponere. Propoſ.8 § 8.

30.

Lineas non ſolum quartam, ſed plures etiam in eadem proportione continuare ad maiores, & minores terminos. Propoſ.8 § 9.

31.

Duabus datis rectis lineis duas medias proportionales in eadem proportione interponere, iuxtà modum Platonis, è coroll.propoſ.8 § 11.

32.

Duabus duas medias, &c. aliter organicè ex Platone. Propoſ. 8 § 13.

33.

Diſtantias (etiam inacceſſas) metiri è corollario 8 propoſ. li.6. Prop.8 § 14.

34.

Totius orbis terrarum diametrum inuenire è corolla.propoſ.8, lib.6. Propoſ.8 § 16.

35.

Ex qualibet lineola, quamuis minima, auferre partem, vel partes imperatas, cum vſu inſtrumenti partium, ſiue apud nos circini proportionum. Propoſ.9 § 4.

36.

Aliter 1. A data recta imperatam partem auferre in circino proportion.li.6 Propoſ.9, § 5.

37.

Aliter 2. Ex Maurolyco datam rectam in partes æquales quotlibet facillimè ſecare, ſiue imperatam partem auferre. Propoſ.9, § 6.

38.

Aliter 3. Ac facilius ſecare demonſtratiuè datam in ſubi.as partes æquales, ſiue imperatam partem auferre, &c. Propoſ.9 § 7.

39.

Aliter demonſtrare propoſ.10, § 2.

40.

Datam inſectam ſecare vt altera ſecta eſt, ex vſu circini proportionum. Propoſ.10, § 5.

41.

Datam rectam ſecare vt altera, &c.iuxta Maurolycum. Propoſ.10 § 7.

42.

In quadrante circuli lineam parallelam ſemidiametro ſimiliter, ac ſecta eſt ſemidiameter, ingenioſè ſecare. Propoſ.10 § 9.

43.

Datam rectam in Arithmetica proportionalitate progrediente per datam differentiam, diuidere geometricè, atq; etiam organicè in circino partium æqualium. Propoſ. 10 § 14.

44.

Datam rectam in propoſita ſpecie harmonicæ proportionalitatis diuidere geometricè, atq; etiam organicè in circino partium æqualium. Propoſit. 10 § 15.

45.

Datam rectam in quinque ſegmenta organicè, & geometricæ concidere cõſtantia tres ſimul proportionalitates, geometricam, harmonicã, arithmeticam, ex vſu 10 propoſ.Eucl.Propoſ. 10 § 17.

Vſus

46.
Inuentio facillima mediæ in harmonica proportionalitate tam organicè, quam geometricè. Propoſitio 10, § 18.

47.
Datam circularem lineam inſectã datæ circulari ſectæ ſimiliter ſecare duplici modo. Propoſ. 10 § 20.

48.
Aliter primò, quàm Euclides, duabus datis rectis lineis tertiam proportionalem maiorem, & minorem adiũgere. Propoſ. 11 § 1.

49.
Aliter ſecundo, atque alia praxis geometrica pro tertia ꝓportionali. Propoſ. 11 § 2.

50.
Aliter tertio, tertiam minorẽ proportionalem, &c. Prop. 11. § 3.

51.
Aliter quarto tertiam maiorem proportionalem. &c. Propoſ. 11 § 4.

52.
Aliter quinto, ſexto, & ſeptimo, tertię proport. inu. Propoſ. 11 § 5.

53.
Aliter 8 ex lib. 3 Euclid. tertiam prop. &c. Propoſ. 11 § 6.

54.
Aliter, 9, 10, 11 apud alios tertiã proport. &c. Propoſ. 11 § 7.

55.
Aliter 1, datis lineis non ſolum quartam, ſed quintam, ſextam, &c. in infinitum cõtinuè propor. inuenire ad maiores, & minores terminos. Propoſit. 12 § 1.

56.
Aliter 2. Plures rectas lineas in eadem proportione ad minores, & maiores terminos facillimè continuare, ſeu deſcribere. Propoſ 12 § 2.

57.
Aliter 3 Plures lineas in eadẽ proportione continuare ad maiores, & minores terminos. Propoſ. 12 § 5.

58.
Aliter 4. Quotlibet lineas inter ſe proportionales ad maiores, & minores terminos continuare. Prop. 12 § 10.

59.
Aliter 5. continuare plures lineas in eadem proportione. Propoſit. 12. § 11.

60.
Aliter 6. tribus datis rectis lineis quartam proportionalem inuenire. Propoſit. 12 § 12.

61.
Aliter ſeptimo tribus quartam propor. &c. Propoſ. 12 § 13.

62.
Aliter 8 quartam proport. &c. Propoſ. 12. § 14.

63.
Aliter 9. 4 proport. lineam inuen. Propoſit. 12 § 15.

64.
Aliter 10, quartam proport. &c. Prop. 12. § 16.

65.
Aliter 1. duabus datis rectis lineis mediam proportionalem inuenire. Propoſit. 23. § 4.

66.
Aliter 2. duab. med. Propoſit. 13 § 5.

67.
Aliter 3. mediam. &c. Deſcribendo ſemicirculum ſuper maiore datarum. Propoſit. 13 § 6.

68.
Aliter 4. mediam proportionem. &c. applicando vtramq; datam in ſemicirculo. Propoſ. 13 § 7.

69.
Aliter 5, & 6. med. proport. &c. Propoſit. 13. § 8.

70.
Aliter 7, & organicè per circinum proportionum, mediam propor. &c. Propoſit. 13 § 9.

71.
Aliter 8, & 9. med. proport &c. Propoſ. 13 § 10.

72.
Aliter 10. med.proportion.&c.Propoſ. 13. § 11.

73.
Dato medio proportionali, in data linea duo extrema reperire. Oportet autem datum medium dimidia parte datæ lineæ non eſſe maius, Propoſit.13 § 13.

74.
Datis duabus lineis, quarum altera non ſit maior dimidio alterius, ſuper datam maiore conſtruere triangulum rectangulum ita, vt minor datarum ſit perpendicularis ab angulo recto in baſim deducta. Propoſ.13 § 14.

75.
Datis duabus rectis duas medias proportionales attentare, atq; interponere. Propoſit. 13.§ 5 Ibid.

76.
Inter duas datas duas medias proportionales aliter 2, organice inuenire. Propoſ.13. § 7 Ibid.

77.
Aliter 3 duas medias proportionales, &c. Propoſit.13. § 8 Ibid.

78.
Datis duabus rectis lineis, mediâ, & minore extremâ, maiorem extremâ in Harmonica Proportionalitate inuenire per analogiam ad Geometricam. Propoſ.13.§ 3 de med.&c.harmonic.

79.
Dato parallelogrammo æquale parallelogrammum, ex vſu prop. 14 deſcribere, Propoſit. 14.§ 1.

80.
Dato triangulo æquale triangulum ex vſu propoſ.15 lib. 6, deſcribere.Propoſ.15. § 1.

81.
Datum rect lineum quadrare ex 17 prop.apud Eucl.Prop.17.§ 9.

82.
Problema, ſiue praxis quadratricæ Circuli, ex lib.6.Prop. 17.§ 10.

83.
Curuilineum radiatum quadrare. Propoſ.17.§ 11.

84.
Dato quadrato æquale rectangulum conſtituere. Propoſ.17.§ 12.

85.
Datum triangulum per lineas vni lateri parallelas in quotlibet æquales partes diuidere. Propoſ.19 § 3.

86.
Vt recta ad rectam, ita conſtituere rectilineum ad ſimile rectilineum.Propoſ.20 § 5.

87.
Vt rectilineum ad rectilineum ſimile, ſic facere rectam ad rectam. Propoſ. 20. § 5.

88.
Dato rectilineo duo extrema proportionalia, & ſimilia adiungere. Propoſ.22. § 5.

89.
Proportiones parallelogrãmorum inter ſe facillime, ac variè inuenire, etiam extra 23 propoſit. lib. 6.Prop.23. § 6

90.
Datis quibuſcumque, & quotcumque rectilineis, quam inter ſe proportionem habeant facilè inueſtigare ex 23 propoſ.Euclid. li. 6 Prop.23 § 12.

91.
Datis duobus rectilineis tertium proportionale conſtituere in eadem figurarum ſimilitudine. Prop.25, § 10.

92.
Tribus datis rectilineis quartum proportionale conſtituere ita, vt bina ſaltem ſint ſimilia. Propoſ. 25. § 11.

93.
Duobus datis rectilineis medium proportionale (aliter, quam ad prop. 24. lib.6) adiungere in eadem figuræ omnium ſimilitudine. Propoſ. 25.§ 12.

94.
Datam rectam lineã in tres partes proportionales diuidere. Opportet autem

tem in prima diuiſione per inæqualia ſegmentum maius eſſe maius duplo minoris ſegmenti. Propoſ. 28. § 1.

95.

Data diametro maiore, ſiue tranſuersà ellipſis in cono, ſiue in triangulo è ſectione coni ſecundum axem, inuenire latus rectum, ſiue lineam applicationis cum deficientia, &c. Propoſ. 28. § 8.

96.

Datis duabus diametris, ſiue ſemidiametris ellipſis nondum deſcriptæ, & quolibet pũcto extra diametros dato, cognoſcere an punctum id ſit in ellipſi, an extrà. Propoſ. 28 § 25.

97.

Ad tranſuerſam diametrum hyperboles applicare rectangulum æquale quartæ parti figuræ ſub lateribus recto, & tranſuerſo, ita, vt excedat figurà quadratà, ex vſu propoſit. 29 lib. 6. ad vſus præclaros. Propoſit. 29. § 6.

98.

Hyperbolicarum linearum deſcriptiones variæ. Prop. 29. § 11, Schol. 5.

99.

Hyperbolicam ſectionem nouo modo deſcribere etiam aſymptoton ad rectam, vel ad, & intra duas rectas angulum facientes. Propoſ. 29. § 12. Aliter. Ibid. § 13.

100.

Praxis compendiaria geometricè, ac demonſtratiuè ſecandi datam rectã extrema, & media ratione. Propoſ. 30. § 1.

101.

Praxis ſecunda demonſtratiua ex vnica linea diuiſa ſecundum mediam, & extremam rationẽ quotlibet alias datas ſiue maiores, ſiue minores facilè, ac demonſtratiuè ſecare ſecundum mediam, & extremam rationem. Propoſ. 30. § 2.

102.

Datam rectam lineam in infinitum vel imminuere, vel augere ita, vt in omni auctione, vel imminutione facillimè ſemper fiat ſectio medià, & extremà ratione. Prop. 30. § 5.

103.

E circino proportionum expeditiſſimè datam rectam media, & extrema ratione ſecare. Propoſ. 39. § 8.

104.

Data linea pro minori ſegmento, addere illi alteram pro maiori ſegmento ita, vt tota compoſita ſecta ſit extrema, & media ratione. Propoſ. § 10 & aliter poſt § 7.

105.

Data recta pro maiori ſegmento, addere minus conficiens ſectionem totius proportionalem. Propoſ. 30. § 11 & aliter Ib.

106.

Super datà rectà triangulum rectangulum excitare, quod habeat litera in eadem inter ſe proportione. Propoſ. 30. § 14.

107.

Ex dato rectilineo imperatam partem in lubita proportione auferre ita, vt in ablato, & reſiduo ſeruetur eadem figura dati rectilinei. Prop. 31. § 2.

108.

Dato rectilineo duo æqualia conſtruere lubitæ proportionis, & ſimilia inter ſe, & ipſi dato. Propoſ. 31. § 3.

109.

Datum rectilineum diuidere in duo ſimilia dato, & inter ſe in lubita proportione. Propoſ. 31. § 4.

110.

Datum rectilineum augere in lubita proportione, ſeruatà eiuſdem figuræ ſimilitudine. Propoſ. 31. § 5.

111.

Duobus datis ſimilibus rectilineis tertium æquale, ac ſimile deſcribere. Propoſ. 31. § 6.

IN

I N D E X VI.

IN TOMO TERTIO.

1.

DVorum circulorum ſe mutuo ſecantium centra inuenire. lib. 4. Prop. 1. § 1.

2.

Centrum in vacuo putei ore inuenire. Ibid. § 3.

3.

Varijs modis inuenire circuli centrum. Ibid. § 4.

4.

Centrum grauitatis inuenire, ad mirifica, &c. Ibid. § 5.

5.

Dati ſegmenti centrum reperire. Ibid. propoſ. 25.

6.

Datas rectas quotcunque (quarum tamen maxima ſit minor, quam ea, ad cuius ſimilitudinem ſecandæ ſunt) ſimul ſimiliter, ac altera ſecta eſt ſecare. Ibidem propoſit. 31. § 3. numero 1.

7.

Inuenire loca, per quæ motus oculus datam magnitudinē videat auctam, vel imminutam in lubita proportione. Ibid. prop. 33 ſub § 4.

8.

Poſitis duabus lineis, poſſibile eſt vni ipſarum linearum aliam adiungere ita, vt illud, quod ſit ex ductu totius lineæ cum adiuncta in adiunctam, æquale ſit quadrato reliquæ datarū. Ib. pr. 36. § 4.

9.

Circa duo triangula communem baſim habentia, & angulos ad vertices æquales circulum deſcribere. lib. 4. propoſ. 5. § 3.

10.

Circa quadrilaterum, cuius duo anguli oppoſiti ſint æquales duabus rectis circulum deſcribere. Ib. pr. 9. § 3.

11.

Probl. 10 lib. 4 ex circino proportionū facillimè expedire. Ib. prop. 10. § 1.

12.

Super data recta è circino proportionum pentagonum regulare facillimè excitare. Ib. propoſ. 14, § 1.

13.

Dato latere pentagoni regularis, inuenire in circino proportionum ſemidiametrum circuli pentagono circumſcribendi. Ib. § 2.

14.

Pentagonum regulare ſuper data excitare ope circi proportionum. Ib. § 3.

15.

Aliter, ac tertio ſuper data recta pentagonum regulare excitare. &c. Ibidem, § 4.

16.

Super data rectà hexagonum regulare excitare, circulo inſcribere, circumſcribere. &c. Ib prop. 15. § 1.

17.

Inuenire latera Hexagoni, Decagoni, Pentagoni eodem in circulo aliter, quàm Euclides. Ib. § 5.

18.

E ſectionibus ſemidiametri inuenire latera trianguli, quadrati, quinquanguli, ſexanguli, & decanguli regularium inſcribendorum in circulo, cuius ſemidiameter ſecatur. Ib. § 7.

19.

Circulum geometricè demonſtratiuè diuidere in grad. 360 ex propoſitionibus libri 4. Ib. in Appen. § 1.

20.

Chordas arcuum diuiſi quadrantis, vel ſemicirculi traducere in vnam rectā lineam. ibid. § 2.

21.

Data ſemidiametro, ſtatim latera omnia figurarum regularium inuenire Exem-

Exempla aliqua extra vſitatiſſima. Ibid.§ 4.

22.

Problemata ex theorematibus libri 2. propoſ. 5. § 12.

23.

Problemata itē ex theorematibus lib. 2. præſertim ex 4, & 5 prop. in numeris. Modi varij ex imparibus numeris radices quadratas inueniendi. lib. 2 prop. 5. § 13.

24.

Problemata eximia de proportionalitate arithmetica in numeris, & lineis indicata. Singularia etiam in numeris circa proportionalitates harmonicas, & Geometricas comparatas cum arithmeticà, ex hac 5 propoſitione elem. hu. li. 2. Ib.§ 13.

25.

Medium numerum, & med. lin. in arithm. proportion. inuenire. lib. 4. § 14. num. 6.

26.

Tertium num. & tert. lin. in arithmet. proport. inuenire. Ib. nu. 6.

27.

Problematis eximij, ac vniuerſalis ex hac 14 propoſ. indicata ſolutio. lib. 2. propoſ. 14, § 19.

Vide & inter Corollaria, & Praxes, & Paradoxa, & Scholia.

INDEX SEPTIMVS

Corollariorum de planis.

IN TOMO SECVNDO.

1.

Triangula, & parallelogramma eandem, vel æquales baſes habentia inter ſe ſunt vt altitudines Propoſ. 1, lib. 6 § 2.

2.

De triangulis inter hyperbolen, & aſymptoton inter ſe æqualibus. Ibidem. § 5.

3.

Figurarum comparatas quātitates noſſe, figuras augere, imminuere in data proportione ex Euclid. Propoſitio. 1. § 8.

4.

In triangulo parallela vni laterum aufert triangulum ſimile. Propoſ. 4. § 1.

5.

Omnia triangula æquilatera, & iſoſcelia rectangula ſunt ſimilia. Propoſit. 4, § 2.

6.

Dato triangulo minus, vel maius ſimile ſtatim conſtituere. Propoſ. 4. § 3.

7.

Triangula in infinitum diuiſibilia. Propoſ. 4. § 5.

8.

Etiam lineæ in infinitū diuiſibiles. Propoſ. 4. § 5.

9.

In omni rectilineo per parallelas fit ablatio, & conſtitutio ſimilis rectilinei. Propoſ. 4. § 7.

10.

Corollar. propugnatorinm abſtractionis, & philoſophationis Geometricæ. Propoſ. 4. § 27.

11.
De rerum extra poſitarum quantitate metienda è ſimulacris intra obſcurum cubiculum per foramen feneſtræ traiectis. &c. Propoſ.4.§ 31.

12.
Coroll.ad vſus infinitos in Stereomet.& Machinaria. Propoſ.4. poſt § 41.

13.
In triangulo, ductâ vni laterum parallelâ, imperatam partem ex omnibus trianguli lateribus auferre. Propoſit. 9.§ 2.

14.
Datum arcum cicrcularem in lubitas æquales partes diuidere. Propoſit. 9. § 12.

15.
Datum angulum rectilineum in lubitas, ac æquales partes diuidere. Propoſ.9.§ 12.

16.
De inſcriptione cuiuslibet regularis figuræ in circulo. Propoſ.9.§ 14.

17.
Dati ex eadē ſemidiametro arcus quam inter ſe proportionem habeant. Propoſ.9.§ 16,& in circino proport.ibid.

18.
Datus arcus quot gratus contineat propoſit.9. § 17, & in circino proportionum. Ibid.

19.
Compendium è 10 prop.Eucl. lib.6 pro expeditiſſima Harmonicà, Gnomonicà, ſiue horarià, & quacumq; alia linearum diuiſione.

20.
Lineæ ſpiralis in plano deſcriptiones per lineas in eadem proportione cōtinuatas. Propoſ.14 § 4.

21.
Linea in infinitum diuiſibilis. Propoſ. 12.§ 18.

22.
De ſectione datæ lineæ in lubitas partes continuè proportionales. Propoſ. 13.§ 12.de duab. med. propoit.

23.
Linea in infinitum eſt diuiſibilis, hoc eſt non conſtat ex indiuiſibilibus. Propoſ.15 § 2.

24.
Propoſitio 16, & eius conuerſa etiam ad triangula rectangula traductæ. Propoſ.16.§ 1.

25.
Corollarium,in quo Praxis è 16 propoſ. ac vſus geometricus aureæ arithmeticæ regulæ in circulo. Prop. 16.§ 4.

26.
Propoſ.17, & eius conuerſa etiam ad triangula traductæ. Propoſ. 17.§ 1.

27.
Ampliatio propoſition. 16, & 17 apud Eucl.Propoſ.17.§ 2.

28.
Datis duobus rectilineis ſimilibus, quā inter ſe proportionem habeant ſtatim, ac facillimè inuenire in circino proportionum. Propoſ.20.§ 1.

29.
Datum rectilineum diuidere in partes æquales per lineas duo latera contigua ſecantes,& reliquis lateribus parallelas; ſeruatà figuræ ſimilitudine. Propoſ.20.§ 2.

30.
Datum rectilineum augere, vel imminuere in data proportione,ſeruatà figuræ ſimilitudine. Propoſ.20. § 4.

31.
Dato rectilineo ſimile, ſimiliterq; poſitum in datà proportione conſtituere. Propoſ.20.§ 5.

32.
Propoſ. 2 lib. 12. Eucl. demonſtrata ex Theor.in § 8 ad Propoſ. 20.§ 9.

33.
Semicirculi, quadrantes, &c. circulorum habent inter ſe duplicatà proportionem ſemidiametrorum. Propoſ.20.§ 10.

34.
Corollarium vniuerſale ad 2 prop. lib. 12.Eucl.Propoſ.20.§ 13.

Eu-

35.
Euclidis 13 propoſ. lib. 12 ex theoremate in § 18 ad propoſ. 20 demonſtrata. Propoſ.20 § 19.

36.
Sphæræ inter ſe ſunt vt à diametris cubi. Propoſ.30. § 20.

37.
Dimenſiones faciliimæ ſolidorū ex ad prop 20 ante § 21 dictis, Auctiones, &c. Propoſ. 20. § 21.

38.
De phyſica demonſtratione è ſonis, & ponderantijs pro circulorum, & ſimilium planorum duplicatà, & ſphærarum à diametris, & ſimilium aliquorum ſolidorum ab homologis lateribus triplicata proportione. Propoſit. 20. § 23.

39.
In delineatione geometrica oppidi procul diſſiti agnoſcere veras menſuras mæniorum, turrium, & areæ totius oppidi prototypi, ad vſus magni momenti militares. Propoſ.20. § 27.

40.
Corollaria, & paradoxa eximia vniuerſalia Aſtronomica indicata de cælorum, & cæleſtium ſphærarum inter ſe, & cum terra proportionibus. &c. Ex dictis ad 20 propoſ. de duplicata, & triplicata, &c. Propoſ.20.§ 28.

41.
Aliter tertiò demonſtrare etiam ex 23 propoſitione quadratum, cuius latus ſit duplum lateris alterius quadrati, eſſe quadruplum alterius. Propoſ.23. § 8.

42.
Omnes figuræ regulares habentes latera numeri paris oppoſita parallela, habent inter ſe proportionē ex lateribus compoſitam. Propoſ.23.§ 9.

43.
Parallelogramma inter ſe proportionē habent compoſitam ex proportione baſium, & proportione altitudinum. Propoſ.23.§ 14.

44.
Triangula inter ſe proportionem habēt compoſitam ex proportione baſium, & proportione altitudinum. Propoſ. 23.§ 15.

45.
Omnis conus tertia pars eſt cylindri eandem cum ipſo baſim habentis, & altitudinem æqualem. Prop.23. § 19.

46.
Corollaria Geometrica ex 24 propoſit lib.6 Euclid. Propoſitio 24.§.1.

47.
Duobus datis rectilineis medium proportionale conſtituere. Prop.24. § 4.

48.
Ex data linea triangulum laterum proportionalium cōſtruere. Prop.28.§ 4.

49.
De duabus intermedijs proportionalibus. Propoſ.28.

50.
Semidiametri ellipſeos, atq; etiam circuli diameter in vnam rectam iunctæ, & ſub angulo recto motę deſcribunt quartas ellipticas, & circulares. Propoſ.28 § 23.

51.
Lamellam ſemiellipticam conſtruere, conſtruendo tubo elliptico ad plura, in primis mirificè conducenti auditionibus. Propoſ.28.§ 26.

52.
Ad Architecturam, & Machinariam. Propoſ.28. § 28.

53.
Vſus eximij deſcriptionis linearum hyperbolicæ, ac circularis in diaphano pupillari, & pro linea infinita vſtoria. Propoſ.29.§ 9.

54.
Gemina demonſtratio ſine conicis de aſymptoto hyperbolà ad rectā. Propoſ.29.§ 14.

55.
De vehementiſſima vſtione non ſolum ad punctum, ſed etiam per lineam infinitam, &c. Propoſ.29 § 22.

56.
Rectæ lineæ ſectæ extrema, & media ratione ſunt omnes in eadem proportione. Propoſ. 30. § 3.

57.
Datæ rectæ duas extremas proportionales adinuenire. Propoſ. 30. § 12.

IN TOMO TERTIO.

1.
Archimedes vindicatus à calumnia ex ignorantia 4. definitionis. lib. 5. § 5.

2.
Quantitatis finitæ cum infinita non eſt proportio; & patefacti paralogiſmi Geometrici. Ibid. § 6.

3.
Infiniti ad infinitum non eſt proportio, iuxta 4 defin. ibid. § 7.

4.
Corollaria ad propoſ. aliquas lib. 7. Element. ex expoſitis in lib. 5. ibid. propoſit. 25.

5.
Corollaria, & vſus varij definit. 11 indicati. lib. 3. defin. 11, § 3.

6.
Natura in grauiũ motibus vtitur 1 propoſ. lib. 3. Ariſtoteles elucidatus. &c. Ibidem. Propoſitio 1. § 2.

7.
Ad Archimedem de Æquipond. Ibidem § 7.

8.
Corollaria ex propoſ. 27 Ibidem. prop. 27. § 2.

9.
Corollarium de angulo recto, qui inſiſtit quadranti, & Praxis normæ examinandæ. Ibid. Prop. 27. § 4.

10.
Corollaria, & Problemata geometrica de ſectione rectarum in proportione datæ ſectæ. Ibid. Prop. 31 § 3.

11.
Si duæ rectæ mutuò ita ſecent ſe, vt earum ſigmenta ſint reciprocè proportionalia, circulus ibit per earum extrema, prop. 35. § 3.

12.
In quouis triangulo ex tribus angulis ſi demittantur perpendiculares in latera oppoſita, ſeſe mutuò ſecabunt in eodem puncto. Ibid. prop. 36 § 6. Ibid. Poſt § 7.

13.
De quadraturis ſuperficierum cylindricæ, ſphæricæ, & triangulorũ ſphæricorum. Ibidem poſt propoſit. 37. § 3.

14.
Super data recta quadratum excitare ope circini proportionum facilius, quàm per 46 lib. 1. Lib. 4. propoſit. 9. § 2.

35.
Dato latere pentagoni regularis, inuenire in circino proportionum ſemidiametrum circuli pentagono circũſcribendi. Ibid. Propoſ. 14. § 2.

36.
Super datã quintidecangulum excitare. Ibid. prop. 16. § 3.

37.
Corollarium ad vſus Aſtronomicos. Ib. in Append. § 3.

38.
Corollarium 1 vniuerſale de circumſcriptione circuli circa datam quamlibet regularem figuram. Ibidem. § 5.

39.
Corollarium 2 vniuerſale in gratiam militarium virorum. Super data qualibet recta quamlibet regularem figuram excitare. Ib. § 6.

40.
Corollaria geometrica. lib. 2. propoſ. 4 poſt § 10.

Co-

41.
Corollaria eximia de proportionalitate arithmetica in numeris, & lineis indicata. Ib. prop. 14, § 2.

42.
Elementares aliquas propoſitiones de ſolidis ampliantia. Epil. ſub Schol. 4, § 33.

Vide, & inter problemata, Theoremata, Paradoxa, & Scholia.

INDEX OCTAVVS

Vſuum, & Applicationum in planis, & ſolidis.

IN TOMO SECVNDO.

1.
VSus, & Applicatio Defin. ſecundæ lib. 6. Eucl. pro theorica Stateræ, ac libræ in commercijs, & & iuſtitia commutatiua. Defin. 2. § 2.

2.
Vſus Propoſit. 1 lib. 6 in Geodeſia pro figurarum planarum, & agrorum diuiſionibus in data proportione. Propoſ. 1. § 10.

3.
Vſus Prop 2. li. 6 Eucl. in dimenſionibus longitudinum inacceſſarum. Propoſit. 2. § 3.

4.
Vſus, & praxis inſueta diuidendi datum angulũ in duos æquales. Propoſ. 3 § 1.

5.
Vſus propoſ. 4 li. 6 & corollar. ex ea in operationibus Geometriæ practicæ. Prop. 4. § 13.

6.
Vſus propoſ. 8 lib. 6. & Corollarij ex ea pro facillima inuentione tertiæ, quartæ, mediæ, ac duarum etiam mediarum linearum proportionaliũ. Propoſ. 8. § 1.

7.
Vſus propoſit. 9. lib. 6. Euclidis in Geometria practica pro inacceſſis diſtantijs, altitudinibus, profunditatibus metiendis. Propoſ. 9. § 3.

8.
Vſus, & praxis 11 prop. Eucl. ex circino proportionum pro vniuerſæ Muſicæ practicę practico compendio in vnicæ lineæ varijs partibus auferendis, ſeu ſignandis, &c. & pro modo attẽperandi harmonicè fidium inſtrumenta ope circini, &c. Propoſ. 9. § 8.

9.
Vſus tertiæ proportionalis ad ſectiones conicas, ad horaria, ad ſpecula vſtoria, ad aſymptotos, ideſt lineas inter ſe magis, ac magis accedentes, nunquam ſe contingentes, &c. Propoſit. 11. § 8.

10.
Vſus quartæ proportionalis in Geometria practica. Propoſ. 12. § 17.

11.
In Geom. ſpeculatiua vſus med. proport. pro diuiſionibus, &c. figurarũ. Propoſ. 13. poſt § 12.

12.
Item in Geometriâ ſpeculatiuâ vſus mediæ proportionalis pro transformationibus, & quadrationibus difficillimorum curuilineorum. Propoſ. 13. Ibid.

13.
In pictura optica vſus inſignis mediæ pro-

portionalis. Propoſ. 13. Ibidem.

14.

Vſus mediæ proportionalis pro deſcriptione ſectionis conicæ hyperbolicæ, & pro exhibitione aſymptoton, ideſt linearum rectarum cum linea hyperbolica concurrentium, & in infinitum ſemper inter ſe accedentium, nunquam tamen ſe contingentium. Prop. 13. Ibid.

15.

Vſus mediæ proportionalis pro catoptricis in deſcriptione ſectionis Parabolicæ ad conficienda vſtoria mirifica ſpecula. Propoſ. 13 Ibid.

16.

In Geometria practica vſus mediæ proportionalis pro dimenſione vniuerſi rerratum Orbis, altitudinum, profunditatum, diſtantiarum inacceſſarum, &c. Propoſ. 13. Ibid.

17.

In Gnomonicis vſus med. proporc. pro varijs vſibus circa Stylos horariorũ. Propoſit. 13. Ibid.

18.

Vſus theorematum aliquorum de cylindrorum ſuperficiebus, in re vaſaria pro liquidis &c. Propoſ. 14. § 7.

19.

Vſus, & applicatio 14 propoſ. lib. 6 ad ſolutionem eximij theorematis circa diuiſionem arithmeticam, Propoſit. 14. § 9.

20.

Vſus theorem. de conicis ſuperficiebus, in re vaſaria pro liquoribus. &c. Propoſit. 15. § 5.

21.

Vſus 16 propoſ. lib. 6, & praxis inuentionis quartæ lineæ proportionalis in circulo pro praxibus vniuerſæ Geometriæ practicæ. Propoſ. 16. § 3.

22.

Vſus 17 propoſ. apud Euclid. pro inueniendа in numeris, ſiue per numeros, media proportionali, &c. Propoſit. 17. § 8.

23.

Vſus propoſ. 18. li. 6 in Pictura ſcientifitificà. Propoſ. 18. § 4.

24.

Vſus, ac theorice organicæ picturæ in eodem plano è 18 propoſitione lib. 6 Euclidis. Propoſ. 18, § 5.

25.

Vſus militares, Muſici, Machinatij, Optici, ſeu Pictorij, Geometrici, Aſtronomici è 20 Propoſ. lib. 6 Eucl. Propoſ 20. § 1.

26.

Dato prototypo etiam procul poſito, & inacceſſo ſimilem imaginem in data proportione delineare. Prop. 20. § 4.

27.

Aliter, ac facilius idem problema pictorium abſoluere ex 20 propoſitione quando prototypum, & imago delineanda ſunt in eodē plano. Propoſit. 20. § 25.

28.

Vſus Geometrici, Corollaria, Ampliationes propoſitionis 23. lib. 6. Propoſit. 23. § 9.

29.

Vſus propopoſ. 24 lib. 6 in praxi, & demonſtratione ſciẽtificæ picturę. Propoſ. 24. § 3.

30.

Vſus propoſ. 25 lib. 6 in conſtituendis rectilineis proportionalibus. Propoſ. 25. § 10.

31.

Vſus propoſ. 28 lib. 6 in problemate pulcherrimo, Datã rectam lineam in tres partes proport. diuidere. Ib. § 1.

32.

Vſus 28 propoſ. in ſectione conicà elliptica, ſiue deficiente applicatione, &c. Propoſ. 28. § 9.

33.

Vſus prop. 28 pro inuentione geometricà gemini puncti ex applicatione, ſiue comparatione in ellipſis maiore axe, ad eorum punctorum vſus præclaros. Propoſ. 28. § 18.

De

34.
De Geometrica applicatione cum exceſſu, quæ ὑπερβολὴ. Id nomen inditum conicę ſectioni ab vſu 29 propoſ. lib. 6. Ibid. § 1.

35.
Vſus multiplices, atque ampliſſimi, ac miræ affectiones lineæ ſectæ ſecundum mediam, & extremam proportionem indicati. Propoſ. 30. § 13.

IN TOMO TERTIO.

1.
Vſus Coſmographicus definit. 11 in dimenſione terreni ambitus. lib. 3. defin. 11. § 4.

2.
Vſus ſingularis transformationis parallelepipedi in cubum, pro vaſe parádo liquidis, &c. problem. 37, ſect. 2, Breu. Stereom.

3.
Vſus aliqui militares prædictorum de auctionibus, & imminutionibus ſolidorum indicati. Ibid. § 7.

4.
Vſus, & Praxis 8 propoſit. in inuentione per chordam ſemidiametri oris putealis. Ibid. prop. 8. Schol.

5.
Vſus 9 Propoſ. in inuentione poli dati circuli iuxta inuentionem centri, ad ſtyli perpendicularem erectionem. Ibid. prop. 9. Schol.

6.
Vſus opticus propoſitionis 15. lib. 3. Ib. prop. 16. § 2.

7.
Vſus propoſit. 20 in demonſtratione praxis, qua vnicà circini diductione horarium conſtruitur. Ibid. propoſ. 20. § 1.

8.
Vſus propoſit. 20 in paradoxis opticis. Ibid. § 3.

9.
Vſus propoſit. 21 in inſtrumento ad arcus quantumuis maximos ducendos ſine centro, pro varijs operationibus Aſtrolabicis, Gnomonicis, &c. Ibid. prop. 21. § 1.

10.
Vſus propoſ. 21 in Geom. practicà. Ibidem § 2.

11.
Vſus opticus. Ibid. § 3.

12.
Vſus Geometrici prop. 24. circa curuilinea. Schol. prop. 24.

13.
Vſus varij propoſ. 25. Ibid. § 2.

14.
Vſus opticus propoſ. 27. Ib. § 3.

15.
Vſus opticus propoſ. 31. Ib. Prop. 31 § 1.

16.
Vſus varij apud nos Propoſitionis 31. Ibid. § 4.

17.
Vſus Aſtronomicus propoſit. 33. Ibid. propoſ. 32. § 1.

18.
Vſus geometricus propoſ. 32 in theoremate pro ſectione rectarum in eàdem proportione. Ibid. § 2.

19.
Vſus opticus paradoxicus propoſit. 33. Ibid. propoſ. 33. § 2.

20.
Vſus alter opticus paradoxicus propoſ. 33. Ib. § 3.

21.
Vſus opticus paradoxicus tertius, propoſ. 33. Ib. § 4.

22.
Vſus circuli ex 35 propoſition. in Geometria ſpeculatiuà, & practicà, & in Arithmeticà. Ibid. prop. 35. § 2.

23.
Vſus propoſ. 36 pro dimenſione totius ter-

terrarum Orbis. Ibid.prop.36.§ 2.

24.
Vſus alij propoſ.36.Ibid.§ 3.

25.
Vſus Aſtronomicus corollarij propoſ. 15, nempe Planetarum à Terra diſtantias agnoſcere. Lib. 4, propoſit. 15, § 2.

26.
Vſus Catoptricus, hoc eſt punctum viſionis phyſicæ è ſpærico ſpeculo inuenire ope 15 propoſit. lib. 4. Ibidem § 3..

27.
Vſus Aſtrologicus, hoc eſt Planetarum aſpectus, ac Lunæ phaſes pro influxibus iuxta latera figurarum regularium ex præcedentibus proportionibus in circulo inſcriptarum. lib. 4. propoſ.15, § 2.

28.
Vſus harmonicus inſcriptarum ex præcedentibus propoſitionibus circulo figuratum, atque in primis Harmoniæ cæleſtium circulationum à Planetis ſub Zodiaco ſignatarum veſtigia prodere. Ibid.§ 9.

29.
Vſus Aſtronomicus propoſ.16.li.4.cum opportunitate noſtræ methodi. Ibid. Propoſ.16.§ 1.

30.
Vſus Aſtronomicus. Ibid.prop. 16, § 1.

31.
Vſus 4 elementi pro figuris ſolidis. § 7.

32.
Vſus 4 Prop.li.2 Eucl., p inuētione quadratorum numerorum, & radicum ex imparibus numeris.&c. lib.2.propoſ.4, § 8.

33.
Vſus propoſit. 4 pro demonſtratione Geometricà extractionis radicū quadratarum. Ib.§ 9.

34.
Vſus 4 prop. in ſolutione theorematis eximij. Ib.§ 10.

35.
Vſus ampliſſimus propoſitionum 12,& 13 in vniuerſa Geometrià practicà. Compendia a nobis organica;& alij vſus. Ib.prop.12, 13, § 16.

36.
Vſus prop.14 lib.2.pro vniuerſa geometria ſpeculatiua, & practica. Ib. § 17.

37.
Vſus Primæ definitionis lib. 2.indicati. § 2, Schol.3.

38.
Vſus logiſticus propoſitionum libri 2. § 4. Schol. 6.

39.
Vſus algebraticus propoſ.4, lib.2.§ 6.

INDEX NONVS

Praxeon in planis, & ſolidis.

IN TOMO SECVNDO.

1.
PRaxis Definitionis ſecundæ lib.6. in æquiponderantijs Philoſophiæ Machinariæ. Definit.2.§ 1.

2.
Praxis à data circulari linea imperatam partem auferedi. Exemplum in ablatione ſeptimæ partis, ſiue in ſeptiſanatione dati arcus. Propoſ.9 § 10.

3.
Praxis altera perfacilis, ſine ſemicirculis, continuandi lineas in eadem propor-

portione ad minores terminos. Propoſ.12.§ 3.

4.

Praxis duabus datis mediā proportionalē inueniendi, demonſtrata partim ex prop.17 lib.6 apud Eucl.Prop 17.§ 3.

5.

Duabus mediam, &c. cum demonſtratione ex 17. Propoſ.17.§ 4.

6.

Duabus tertiam proportionalem. &c. demonſtrata partim ex 17 propoſit. lib.6.§ 5.

7.

Conuerſam propoſit.13 lib. 6 apud Euclidem exhibere; hoc eſt: Datæ rectæ lineæ duas extremas proportionales adinuenire, ac deſcribere. Propoſ.17.§ 6.

8.

Vſus, & Praxis militaris propoſ. 18. in circino proportionum. Prop. 18. § 2.

9.

Praxis geometrica pro inueniendā proportione compoſita innuitur in conſtructione, qua vtitur Euclid. dum demonſtrat 23 propoſit.lib.6. Additis à nobis duabus alijs praxibus arithmeticis. Propoſit.23.§ 3.

10.

Dato rectilineo ęqualem circulum exhibere. Propoſ.25.§ 3.

11.

Dato circulo æquale rectilineum conſtituere. Propoſ.25.§ 5.

12.

Datæ ellipſi æqualem circulum exhibere. Propoſ.25.§ 7.

13.

Dato circulo æqualem ellipſim exhibere. Propoſ.25.§ 8.

14.

Datis ellipſeos diametris, latus rectum, ſiue lineam inuenire, ad quam facienda eſt applicatio cum deficientia, &c. Propoſ.28.§ 6.

15.

Datis ellipſeos vtraq; diametro, latus rectum, ſiue lineam applicationis cum deficientia inuenire. Propoſ.28.§ 7.

16.

Datis diametro, & linea applicationis deficientis, ſiue latere recto, deſcribere ellipticam figuram per puncta. Propoſ.28.§ 10.

17.

Data vtralibet diametro, ellipſen deſcribere. Propoſ.28.§ 11.

18.

Datis diametro, & latere recto, ellipſim deſcribere. Propoſ. 28.§ 12.

19.

Data diametro maiore, deſcribere ellipſim. Propoſ.28.§ 13.

20.

Data diametro minore, ellipſim deſcribere. Propoſ.28. § 14.

21.

Praxis facillimè per mutuas ſectiones rectarum ellipſim deſcribendi, vnà cum indicata demōſtratione. Prop.28.§ 17.

22.

Altera praxis geometrica inueniendi eadem gemina puncta applicationis in maiore diametro ellipſis. Prop.28.§ 19.

23.

Praxis geometricè organica facillimo inſtrumento deſcribendi ellipticas ſimul, & circulares lineas, datis earum diametris. Propoſ.28.§ 22.

24.

Super data recta linea aliter eodem regulæ motu ellipſim, & circulum ſe contingētes deſcribere. Prop.28 § 29.

25.

Lineam applicationis excedentis datæ hyperboles facillimè inuenire. Propoſ.29.§ 2.

26.

Vſus propoſit. 29 libri 6 in rectangulorum applicatione hyperbolicā, ſiue excedente, &c. Propoſ.29.§ 3.

27.

Data linea applicationis cum exceſſu, & latere tranſuerſo, hyperbolen deſcribere. Propoſ.29.§ 4.

Mm Pra-

28.
Praxis 4 organica, & Vſus puncti applicationis excedentis, in primis pro praxi deſcribendæ hyperboles gemino filo, ad plura, &c. Propoſit. 29. § 7. & aliter. § 11.

29.
Eodem regulæ motu hyperbolicam, & circularem lineas deſcribere. Propoſit. 29. § 8.

30.
Lineam iuſtæ applicationis, ſiue latus rectum vel datæ, vel deſcribendæ paraboles inuenire. Propoſ. 29. § 18.

31.
Datâ lineâ iuſtæ applicationis, parabolen deſcribere. Propoſ. 29. § 19.

32.
Inuenire focum, ſiue punctum vſtorium, ſiue ad quod vnum reflectuntur rectæ omnes axi æquidiſtantes in parabolen incidentes. Propoſ. 29. § 21.

33.
Praxis 5, & organica deſcribendæ paraboles ex puncto applicationis, &c. ſeu foco, &c. Proopoſ. 29. § 24.

34.
Deſcribere geometrice parabolen. Propoſ. 29 § 27.

IN TOMO TERTIO.

35.
Praxis normæ examinandæ. Lib. 3. propoſ. 27. § 4.

36.
Praxis organica inueniendi cētrum grauitatis ſemiperipheriæ. Breuiar. ſec. 2. coroll. 4. poſt probl. 17.

INDEX DECIMVS

Paradoxorum in planis, & ſolidis.

IN TOMO SECVNDO.

1.
De finito etiam minimo non ſolum æquali, ſed etiam multipliciter maiore, quàm ſit quantum aliquod extēſione infinitum. Prop. 1. § 4.

2.
Etiam per non parallelam vni laterum trianguli auferre triangulum ſimile, &c. Propoſ. 4. § 4.

3.
Paradoxum, & vſus 4 propoſit. lib. 6, & corollarij apud nos 1 ex ea, pro inuētione linearum tertiæ, & quartæ proportionalium in circino proportionū. Propoſ. 4. § 10.

4.
Inacceſſas altitudines, & latitudines per innacceſſas longitudines, & per vnicam menſoris ſtationem facillimè dimetiri. Propoſ. 4. § 1.

5.
Datis duabus rectis lineis, media, & minore extrema, maiorem extremam in Harmonica Proportionalitate inuenire per analogiam ad Geometricam. Propoſ. 13. § 3. de med. &c. harmon.

Pa-

6.
Paradoxum in Praxi, (firmatâ partim ex 16 propoſ.lib. 6) tribus datis rectis lineis quartam proportionalem inueniendi è lib.13 Eucl.Propoſ.16.§ 2.
7.
Paradoxum de tribus rectis lineis inter ſe proportionalibus, quarum mediæ quadratum non eſt æquale rectangulo ſub extremis,contra propoſ. 17.lib. 6. Propoſ.17.§ 18.
8.
Praxis propoſ.18 lib. 6 geometricè expeditior fit ab Aranea in Apiarijs noſtris geometrizante. Propoſ.18.§ 3.
9.
Paradoxũ contra 20 propoſ. ſolutum de rectilineis cylogonijs,quæ non videntur habere inter ſe proportionem duplicatam homologorum laterum. Atque inde alia paradoxa ſoluta. Propoſ.20.§ 16.
10.
Rectilinea, & circuli, quorum proportio duplicata laterum, vel diametrorum cognita eſt, ac neſcitur. Et alia paradoxa. Propoſ.20. § 17.
11.
Solidi, ſphæræ, vel parallelip. propter molem, vel nimiam grauitationem imponderabilis, occultam grauitatem geometricè, ſine Mechanicâ ponderatione, prodere ex 20.propoſ. lib. 6. ibid.§ 22.
12.
Super quattuor rectis lineis proportionalibus quattuor rectilinea inter ſe proportionalia ſunt, & tamen inter ſe non ſimilia. Cum vſu in Muſicis, & in Ponderoſis. Propoſ.22.§ 6.
13.
Rectilinea plurilatera non parallelogrammata, quæ habent inter ſe proportionem ex lateribus compoſitam. Propoſ.23.§ 10.
14.
Triangula habentia vnum vni æqualem angulum,habent proportionem compoſitam ex lateribus circa ęquales angulos. Propoſ.23.§ 13.

IN TOMO TERTIO.

15.
Paradoxa, & admiranda 16 propoſitionis, & corollarij ex ea. Libr.3. propoſ.16, § 1.
16.
Paradoxum ſingulare ex angulo contactus, quo fit vt angulus rectus ad acutum non habeat maiorem proportionem, quàm angulus ſemicirculi. &c. Nulla itẽ proportio anguli acuti cum angulo ſemicirculi. Ibid. § 2.
17.
Pluriformes anguli contactus, & aſymptoton miracula,etiam duarum rectarum linearum ſemper inter ſe accedentium, nec vnquam ſe contingentium, ab angulo contactûs. Ibid.§ 3.
18.
Ex verbis propoſitionis 16 patent cauſæ paradoxorum anguli cõtactûs. Ib. § 5.
19.
Lux paradoxis aliquibus angulorum in Apiarijs philoſophiæ Mathematicæ. Ibid.§ 10.
20.
Eſt aliquis locus,vbi aſpectabili manente, oculo verò translato, aſpectabile ſemper æquale videtur. Ibid. propoſit. 21.ſub § 3.
21.
Eſt locus,vbi manente oculo,res ſpectata è loco in locum mutata, æqualis ſemper apparet.Ibid.prop. 27. ſub § 3.
22.
Datis duabus magnitudinibus inæqualibus vnam tertiam componẽtibus, quis loca inueniat, vnde ſpectatæ nunc ſingulæ, nũc ſimul iunctæ, ſemper tamen ap-

appareant æquales magnitudines? Ib. prop. 31 ſub § 1.

23.

Paradoxa de angulis ſegmentorum circuli. Extrema iuxta ſe poſita. Tranſitus ab extremo ad extremum ſine medio in angulis, & lineis. Ibid. § 6.

24.

Eſt aliquis locus communis, vnde æquales magnitudines inæquales appareāt. Ibid. prop. 33 ſub § 2.

25.

Eſt aliquis locus communis, vnde inæquales magnitudines æquales apparent. Ibid. ſub § 3.

26.

Inuenire loca, per quæ motus oculus datam magnitudinem videat auctam, vel imminutam in ſubita proportione. Ibid. ſub § 4.

27.

Punctum æquale ſuperficiei infinite. Breuiar. Sectio. 3. § 28.

28.

Paradoxa, & problemata ex theorematibus lib. 2 præſertim ex 4, & 5 prop. in numeris. Modi varij ex imparibus numeris radices quadratas inueniendi ex eiſd. propoſ. lib. 2. propoſ. 5, § 13.

Vide, & inter Theoremata, Problemata, Corollaria, & Scholia.

INDEX VNDECIMVS

Lemmatum in planis, & ſolidis.

IN TOMO SECVNDO.

1.

Datis quotcunque rectis lineis, vel angulis, vel arcubus, quam inter ſe proportionem habeant ilicò agnoſcere in circino proportionum. Propoſ. 1. § 6.

2.

In triangulo quouis ſi vni laterum parallela recta agatur, & ex quocunq; puncto illius lateris ad angulum oppoſitum recta educatur linea, diuidētur linea parallela, & latus illud in eaſdem rationes. Propoſ. 10. § 8.

3.

Si ſint quotcumque magnitudines, & quæ eſt media proport. inter minimā, & maximam, ea ſit quoque media inter reliquas, illæ magnitudines erunt proportionales ponendo minimam, & maximam extremas. Propoſit. 12. § 6.

4.

Si ſint quotcunq; magnitudines continuè proportionales, & aliæ quædam in eadem ratione, ſitq; vna aliqua poſteriorum media inter duas quaslibet priorum, etiam reliquæ poſteriores eodem ordine erūt mediæ inter reliquas priores. Propoſ. 12. § 7.

5.

Ex harmonica Geometricam Proportionalitatem procreare. Propoſ. 13. § 2. de med. proport. harmon.

6.

Lemma demonſtratum ex nouo vſu centri grauitatis: Conorum rectorum, ac inæqualium altitudinum, quorum latera ſunt æqualia, ſuperficies ſine baſibus, ſunt inter ſe, vt baſium ſemidiametri. Propoſ. 15. § 4.

Da-

7.
Datæ rectæ lineæ aliã adiungere in data proportione per circinũ proportionũ. Prop.23.§ 2.

8.
Si recta linea extrema, & media ratione ſecetur, apponaturq; ei linea æqualis maiori ſegmento, tunc & tota recta linea extrema, & media ratione ſecabitur, & maius ſegmentum erit ea, quæ in principio recta linea. Et è conuerſo, &c. Propoſ.30. § 4.

9.
Si Sexanguli, & decagoni eodem circulo inſcriptorum latera componantur, compoſita tota extrema, & media ratione ſecatur, & maius ſegmentum eſt ipſius ſexanguli latus, & è conuerſo, &c. Propoſ.30.§ 6.

10.
Si latus hexagoni ſecetur extrema, & media ratione, erit maius ſegmentum latus decagoni inſcribendi circulo, cuius ſemidiameter eſt latus hexagoni ſectum media, & extrema ratione. Propoſ.30.§ 7.

IN TOMO TERTIO.

11.
DE quadratis æqualibus à lateribus æqualibus, & æqualium quadratorum lateribus æqualibus. Lib. 3. Propoſ. 14, Schol.

12.
Vnius circuli vnicum tantum eſt centrum Ibid.prop.25 § 1.

13.
Latus pentagoni poteſt latera hexagoni, & decagoni in eodem circulo. Lib. 4. prop. 15, § 4.

14.
Circulum geometricè demõſtratiuè diuidere in gra. 360 ex propoſitionibus libri 4. Lib.4, Append.§ 1.

15.
Chordas arcuum diuiſi quadrantis, vel ſemicirculi traducere in vnam rectam lineam. Ib.§ 2.

16.
Peripheriæ inter ſe ſunt vt ſemidiametri, vel diametri. Epil. plan.§ 19.

17.
Si fuerint quatuor lineæ continuè proportionales, vt eſt quadratum ex prima ad quadratum ex ſecunda, ita ſecunda ad quartam. Breuiar. Stereom. ſec.2, ante probl.36.

Vide, & inter Problemata.

INDEX XII.

Poriſmatum.

IN TOMO SECVNDO.

1.
DAto puncto ellipſis nondum deſcriptæ, ac altera diametrorum, alteram diametrum inuenire. Propoſ.28.§ 24.

2.
Datis duobus rectilineis ſimilibus, inuenire facillimè quam inter ſe proportionem habeant, etiam ſine cognitione duplicatæ proportionis laterum homologorum iuxta 20 lib. 6. Prop. 31.§7.

IN

IN TOMO TERTIO.

3.

DAta ſemidiametro inuenire in circino proportionum latus trianguli æquilateri circulo inſcribẽdi. Lib.4.prop.2.§ 1.

4.

Data ſemidiametro, inuenire in circino proportionum latus quadrati circulo inſcribendi. Ib.prop.6 § 1.

5.

Dato latere quadrati, inuenire in circino proportionum ſemidiametrum circuli quadrato circumſcribendi. Ibidem propoſ.9.§ 1.

6.

Data ſemidiametro, inuenire in circino proportionum latus pentagoni regularis circulo inſcribendi. Ib.pr.11.§ 1.

7.

Dato latere pentagoni regularis inuenire in circino proportionum ſemidiametrum circuli pentagono circumſcribendi. Ib. prop.14.§ 2.

8.

Data ſemidiametro, inuenire in circino proportionum latus Quintidecanguli circulo inſcribendi, & dato latere quintidecanguli, inuenire ſemidiametrum circuli circumſcribendi. Ibid. propoſ. 16. § 2.

Vide, & inter Problemata.

INDEX XIII.

Scholiorum aliquot præcipuorum de planis, curuis, & ſolidis.

IN TOMO SECVNDO.

1.

DE rectangulis æqualibus reciprocis. Defin. 2.§ 3.

2.

Explicata, & aſſerta quinta definitio lib. 6.Defin.3.4.5.§ 5.

3.

Demonſtratio explicatoria, & confirmatoria Theorematis, ſiue Problematis per defin. 5 lib.6. ſignificati. Definit. 5.§ 2.

4.

Adiumenta praxi facilitandæ circa inuentionem compoſitæ proportionis aliter etiam à nobis definitæ. Definit. 5.§ 4.

5.

Nodus Geometricus circà veritatem 1. Propoſ.lib.6. ſolutus. Fallacia circa figurarum rectilinearum ſimilitudinẽ, ac Theoriæ nodi ad ſolutionem, & ad lucem pro 25 propoſitione lib.6. Propoſ.1.§ 1.

6.

Corollarij de triang. & parallelogr. vt altitudines alia demonſtrato geometrica

trica, præter Euclidem. Propoſ. 1. § 3.

7.

Aliter data rectilinea ſcire quam inter ſe proportioné habeant. Prop. 1 poſt § 7.

8.

De figuris rectilineis, præter triangula, & parallelogrammata augendis, minuendis in data proportione. De rectilineis proportionalibus. Prop. 1. § 9.

9.

De triangulis, & parallelogrammis incommenſurabilibus. Propoſ. 1. § 19.

10.

Veritas Euclidianæ 2 propoſ. lib. 6. etiam in curuis lineis circulorum parallelis, & non parallelis, proportionaliter ſecantibus latera triangulorum, & cæt. Propoſ. 2. § 1.

11.

Indicati vſur propoſ. 2. lib 6 pro inuentionibus linearum proportionalium tertiæ, & quartæ, atq; etiam plurium in eadem proportione. Prop. 2. § 2.

12.

Inaccessas profunditates, & altitudines metiri e 2 propoſit. lib. 6. Propoſit. 2. poſt § 3.

13.

Applicatio, & vſus indicatus 2 propoſ. lib. 6 Eucl. ad dimenſiones vmbrarum globi lunaris, & globi terreſtris Propoſ. 2. § 4.

14.

Circini proportionum demonſtratio è Propoſ. 4. § 8.

15.

Theoriæ, atq; cautiones circa demonſtrationem è 4 prop. lib. 6, ac vſum circini proportionum pro ea facie, in quam chordæ 90 graduum quadrantis translatæ ſunt. Propoſ. 4. § 9.

16.

De inuentione mediæ proportionalis in circino proportionum. Propoſ. 4. poſt § 11.

17.

Ampliata Euclidis praxis, & ad militaria traducta. Vegetius, & alij veteres Authores explicati. &c. Propoſ. 4. § 15.

18.

Vindicatio Aguilloni, & confirmatio factæ ab eo demonſtrationis indicata Tyronibus. Propoſit. 3. § 19.

19.

Pro praxibus aliquibus. Propoſitio 4. poſt § 24.

20.

Cõfirmatio hypotheſis catoptricæ apud Euclidem pro dimenſione per ſpecula e 4 propoſit. lib. 6. Propoſit. 4. poſt § 25.

21.

De cautionibus, & firmamentis dimenſionũ per Scaphia, & radios è feneſtræ foramine. Propoſ. 4. § 30.

22.

Aſtronomica plura problemata è 4. propoſ. lib. 6. Eucl. Propoſ. 4. § 32.

23.

Corollarium, & Scholion, in quibus è 4 propoſit. lib. 6. &c. indicatur theorice præcipuorum menſoriorum inſtrumentorum Geometricorum, & Aſtronomicorum. Propoſ. 4. § 33.

24.

Viſionis intra oculum arcana prodita è 4 propoſ. lib. 6 Propoſ. 4. § 35.

25.

Fallacia ſunt optica experimenta in oculo cadaueraceo (hoc eſt animalis mortui) etiam congiaciato, vel in oculo viuo, ſed morboſo, ideſt male affecto ab aliqua corporis ægritudine. Propoſ. 4. § 36.

26.

Demonſtratio praxis (in § 3 ad 12 primi) demittendi perpendicularem. Propoſ. 4. § 38.

27.

Proludium duabus medijs rectis lineis proportionalibus inueniendis inter duas datas. Propoſ. 8. poſt § 9.

28.

Scholia ad lucem, & cautionem geometricam. Propoſ. 8. § 12.

Me-

29.
Modus dimetiẽdi diſtantias in quodam problemate pro vitandis fallacijs aliter vſurpatus. Propoſ.8. § 15.

30.
Innacceſſas altitudines, & profunditates metiri è coroll.8 propoſ.libri 6, Prop. 8.§ 17.

31.
Aliter 9 propoſ. lib. 6. Eucl. exercere, ac demonſtrare per ductam parallelam diuidendæ. &c. Propoſ.9.§ 1.

32.
Remedium, & compendium pro lineis quibuſuis lungiſſimis in vſu circini proportionum. Propoſ.9.§.9.

33.
Circa alia exempla in ablatione tertiæ, quartæ &c. partis à dato arcu. Propoſ. 9.§ 11.

34.
Mixtæ lineæ punctuatæ ab antiquis, & doctioribus Philoſophis Geometricis iure ineptæ habitæ ſunt ſolutionibus problematum aliquorum geometricorum. Propoſ.9. § 15.

35.
De proportione arcuum ſimilium, & peripheriarum, & vſu circini proportionum. Propoſ.9.§ 18.

36.
Theorice, & inuentio, & vſus linearum in circino proportionũ prodit ab vſu 10 propoſ.lib.6, iuxta nos,&c.Propoſ. 10.§ 6.

37.
Lemmatica de ſpeciebus Proportionalitatum pro vſu 9, & 10 propoſ. lib. 6 in linearum partibus carpendis, ſiue lineis in partes trium præcipuarum Proportionalitatum diuidendis. Propoſ.10.§ 13.

38.
De datæ rectæ ſectione in data proportionalitate geometrica. Facilius, ac breuius, quam in antecedentibus Problematibus ſecare datas rectas in qualibet trium proportionalitatum. Pro Apiarijs aliqua. Propoſ.10.§ 16.

39.
Pro praxi organica problemat. aliq. animaduerſio. Propoſ.10. § 18.

40.
Vſus ampliſſimi propoſ. 10 indicati in vniuerſa Geometria,& Stereometria. Propoſ.10.§ 19.

41.
De diuiſione anguli vt alter diuiſus eſt. Propoſ.10.§ 21.

42.
Quantitatem Mathematicam eſſe in infinitum diuiſibilem eſt per ſe notum. Propoſ.10.§ 22.

43.
Ad facilitatem operationis pro demittẽdis perpendicularibus, &c. Propoſit. 12, poſt § 2.

44.
Demonſtratio praxis continuandi plures lineas in eadem proport. Propoſit. 12.§ 8.

45.
Scholia ad intelligentiam, & confirmationem demonſtrationis de continuatione plurium linearum in ead. proportione. Propoſ.12.§9.

46.
Propoſitio 13 lib. 6 tripliciter locale Poriſma eſt. Propoſ.13.§ 1.

47.
De duplici conuerſione apud nos Problematis: Duabus mediam, &c. Propoſit.13.§ 2.

48.
De vario, & multiplici vſu linearum mediarum proportionalium apud nos in omni genere Philoſophiæ Mathematicæ. Propoſ.13.§ 12.

49.
Ad faciliimam operationem aliquorum antecedentium problematũ. Propoſit. 13. poſt § 14.

50.
Euclides ab Apollonij reprehenſionibus vindicatus. Apollonius ipſe ab Antiquis reprehenſus, etiam prolato eius pa-

paralogiſmo in inuentione duarum mediarum proportionalium. Propoſ. 13.§ 1. de duab.med.proport.

51.

Duarum mediarum proportionalium inueniendarum occaſio, & vſus. Propoſ.13.§ 2. Ibid.

52.

De veterum molitionibus, & inuentis circa inuẽtionem duarum mediarum proportionalium. Recentiorum aliqua non diuerſa ab antiquis. Animaduerſio in Pappum noua, vel non prorſus vulgata è recentioribus, & à nobis. Propoſit 13.§ 3. Ibid.

53.

Quomodo duæ mediæ proportionales inſeruiant duplationi cubi, & in duarum mediarum proportionalium inuentione exemplum ad Ariſtotelis intelligentiam de Abductione Geometrica. Propoſ.13.§ 9, ibid.

54.

Duæ mediæ proportionales iam pridem ex antiquorum inuentis geometricè, ac demonſtratiuè inuentæ ſunt. Propoſit.13.§ 10.Ibid.

55.

De numeris medijs proportionalibus, & duobus, & pluribus inter duos datos inueniendis. Propoſ.13. § 11. Ibid.

56.

De procreatione Harmonicæ à Geometrica proportionalitate. Propoſ.13.§ 1, de inu.lin.proport.in Harmon.

57.

Dato medio, & maiore extremo, inuenire minus: datis extremis, inuenire medium, &c. in Harmonica Proportionalitate. Propoſ. 13,§ 4, de proport. harmon.

58.

De inuentionibus extremarum, & mediæ linearum in Arithmetica Proportionalitate. Propoſ.13. § 5.de proport. Arithm.

59.

De inuentionibus extremorum, & mediorum numerorum in Proportionalitatibus Harmonicà, & Arithmeticà. Propoſit.13.§ 6. Ibid.

60.

Demonſtratio vniuerſaliſſima propoſitionis 14 pro omni quantitate. Propoſit.14.§ 10.

61.

De ampliatione primæ propoſ. lib 6 ad pluriformia ſolida. Propoſit.14.§ 11.

62.

De ampliatione propoſ. 34, & 35 lib. 1 etiam ad pluriformia ſolida. Propoſit. 14.§ 12.

63.

De conorum iſoperimetris ſuperficiebus ſine baſibus. Propoſ.15.§ 3.

64.

Ad facilitatem, & libertatem exercendi propoſit.problematis in § 6. Propoſit. 17 poſt § 6.

65.

De quadrato medij numeri maiore, quã rectangulum ſub extremis in proportionalitate Arithmeticà; minore verò in Harmonicà, &c. Propoſ.17. § 19.

66.

Propoſ. 16, & 17 lib. 6 vniuerſaliſſimè demonſtratę de toto genere quantitatis. &c. Propoſ.17.§ 20.

67.

Hallucinatio, & variatio circa demonſtrat.18. propoſ.lib.6.Propoſ.18.§ 1.

68.

Ad ornandam eruditè 18. propoſ. lib 6. Poſt § 3.

69.

Hallucinatio circa duplicatam, &c. proportionem, &c. Propoſ.19.§ 1.

70.

Applicationes, & Vſus, &c. 19 propoſ. lib 6 rectius ad propoſit. 20 translati. Propoſ.19.§ 2.

71.

De quadrato quadruplo quadrati ſuper dimidio latere excitati. Propoſ.20.§ 6.

72.

Indicata aliqua de proportione etiam cir-

circulorum inter ſe duplicata ex diametris. Propoſ.20.§ 7.

73.

Hallucinatio vitanda Tyronibus in circulorum inter ſe proportionibus. Propoſ.20.§ 11.

74.

Quæſtiunculæ curioſæ, ac praxes Harmonicæ Militares, &c. in proportionibus peripheriarum, & circulorum. Propoſ.20.§ 12.

75.

De quadratura circuli è centro grauitatis in ſemicirculo. Propoſ.20.§ 19.

76.

Solutio dubitationis in figura, & exemplo crucis delineatæ in §§ 24, 25, ad Propoſ.20.§ 26.

77.

Figurarum tranſmutationes ex 20 prop. lib.6. Propoſ.20. § 31.

78.

Imago per inſtrumentum noſtrum ſcenographicum ſcientificè delineata, etiam prototypo ſimillima demonſtrãtur ex 21 propoſ. lib. 6 Eucl. prop. 21.

79.

Aliter, ac breuius demonſtrationem propoſitionis 22 lib. 6 expedire. Propoſit. 22 § 1.

80.

Ampliatio Propoſ. 22 lib. 6. & eius vniuerſalitas. Propoſ.22.§ 2.

81.

In qua proportione ſint rectilinea ſimilia ſuper proportionalibus lineis. Propoſ.22.§ 3.

82.

Propoſ. 22 lib. 6 eſt fons conſtituendorum rectilineorum proportionalium. Propoſ.22.§ 4.

83.

Propoſ.22 lib.6 ampliata ad numeros, & ſolida. Propoſ. 22.§ 7.

84.

Expoſitio, & conſtitutio, quibus Euclides vtitur in demonſtranda 23 propoſitione, diſſipant hallucinationes circa cõpoſitam proportionem Geometricam, velut laterum in parallelogrammis, &c. Propoſit.23.§ 1.

85.

Aliter, ac breuius demonſtrare propoſ. 22 lib. 6, eãdemq; in numeris demonſtrata. Propoſ.22.§ 5.

86.

Epilogus ad praxes ex 23 propoſ. præſertim dimenſionum ſuperficialium non ſuperficialiter, ſed geometricè demõſtratas. Propoſ.23.§ 21.

87.

Aliter, breuius, ac facilius demonſtrare propoſ.25 lib.6 elementarem. Propoſ. 25, § 1.

88.

Indicatus vſus aliquis phyſicus, ac ciuilis, ſiue agrarius problematis de tranſform. rectil. in circulum. Prop. 25.§ 4.

89.

Problemata de ellipſi §§ 7, 8 ad 25 lib. 6 etiam ad rectilinea vniuerſalizare, & in vſum ellipticæ areæ dimetiẽdæ traducere. Propoſ.25.§ 9.

90.

Curuilinea proportionalia conſtituere. Propoſ.25.§ 13.

91.

De auctionibus, imminutionibus, diuiſionibus planarum figurarum, ſeruata earum ſimilitudine. Propoſ. 25. § 14.

92.

De problematibus apud Geometras Inordinatis, & facta ſectione datę in tres proportionales, ſcire in qua proportione ſint eæ partes. Propoſ. 28.§ 3.

93.

De Geometrica applicatione cum deficientia, quæ Græcis ἔλλειψις. Id nomen inditum conicæ ſectioni ab vſu prop. 28 Eucl. § 5.

94.

Praxis ex punctis applicationis, &c. ellipſim deſcribendi. Propoſ.28 § 20.

95.

Punctorum applicationis ad axem maiorem ellipſis mirę affectiones, ac vſus ali-

aliqui tantum indicati. Prop. 28. § 21.

96.

Theoriæ, ac philoſophationes geometricæ non ſine paradoxis, circa operationes partium regulę ſub angulo normæ recto motarum. Ariſtotelis de motus localis generibus vindicatus. Propoſ. 28. § 27.

97.

Alij modi inueniendæ lineæ applicationis hyperbolicæ, & deſcribendæ lineę hyperbolicæ. Propoſ. 29. § 5.

98.

Monitum circa effectiones phyſicas diaphani pupillaris. Propoſ. 29. § 10.

99.

De tubo optico cum lente pupillari. Propoſ. 29. § 11. Schol. 4.

100.

Ad omnes hyperbolas non poſſe duci aſſymptotos. Et cui hyperbolæ axi coni parallela ſit apud nos præcipua. Propoſ. 29. § 16.

101.

De Geometrica applicatione iuſta, & præciſa (ſine deficientia. vel excedentia) quæ Græcis eſt παραβολή, Vnde etiam nomen Sectioni conicæ. Propoſ. 29. § 17.

102.

De Veſtalium Scaphijs, & Archimedis ſpeculis vſtorijs, ac etiam de tubis parabolicis, &c. Propoſ. 29. § 23.

103.

Cur in ſectionibus conicis, & in alijs lineis non rectis ſpectetur angulorum incidentiæ, & reflexionis æqualitas penes rectam contingentem. Propoſit. 29. § 25.

104.

Indicata hallucinatio Vitellionis, & Oronrij circa latus rectum, & punctum vſtorium in parabola, pro vitando magni momenti errore practico. Propoſ. 29. § 6.

105.

De Alijs paraboles deſcriptionibus. Propoſ. 29. § 28.

106.

De motu proiectorum parabolicè inflexo. Propoſ. 29. § 29.

107.

De Ellipſi, Hyperbula, Parabole apud nos etiam in numeris medijs proportionalitatum Geometricæ, Arithmeticæ, Harmonicæ. Propoſ. 29. § 30.

108.

Geometrica philoſophatio cum paradoxo diſſolutoria oppoſitionis Arithmeticæ cótra operationem è circino proport. ſecandi lineam proportion. § 8.

109.

Campus geometricus, & vniuerſalis ex vſu propoſ. 31 pro auctionibus, imminutionibus diuiſionibus. &c. quarumcunq; planarum rectilinearum figurarum, ſeruata ſemper eiuſdem ſpeciei figura in totis, partibus, reſiduis, compoſitis, &c. Propoſ. 31. § 1.

IN TOMO TERTIO.

1.

Propoitionum genera, ſpecies, denominatores. lib. 5. § 3.

2.

Noſtra methodus non patitur difficultates vulgatas definitionis quintæ lib. 5. Ibid. § 8.

3.

Expoſitio diſtincta, facilis, ac breuis definit. 5 de in eadem proportione ab æquemultiplicibus. &c. Ibid. § 9.

4.

Index copiæ circa analogias. Ibid. § 10.

5.

Expoſitio permutatæ proportionis. Ibidem § 13.

6.

Cur in argumentatione à permutando de-

debeant termini eſſe in eodem genere. Ibid.§ 14.

7.

Hæreſis de æternitate mundi ex ignorãtiã 13 definitionis lib. 5 male firmata. Ibid.§ 15.

8.

Vniuerſalitates 4 propoſitionis. li. 5. propoſ.4. Schol.4.

9.

Oſtenſiones numericæ valent etiam de proportionibus irrationalibus. Ib. § 1.

10.

Conuerſa ratio demonſtrata vniuerſaliter de toto genere quantitatis. Ibidem prop.19.Schol.2.

11.

Vſus, & exempla anticipationis etiam in in Theorematibus. Noſtra methodus confirmata. Ibid.propoſ.33.§ 3.

12.

Expoſitiones, & rationes 11 definitionis. lib. 3.defin.11. § 1.

13.

Demonſtratio veritatis aſſertæ in definitione 11 de angulis æqualibus in ſegmentis, & arcubus ſimilibus Ib. § 2.

14.

Methodi noſtræ opportunitas, & neceſſitas. Ibid. § 5.

15.

De contactu peripheriæ in puncto rectæ, &c.lib.3 propoſ.2.Schol.2.

16.

Phyſica demonſtratio de contactu circuli, vel ſphæræ in puncto.Ib.Schol.2.

17.

Contactus in puncto intelligendi in abſtractione Geometricà. Ibid.§ 3.

18.

Anguli contactus omni acuto minores etiam ad reliquas ſectiones conicas præter circulum. Ibid.prop.16.§ 4.

19.

Cauillationes aliquæ contra angulum contactus proponuntur. § 6. Ibid.

20.

Cauillationibus contra angulum contactùs reſpondetur. § 7. Ibid.

21.

Praua aliquorum illatio ex angulo contactùs, quod quantitas conſtet ex indiuiſibilibus, repulſatur. Ad rem recolitur abſtractio geometrica. § 8. Ib.

22.

Reliquæ aliquæ leuitates contra angulum contactùs exuflatæ. Ib. § 9. Ibid.

23.

Pro noſtra Methodo. Ib. § 11.

24.

Ouiformis figuræ deſcriptio. Ibid. prop. 17.Schol.1.

25.

Opes geometricæ, ac praxis ditandis, & exercendis contactibus rectarum ad circulos, indicatæ. Ib.Schol.2.

26.

Confirmatio geometrica de circuli, & ſphæræ contactibus in puncto. Ibid. prop.18.Schol. 2.

27.

Praxis alia inueniendi centri in circulo. Ibid.prop.19.Schol.

28.

Pro noſtra Methodo. Ibid. propoſit. 20. Schol.1.

29.

Aſtronomici obſeruatoris aſtronomicus paralogiſmus ex abuſu 20 propoſ. Ib. Schol.2.

30.

Aliter exercere, & demonſtrare propoſ. 25 ex 31 li.3.Ib.prop.31. Schol.1.

31.

De angulo ſemicirculi, quòd ſit æqualis recto hallucinationes aliquorum eluſtratæ. Ibid.§ 7.

32.

Aliter Propoſitionem 33 lib. 3, ac breuiter demonſtrare. Ibid.prop.33.§ 1.

33.

Noſtra methodus pro agnoſcendis circuli admirandis in 35 prop. lib.3. Ibid. propoſ.35.§ 1.

34.

Conuerſum noſtrum Corollarij primi

apud

apud Clauium ex 36 propoſ.lib.3.Ibid. propoſ.36. § 1.

35.

Pro noſtra Methodo. Lib. 4. Propoſit. 8. Poſt § 3.

36.

De reliquis iſoſcelibus ad inſcribendas alias aliquas figuras nondum inuentis. A nobis aliquid opis, ac opum.Ibidem Propoſ.10.§ 2.

37.

Apud alios inuentio laterum trianguli æquilateri, quadrati,pentagoni,hexagoni, octogoni, decagoni,dodecagoni ex circuli diametro, &c. Ib.§ 6.

38.

Vniuerſalitas, vtilitas, & materia pro ſeptimo Ærarij Tomo indicatæ partim in fine 2 elementi. lib. 2.§ 1.

39.

Propoſitio 2 li. 2 facta vniuerſaliſſima de omni genere quantitatis etiam ſolidæ. Ib.Prop.2.§ 5, nu.2.

40.

Propoſitio 3 vniuerſaliſſima etiam ad ſolida. Ib.Propoſ.3.§ 6.

41.

Propoſitio 4 de omni quantitate.Ib.prop. 4.§ 7, Schol.2.

42.

Quadratum duplæ quadruplum quadrati dimidiæ lineę; etiã in numeris oſtenſum. Ib. § 11.

43.

Auctaria ad propoſitiones aliquas lib.2. Ib.prop.11, § 15.

44.

Adiumenta ad praxim 14 propoſ. lib. 2. Ibidem Schol. ſub § 18.

45.

Aliter ex per ſe notis expedire Propoſit. 4 lib.11 Elem.Epil.Schol.3 ſub § 32.

46.

De ortu Pyramidum, & Conorum inæqualium ex inæqualibus baſibus, vel altitudinibus. &c. Epil. Schol. 3. § 34.

In Breuiarij Stereometrici

SECTIONE I.

1.

NOſtrum compendium pro ſolidorum aliquorum proportionibus, & dimenſionibus facilius etiam, quàm ex vſu geometrico centri grauitatis. Poſt § 1.

2.

Etiam inęqualium cylindrerorum,& conorum reciprocationes diametrorum in baſibus, & ſoliditatum cum altitudinibus. Poſt Theor.5.

3.

Aliter propoſ. 36 lib. 11 Eucl.geometricè demonſtrate. Poſt Th.7.

4.

Regula noſtra vniuerſalis (pro particularibus apud Euclidem de ſolidis eiuſdẽ ſpeciei) de ſolidis etiam diuerſæ ſpeciei æqualibus, quorum baſes, & altitudines reciprocantur, & conuerſim. Poſt Theor.8.

5.

De Cylindris, & conis inæqualium altitudinum habentibus inter ſe proportionem vt baſiũ diametri. Poſt Th. 13.

6.

Coni, & Pyramides eiuſdem altitudinis, ſunt inter ſe vt baſes. Poſt Th. 15.

7.

Proportiones inter conum, & cylindrum Poſt Theor. 20.

8.

Quanti momenti ſit, præſertim in ſphæris,proportio inuenta è ſemidiametris, vel

vel diametris, ſiue vſu centri grauitatis. Poſt Theor.21.

9.

Alia theoremata de ſolidorum non ſimiliũ proportionibus apud nos. Poſt §7.

10.

De theorematibus,& problematibus circa ſuperficies ſolidorum,in primis elementarium. §8.

11.

De proportionibus baſium inter ſe in cylindris, conis, parallelepipedis, priſmatibus. Poſt Theor. 35, & Lemma.

12.

Compendium ſingulare in theoremate de ſphær.ſuperfic. Poſt Theor.26.

IN SECTIONE II.

13.

DE transformationibus circa ſolida etiam non rotunda. Probl. 12.

14.

De dimenſione ſuperficiei pyramidalis. Poſt Probl.16.

15.

Ad circuli quadraturam noui aditus.Poſt Probl.18.

16.

Praxes militares è dimenſione ſphæræ. Poſt Probl.24.

17.

Conus habens pro baſe circulum ſphæræ maximum, pro altitudine duplicatam diametrũ, eſt æqualis datæ ſphæræ. Poſt Probl.26.

18.

Soliditatem ſphæræ noſſe. Schol. 3. Poſt Problem.26.

19.

Datam ſphæram in conum ęqualem vertere. Schol.2 Poſt Probl.27.

20.

Conum, & cylindrum vertere in ſphæram. Schol 3 poſt probl.28.

21.

Cylindrum obliquum,&c.in parallelepi. vertere. Schlo.1.Poſt Probl.32.

22.

De varijs ſolidorum transformationibus. Schol. poſt Probl.34, 35.

23.

Criticis fouea geometrica.Poſt Prob.36.

24.

De mirifico Villalpandi inſtrumento pro augendis, vel imminuendis ſolidis in data proportione. Schol. 2 poſt Problem.45.

25.

Problemata de aliorum ſolidorum elementarium, præſertim rotundorum, auctione, vel imminutione proportionalibus. Poſt Probl.47.

26.

Pro vſibus, & praxibus facilior alia ratio augendorum, vel minuendorum ſolidorum in data proportione, non ſeruatâ indiuidualis figuræ ſimilitudine. §6.

27.

De dimenſionibus elementarium ſolidorum ad datam rationem, cum vſu centri grauitatis, varia problemata indicata. § 8.

28.

Seges theorematum Stereometricorum. Poſt §9.

IN SECTIONE III.

29.

INdicata quæ ad eruditionem, & ornatum quinque corporum regularium pertinent, de quibus in libris Elem.13, 14, 15. § 1.

30.

Hexaedri, & Octaedri à centro ad baſes inuenire etiam aliter perpendiculares, § 16.

De

31.
De Hexaedri, ſiue cubi alia faciliore dimenſione. § 18.

32.
Auctarium quartum, & compendia indicata de transformationibus, auctionibus, imminutionibus, diuiſionibus, &c. ſolidorum regularium. § 20.

33.
Indicata compendia apud alios pro Stereometricis libris elemẽtaribus. § 22.

34.
Paralipomenon, in quo geminæ Propoſitiones maximi momenti, ac ſæpius in hoc Ærario citatæ, ac ſuppoſitæ. § 25.

35.
Problema. ſub § 25.

36.
Indicata demonſtratio. &c. rectæ motæ ſub angulo recto. Ibid.

37.
Problema. Ib. § 26.

38.
Regula vniuerſalis pro demonſtratione ſecundæ propoſitionis. Ibidem Scholio. 1.

39.
Cur propoſitiones § 25 antecedentis, cũ antecedentibus § § 23, & 24, repoſitæ ſint inter Stereometrica. Ibidem Schol. 2.

40.
Parergon Geometricum in quo Ergo, ſiue Concluſio Cyclica Ærarij, & finis ſubſignatus puncto, quod eſt æquale circulari ſuperficiei etiam infinitę. § 7.

41.
Formatio gemini ſolidi caui. &c. Ib. nu. 3.

42.
Dimenſio ſolida ſcaphiorum. Ib. num. 4.

43.
Transformatio ſcaphiorum Ib. num. 5.

44.
De quadraturis infinitis ſuperficierum curuarum extimæ, & intimæ in ſcaphiis. Schol. 1. poſt § 30.

Plura alia Scholia minoris momenti in vtroq; 2, & 3 Tomo omiſſa ſunt, quæ tu, Amice Lector, vel lege, vel recole.

INDEX XIV

In Epinomen Exodiorum horariorum.

IN TOMO SECVNDO.

1.
GNomonicæ Philoſophiæ Sandalium expoſitum. Exod. 1. Prop. 1.

2.
Sandalium Gnomonicum, hoc eſt Horarium vniuerſale Zonæ cæleſtis torridæ faciliimè conſtruere. Ib. Propoſ. 2.

3.
Hallucinatio Tyronibus patefacta. Ibid. Propoſ. 2.

4.
Theorię praxeon antecedẽtiũ. Ib. Prop. 3.

5.
Vſus Sandalij gnomonici pro horis ad quamlibet poli eleuationem cognoſcendis. Ibid. Propoſ. 4.

6.
Citharæ horariæ facillima conſtructio. Propoſ. 1. Exod. 2.

Ci-

7.
Citharæ horariç vſus pro infinitis numero horizontalibus horarijs momento deſcribendis. Pro horis etiam in aqua labente videndis, & audiendis. Pro horis Babylonicis ex Italicis, & pro Italicis ex Babylonicis agnoſcendis,& deſcribendis. Aſtronomicas non ſignatas vnico filo agnoſcere,vel ſignare. Ibid.Propoſ.2.

8.
Vſus præcipuus citharæ, ſiue horarij horizontalis pro facillima deſcriptionę horarum Aſtronomicarum,& Italicarum ex Babylonicis, Babylonicarum ex Italicis in muro quocunque declinante,& in plano quocunque inclinato. Ibid. Propoſ. 3.

9.
Reliqua aliqua circa vſum (in anteced. propoſ. 3) citharæ horariæ ad horaria in muris. Ibid.Schol.1 poſt Propoſ. 3.

10.
Horarium horizontale comparandum cum quolibet alio inſtrumento aptiſſimo ad horaria in quolibet immobili plano deſcribenda. Ibid. Schol.2 poſt Propoſ.3.

11.
Microcoſmi theorica expoſitio, & facillima conſtructio. Exod.3. Propoſ. 1.

12.
Vſus Microcoſmi pro horario vniuerſali Aſtronomico Italico, &c. & vniuerſalis. ad horas vbiq; gentium eodem momento cognoſcendas. Ib.Propoſ.2.

13.
Cautio pro operationibus antedictis in Semeſtri Hyemali. Ib.Sch.poſt Prop.2.

14.
Vſus Microcoſmi pro horis Aſtronomicis, & ab horizonte inchoatis in quocunq; plano declinante, vel inclinato facillimè deſignandis. Ib. Propoſ. 3.

15.
Vſus alij non horarij machinulæ noſtræ Microcoſmicæ indicati. Ibid. Schol.1 poſt Propoſ. 3.

16.
E tabulis longitudinum iuxta nouum, & ingenioſiſſimum inuentum Claris. Viti Langreni Regij Coſmographi in Belgio, vſum ſui Microcoſmi optat Author Ærarij ab omni poſteritate. Ib.Schol.2.poſt Propoſ.3.

17.
Ab arcu tēporis Aſtronomico tela Mortis horaria. Exod.4. Propoſ.1.

18.
Partes inſtrumenti. Ib.Propoſit.2.

19.
Conſtructio inſtrumenti, & vſus. Ibid. Propoſit.3.

20.
Adiumenta pro vſu Arcus ad horas ab horizonte, & à meridiano, & pro eleuatione poli. &c. Ibid.Schol. poſt Propoſit.3.

21.
Tympani, ſiue aquarij Authomatis ingenioſiſſimi, ac ſimpliciſſimi horaria operatio. Exod.5 Propoſ. 1.

22.
Tympani horarij externum artificium prodere. Ib. Propoſ.2.

23.
Interius ingenium Tympani perſcrutari. Ib.Propoſ.3.

24.
Ingenioſiſſimam, & facillimam artem exponere, qua, & horarū numeri perpetuo mutantur, & hora, fine vulgato aliorum authomatum artificio, pulſantur in Tympano horario. Ib.Propoſit.4.

25.
Conſtructio Authomatis, & recta partium diſpoſitio. Ib. Propoſ.5.

26.
Animaduerſiones circa cauſas incommodantes, & earum remedia. Ib. Propoſit.6.

27.
Theoriæ machinariæ, ac Phyſicæ. Ib.Propoſit.7.

INDICES XV, XVI, XVII.

Locorum Ariſtotelicorum, & variorum ſcriptorum expoſitiones, Moralia, & ſacra, & --
Citati ſcriptores in 2, & 3 Tomo, præter citatos, & poſitos in Indice 13 Tomi primi Ærarij.

INDEX XV.

Locorum Ariſtotel. Auctorum aliorum. &c.

IN TOMO SECVNDO.

1.
VEgetius, & alij veteres Authores explicati, &c. li. 6 prop. 4, § 15.

2.
Ad propoſ. 29, li. 6, § 24, 26.

IN TOMO TERTIO.

1.
ARchimedes vindicatus à calumnia ex ignorantia 4 definitionis. Lib. 5, § 5.

2.
Veteris ſcholiaſtæ hallucinatio. Ibidem § 11.

3.
Hæreſis de æternitate mundi ex ignorantià 13 definitionis lib. 5 male firmata. Ibid. § 15.

4.
Vſus contactùs in puncto ad Ariſtotelis intelligentiam contra indiuiſibilia, & pro miraculo geometrico de aſymptotis. Lib. 3, prop. 2, § 2.

5.
Locus inſignis Ariſt. in Mechan. de remigibus ex 15 propoſ. illuſtratus. Ibidem Prop. 15, § 1.

6.
Locus Ariſtotelis inſignis elucidatur ex 14 propoſ. Lib. 2. prop. 14, § 18.

INDEX XVI.

Moralia, & Sacra---

---*IN TOMO SECVNDO.*

1.
E Triplici genere geometricę Applicationis Moralia. Propoſ.29. § 31.

2.
Sacra è pentagonicâ cuſpi datâ figura in gratiam Chinenſium Philoſophorum. Propoſitio 30. § 16.

IN TOMO TERTIO.

3.
MOralia circa inuentionem centri in circulo. Lib.3, prop. 1.§ 8.

4.
Morales contactûs. Vir bonus circularis, & ſphæricus. Ibid.prop.2, § 4.

5.
Moralia è 15 propoſ. Ibid. prop 15, § 3.

6.
Moralia ad 21.prop. Ibid. Prop. 21, § 4.

7.
Morale pētagonum in circulo, ſiue circa circulum Fortunæ.li. 4,prop.11,§ 2.

INDEX XVII

Scriptorum citatorum in 2, & 3 Tomo, præter citatos in 1 Tomo.

A

Alciatus.
Anonymi varij.
Apiaria Philoſophiæ Mathematicæ.
Ariſtæus.
Aſtronomicus obſeruator.

B

Benedictus Mariottus.
Briſo.

D

Diocles.

I

Iohannes de Rhoias.
Io. Baptiſta Benedictus.
Ioſephus Scaliger.

L

F.Lucas à Burgo.
Langrenus.

M

Menechmus.

N

Nicolaus Tartalia.

O

Ouidius.

P

Philoponus.
Pythagorici.
Peletarius.
Petrus Nonius.
Pierius Valerianus.

S

Serenus.
Sporus.

V

Vegetius.
Vitellio.

IN-

INDEX DECIMVSOCTAVVS

Rerum præcipuarum, ac notabiliorum in Tom. 2, & 3 Ærarij.

IN TOMO SECVNDO.

A

ABductio geometrica quænam. Prop. 13 de 2 med. § 9.
Abſtractè ab exemplis non eſt philoſophandum, &c. prop. 23, § 1.
Analogia quid differat à medietate. Prop. 10, § 12.
Anguli diuiſio in duo æqualia, aliter, quam in prop. 9. lib. 1. propoſ. 3, § 1.
Apollonij aliqua nutantia in geometricis. prop. 13, de 2 med. § 1.
Archimedis, & aliorum aliqua problemata ſine inuentione 2 med. proportionalium eſſent nugæ. prop. 13, de 2. med. § 10.
Arcus diurni in quacunq; eleuatione è Microcoſmo. Exod. 3. Schol. 1. Propoſ. 3.
Arcus mortis horarium, tela lineæ horariæ. Exod. 4. Prop. 1.
Aſtronomorum præcipua ſcita circa remotiſſima cæleſtia corpora prodeunt à figurarum geometricarum demonſtratiua cognitione. prop. 20, § 29.
Authoma horarium ex puluere incluſo ineptum. Exod. 5. prop. 6. num. 5.

C

COnicæ ſectiones morales, hyperbolæ, parabole, ellipsis. propoſ. 29. § 31.
Conſonantia diſdiapoſon, ſiue octaua è laminis circularibus ſonoris diametrorum in dupla proportione. prop. 20, § 12.
Conſonantia nulla peripheriarum in laminis prædic. ibid.
Conſonantias oculis percipere. ibid.
Conſonantijs varijs fiſtulas pro fontibus aptare. ibid.
Cubici ſepulchri Glauci duplicatio, propoſ. 13. de 2 med. § 2.

D

DEfinitiones aliquæ demonſtratæ. cur. def. 5. § 2.
Diameter in rectangulis è gemino motu eiuſdem generis. prop. 28. § 27.

E

ELementa geometrica eleuata ad ſublimia cæleſtia cognoſcenda. prop. 20. § 28.
Elementarium propoſitionum propria breuitas, & perſpicuitas. propoſ. 26. § 1.
Eratoſthenis epiſto'a Ptolemęo Regi de duarum mediarum inuentione. prop. 13. de 2 med. § 2.
Euclidis laudes. prop. 13. de 2 med. § 1.

F

FIguræ ſimiles quænam. Defin. 1.
Figuræ ſimiliter deſcriptæ quænam. defin. 1. § 1.
Figuræ altitudo quænam in geometria. def. 4.

G

GNomonicæ Philoſophiæ dignitas etiam è ſandalio. Exod. 1. prop. 4.

H

Helix circa cilindrum eſt mixta, & cur. prop.28. § 27.
Horam agnoſcere quì poſſit cæcus, & ſurdus. Exod.2. par.2.
Horas noſse vbiuis gentium in loco peculiari. Exod.3. ibid.
Horas ſpectare etiam in planis fluentibus. Exod. 2. ibid.
Horaria horizontalia plura momento deſcribere. Exod. 2. ibid.
Horas ab ortu deſcribere in muro ex horis ab occaſu; & conuerſim. Exod. 2. prop. 3.
Horarium horizontale plures habet horas, quàm muralia. Exod. 2. Schol. 2. prop. 3.

L

Latitudines horizontales è Microcoſmo. Exod.3. Schol.1. prop.3.
Lemmata ante, & poſt propoſitionem principalem ponuntur. prop. 22, § 7.
Lemma quid differat ab axiomate, & petitione. ibid.
Lemma quid, & quotuplex. ibid.
Lineæ diuiſio in partes harmonicas differt à diuiſione lineæ in proportionalitate harmonica. prop.10, § 13.
Linearum duarum mediarum proportionalium inuentionem cur Euclides non tradiderit. Prop. 13, de 2 med. § 1.
Linearum duarum mediarum proportionalium inuentio eſt theorema, & problema. propoſ.13 de 2 med. § 2.
Linearum duarum mediarum proportionalium vſus. prop. 13 de 2 med. § 2.
Linearum duarum mediarum proportionalium problema non eſt tantum è genere ſolidorum. propoſ. 13 de 2 med. § 3.
Linearum duarum mediarum proportionalium negatio pernicioſa. prop. 13 de 2 med. § 10.
Lineæ geometricæ vtiliſſimæ ciuili vitę. prop. 28, § 27.

M

Medietates quot ſint, & quæ ſingulæ. prop.10, § 13.
Meridianam lineam ducere è microcoſmo. Exod.3. Schol.1. prop.3.
Mixtam lineam quænam efficiant. propoſ. 28, § 27.

N

Nichomedis inuentio duarum mediarum proportionalium optima, et vindicata. prop.13, de 2 med. § 10.
Numerorum vſus etiam in geometricis demonſtrationibus. Defin.5. § 2.
Numerus medius proportionalis inter duos quadratos. propoſ. 13, de 2 med. § 11.
Numeri duo medij proportionales inter duos cubicos. ibid.
Numerus medius proportionalis inter vnitatem, et quemlibet quadratum. ibid.
Numeri duo medij proportionales inter vnitatem, et cubicum. ibid.
Numerus quilibet per alium aliquem vnum, ac eundem multiplicatus, et diuiſus, eſt medius proportionalis inter productum, et quotientem. ibid.
Numerus non poteſt diuidi extrema, et media ratione. prop. 30, § 9.

O

Optica proiectura Zodiaci in planum. Exod.1. prop. 3.
Optica proiectura horarij horizontalis in murum. Exod. 2. par. 3.

P

Parabolicæ ſectionis quodnam latus rectum. prop. 29, § 26.

Pa-

Parallelogrammum dato ſimile conſtituere facillimè. prop.24, § 1.
Peripheria è gemino motu diuerſi generis. prop.28, § 27.
Peripheria eſt linea ſimplex, cur, et quomodo? prop.28, § ibid.
Pilæ æ cæ pro bombardis quantæ materiæ ſint conflandæ cognoſcere ſcientificè, ac in facillima praxi. prop. 20, § 22.
Poli eleuationem inuenire è microcoſmo. Exod.3. Schol.1. prop.3.
Pondera omnium ſimilium ſolidorum noſse ex vno. ibid.
Problematum tria genera. prop.28, § 3.
Proportio compoſita quænam. Def. 5. et § 1, et prop.23. § 1.
Proportio compoſita etiam è proportionibus maioris, et minoris inæqualitatis. ibid.
Proportionis compoſitæ denominator quibus modis practicè inueniatur. Defin.5, § 4. et propoſ.23, § 3.
Proportionis compoſitæ agnoſcendæ modus. ibid.
Proportionis compoſitæ difficultatibus in praxi remedia. Defin.5, § 4.
Proportionis compoſitæ differentia à duplicata, triplicata, etc. Defin.5, § 4.
Proportio duplicata, triplicata, etc. eſt etiam compoſita; non è contra. Defin. 5, § 4.
Proportionis compoſitæ altera definitio noſtra. Def.5, § 4.
Proportio compoſita præcipuè è proportionibus diuerſi generis. propoſ. 23, § 1.
Proportionem inter datos numeros modi cognoſcendi. prop.23, § 4.
Proportionis compoſitæ inuenti denominatoris per arithmeticam praxim ratio in § 6, propoſ.23.
Proportionalitatum decem genera. propoſ.10, § 13.

Q

QVantitas in abſtractione geometrica cur ſit diuiſibilis in infinitum. prop.10, § 22.

R

REciprocæ figuræ quænam. Defin. 2.
Reciprocationis geometricæ vſus in iuſtitia commutatiua per æquipondia. def.2. § 2.

S

SAndal'j gnomonici deſcriptio. Exod. horar.1, prop.1.
Sectio lineæ extrema, et media ratione quænam. Def. 3.
Semidiametri inuentio pro plano circulariter incuruando. Econ.1. pr. 2.

T

TOrmenta bellica pro varia proportione geometricè conflare. prop. 20, § 22.

V

VIrtutis medium indicatum, et expoſitum moraliter in geometricis. § 29, § 31.

Vide plura in Indicibus antecedentibus, præſertim in Scholijs.

Alge-

IN TOMO TERTIO.

A

ALgebra è ſecundo libro elem. ibi, § 1, Schol. 1.

Anguli contactus mira. lib. 3. prop. 16, § 1.

Angulus acutus non habet proportionem ad angulum ſemicirculi. lib. 3. prop. 16, § 2.

Anguli ſemicirculi mira. ibid.

Angulus rectus, licet maior, quam angulus ſemicirculi, non habet maiorem proportionem ad acutum, quam angulus ſemicirculi. ibid.

Angulus contactus cur vocetur geometricè locus. lib. 3, prop. 16, § 4.

Anguli contactus ad conicas ſectiones. ibid.

Anguli etiam non rectilinei apud Euclidem. lib. 3. prop. 16. § 7.

Angulus contactus, & acutus non habent inter ſe proportionem. lib. 3. ibid.

Anguli contactus non omnes æquales. ibid.

Angulus contactus licet quolibet acuto minor, tamen diuiſibilis in infinitum. ibid. § 8.

Anguli contactus numero infiniti ſimul ſumpti non æquant minimum rectilineum. lib. 3. ibid.

Angulus recto maior, qui rectum non ſuperat minima quātitate anguli acuti. lib. 3. prop. 16. § 10.

Angulus recto æqualis compoſitus ex angulo, qui minor eſt recto, & ex angulo, qui minor eſt omni acuto. ibid.

Angulorum conuenientia in extremis, non in medijs, licet media compoſita ſint ex extremis. ibid.

Anguli mixti non habent proportionem cum rectilineis. lib. 5. def. 4. § 5. nu. 3.

Anticipationis vſus, & exempla etiam in theorematibus. lib. 5 in fine, § 3.

Arithmeticæ præcipuæ propoſitiones libr. elem. 7, 8, 9 apud nos facilius expeditæ.

Archimedis geometrica vindicatio. lib. 5, def. 4, § 5.

Aſtrologiæ iudiciariæ vanitas. lib. 4, prop. 15, § 8.

Aſymptoti ex angulis contactus. lib. 3. prop. 16. § 3.

Axioma 13 non eſt apud Eucl. Epil. Schol. 4 ſub § 32.

C

CEntri inuentiones variæ. lib. 3. propoſ. 1, Schol. & ibi cit. & prop. 19. & alibi.

Centri grauitatis, & figuræ differentia. ibid. § 5.

Centri grauitatis vſus geometricus quibus primis principijs nitatur. Epil. ad Lectorem.

Circulus parens linearum proportionalium. lib. 3. prop. 35, § 2.

Circulus regulam auream arithmeticam continet, & demonſtrat geometricè. ibid.

Circuli ope agnoſcere inacceſſas altitudines, latitudines, profunditates. ibid.

Circularis lineæ cū recta proportiones. lib. 5, def. 4, § 5, num. 4.

Circulus eleuatus producit cylindrum. Append. lib. 3. § 2. num. 4.

Circuli definitio caſtigatior. Epil. § 24.

Contactus circuli, & ſphæræ in planis variè demonſtrati, & expoſiti. lib. 3. prop. 2. & Schol. ad eam.

D

DEmonſtrandi modus vniuerſalis multiplex. Breu. Stereom. ſect. 3. § 23.

Diaphanum ſphæricum dilatat angulum

lum viſorium magis, quàm diaphanum cubicum. Lib.3. prop.15, § 2.
Dimenſiones planarum, & ſolidarum figurarum ex propoſ.12, & 13 li.2, § 16.
Diſtributiuæ iuſtitiæ abuſibus moralc ſulatum è geometria.li.3.prop.21, § 5.
Dodecaedri definitio. Breuiar. Stereom. ſec.3.§ 20.

E

EVdoxus Author libri 5 elem. Ante libri 5. § 1.
Extrema ſine medijs iuxta ſe poſita. ibid. & prop.31, § 6.

F

FIguræ ad ſpatium inter aſymptotos non eſt proportio. Lib.5.defin. 4, § 6. num.5, 6, 7, 8, 9.
Fortunæ pentagonum. lib.4.prop.11, § 2.
Fortunæ ludicrum. ibid.
Fortunæ rota, & præſcriptum, ibid.

G

GNomon geometricus vnde dictus. lib.2.§ 3.
Geometricis alis ritè firmatis opus eſt euolantibus ad Aſtronomica, ne fædè labantur, vt aliqui in exemplo. Lib. 3. prop.2, § 2.
Gnomones numeri impares apud Pythagoricos, cur. Ibid.§ 8, nu.1.

H

HExaedri definitio. Breuiar. Stereom. ſect.3.§ 8.

I

ICoſaedri definitio. Breu. Stereom. ſect. 3.§ 9.
Indiuiſibilia oſtendunt quamlibet cuilibet figuræ comparabilem. Lib.5. def.4, § 6, num.6.
Indiuiſibilia ſunt contrà defin.4, li.5.§ 7.
Indiuiſibilis recta linea implicat. Epilog. § 20.num.6.
Indiuiſibile in motu eſt ſemper in loco maiori ſe. Epil.§ 22.initio.
Indiuiſibilium in vſum geometricum traductorum plurima, & maxima damna contra veram Geometricam Philoſophiam. Epil.§ 22 toto.
Indiuiſibilia deſtruunt:
- Certitudinem, & dignitatem Geometricæ Philoſophiæ. Epil.§ 22.nu.1.
- Proportiones irrationales. Ib. num.2.
- Commenſurabilia potentiâ, ib.nu.3.
- Rationalium proportionum fundamentum, num 4.
- Geometriam de curuis ſuperficiebus. nu.6.
- Ingenia in paralogiſmis, &c. num.7.

Indiuiſibiliū falſa fundamenta, ib. § 22, num.4.
Indiuiſibilia tanquam arenæ non ferunt pondus demonſtratæ veritatis; & erubeſcendo dolo docent pro ſolida veritate captare inanes nubeculas. Ib. § 22.num.7. & in fine 2 partis Epilog. planim.
Indiuiſibilia profligata ab ax.9 li 1.elem. § 25, & à propoſ.35, 36 li 1.elem. & à pluribus alijs de planis, & ſolidis.§ 27.
Indiuiſibilia telas aranearum texunt. Ib, num.3.
Indiuiſibilium fucatum corollarium. Ib. § 28.
Indiuiſibilia reiecta à defin.4.lib.5 elem. ib.§ 29.
Infinitum in quantitate excluditur à defin.3, & 4 lib.5.Schol.2. & § 4.
Infinita figura implicat, lib.5.defin.4, § 6.
Infiniti non eſt ſcientia. Ibid.

L

LIneæ ſectio in Arithmeticâ proportionalitate ex 5 prop.lib.2.§ 14.

Li-

Linearum æqualium æqualia eſſe quadrata. Lib.3.prop.14, Schol.
Lineę duę non poſſunt eſſe contingentes in eodem puncto. lib.3.prop.16, § 5.
Linea circularis conſtat è concauo, & conuexo, extremis ſine medio recto. Lib.3. Propoſ.31, § 6.
Lineæ inflatæ reiectæ. Epil. § 20, nu. 5.
Luna minor eſt Sole. lib.3. prop. 32, § 1.

M

Methodi noſtræ commoda, vtilitates, &c. lib.5 def.5, § 8, & in fine eiuſdem lib.5, § 3. lib.4. defin 11, § 5.
Multiplicationi ſimilis conflatio parallelogrammi. lib.2.§ Schol.1.
Multiplicare, & ducere quantitatem, differunt. li.2.§ 2, Schol.2.
Mundi æternitas malè fulta definitione 13 libri 5, § 15.

N

Normæ examen. lib.3.propoſ.27. § 4.
Numerorum quadratorum, & radicum tabulę ex imparibus numeris cõfectæ. lib.2 § 8, num.2.
Numerorum vtilitas, & certitudo in demonſtrationibus etiam de quantitate continuâ. Ante definitiones libri 5, § 1.
Numeri valent etiam pro demonſtrationibus in proportionibus irrationalibus. Lib.5.prop.4, § 1.

O

Octaedri definitio. Breuiar. Stereom. ſect.3, § 7.

P

Pars aliquota quænam. lib. 5.def.1.§ 2, Schol.2.
Peripheriam ducere per data tria puncta. Lib.3.Prop 25, § 2.
Peripheria eleuata producit ſuperficiem cylindricam. li.3. in Append. § 2. nu.5.
Permutandi argumentatio debet habere terminos in eodem genere. Lib. 5. def. 13, § 14.
Planetarum aſpectus ex inſcriptione figurarum in circulo. lib. 4. § 1, & ad propoſ.15, § 8.
Planetarum conſonantiæ apud veteres, & neotericos. Lib.4.prop.15, § 9.
Poli geometrici inuentio. Lib. 3. propoſ. 9. Schol.
Poriſmatis exemplum in propoſit.1 lib.3 Elem. poſt § 8.
Proportionalitatis arithmeticæ eximia proprietas oſtenſa in propoſ. 5 lib. 2. § 14, num 2, 4.
Proportionalitatũ triũ sũt ellipſis, hyperbole, parabole. lib.2 § 14, num.3.
Propoitio cur non intercedat inter angulos mixtos, & rectilineos. Liber 3. propoſ.16. § 5.
Proportionum doctrina præmittenda Libro 4. ibi § 1, num. 8.
Proportionum variæ materiæ, & copia. Ante definitiones libri 5. § 1.
Proportionis antecedens, & conſequens quinam. Lib.5.def.2, 3, Schol.1.
Proportionum genera, ſpecies, denominatores Lib.5.def.3.§ 5.
Proportio inter figuras curuilineas, mixtas, & rectilineas. Lib.5.definit. 4, § 5, num.4.
Propoitio inter curuas, & planas ſuperficies. Ibid. in fine § 5.
Proportiones irrationales comprehenſæ à Defin.5, lib.5, § 9
Proportionis permutatæ varia nomina, & formulæ. Lib.5, def.13, § 13.
Proportiones ſphæræ, & coni inſcriptorum in cylindro. Breu.Stereom.ſec. 2. coroll.4 poſt probl.26.
Propoſitio 2 lib.2 eleuata ad ſolida. lib. 2, Schol.ad prop.2. & in Appendice num.3.
Puncta phyſica diuiſibilia. Epilog. § 20. num.3.
Pũcta inflata excluſa à Geometricâ Philoſophia. Ib. nu.5,

Quan-

Q

QVantitas etiam abſtracta non conſtat ex indiuiſibilibus etiã abſtractis. Lib.3.prop.2.§ 3.
Quantitatis cõceptus inuoluit diuiſibilitatem. Ibid.
Quantitas quomodo producatur ab indiuiſibili in concreto. Epilog. par. 2. § 20. num.1, & 2; & § 22 initio.
Quantitatem produci ab indiuiſibili, & conſtare ex indiuiſibilibus differunt. epil. § 22. initio.
Quadrata æqualia eſſe ex æqualibus radicibus. lib. 3. propoſ. 14. Schol.
Quindecanguli inſcriptio in circulo oſtẽdit in ſphæra armillari diſtantiam poli Æquinoctialis a polo Zodiaci. lib.4. Propoſ.16, § 1.

R

REgula geometrica pro dimenſione ſphæricæ ſuperficiei. Breu. Stereom. ſect. 2. probl. 17.
Remiges medij cur magis nauim impellant. Lib. 3.prop. 15, § 1.
Remotiora cur appareant minora vicinioribus ęqualibus. Lib. 3.prop.20, § 3.
Remotiora, & viciniora ęqualia quomodo poſſint apparere eiuſdem quantitatis, ibid. & ad prop.31, § 1.

S

SEgmentorum circularium ſimilitudo in quo ſit. Lib.3, def.11, § 1.
Segmentorum ſimilium facillima cognitio, innentio, definitio. Ibid.
Segmentorum circularium ſimilitudo quomodo trahat ęqualitatem angulorum. Ibid.
Semicirculi omnes ſunt ſimiles. Lib. 3. propoſ.31, § 8.
Sinus, & chordæ arcuum quadrantis ex lib 4. In append. ad lib.4, § 3.
Solidorum rotundorum, & parallelepipedorum compoſitio, & reſolutio, ad librum 2. In Appendice § 23.
Sol illuminat pluſquam hemiſphærium terræ. Lib.3.prop.32.§ 1.
Sol terrà maior. Ibid.
Superficies curuæ circa ſolida rotunda cui rectangulo ſint æquales. Breu. Ster. ſect. 2. Schol.2 poſt Probl.12.

T

TAngens recta ſuperficiem terræ vix. poteſt duci. lib.3.propoſ.36.§ 2.
Theoriarum geometricarum veritas non eſt metienda è phyſicis experimentis. lib.4.prop.15, § 3.
Terrarum orbis quatuor dimenſiones. li. 3.propoſ 36. § 3.
Tetraedri definitio. Breu. Stereom. ſect. 3. § 6.
Tranſitus ab extremo ad extremum ſine medio in angulis, ibid.

V

VIr bonus cur moraliter teres, atque rotundus. Lib 3. prop.2.§ 4.
Vir bonus cur circularis. Ibid.
Vir bonus cur ἅγιος ibid.
Vmbra terræ conica. Lib.3. prop. 32, § 1.
Viſionis punctum in ſpeculo ſphærico ex inſcriptione trianguli, & hexagoni. lib.4.prop.15.§ 3.

INDEX XIX.

Theorematum elementariorum in libris 2, 3, 4, 5, 6,

IN TOMO II, & III.

LIBER II.

Propoſ. 1. Theor. 1.

SI fuerint duæ rectæ lineæ, quarum altra ſecetur in quotcunq; partes, rectangulum ab ipſis contenrentum, æquale erit rectangulis ab inſecta, & ſingulis ſectæ partibus contentis.

Propoſ. 2. Theor. 2.

Si recta linea ſecetur vtcumque, erunt rectangula, quæ tota, & partibus continentur, æqualia quadrato, quod fit à tota.

Propoſ. 3. Theor. 3.

Si recta linea vtcumque ſecetur, erit rectangulum tota, & vna parte contentum, æquale rectangulo partibus contento, & quadrato à dicta parte deſcripto.

Propoſ. 4. Theor. 4.

Si recta linea vtcumque ſecetur, quadratum totius æquale erit & partium quadratis, & rectangulo bis partibus contento.

Propoſ. 5. Theor. 5.

Si recta linea ſecetur in ęqualia, & in inęqualia, erit rectangulum inæqualibus totius partibus contentum vna cum quadrato lineæ, quæ inter ſectiones interjcitur, æquale ei, quod à dimidia fit quadrato

Propoſ. 6. Theor. 6.

Si recta linea biſecetur, eique in directũ quædam recta adjciatur, erit rectangulum, quod fit ex tota compoſita, & adiecta, vna cum quadrato dimidiæ, ęquale quadrato, quod fit ex dimidia, & quadrata.

Propoſ. 7. Theor. 7.

Si recta linea ſecetur vtcumque, quod à tota, quodque ab vna partium fit, vtraque quadrata æqualia ſunt ei, quod à tota, & dicta parte fit rectãgulo, vna cum alterius partis quadrato.

Propoſ. 8. Theor. 8.

Si recta linea ſecetur vtcumque, rectangulum quater tota, & vna parte contentum, cum quadrato alterius partis, æquale eſt quadrato à tota, & dicta parte, tanquam vna linea deſcripto.

Propoſ. 9. Theor. 9.

Si recta linea ſecetur in æqualia, & non æqualia, quadrata partium inęqualium dupla ſunt & eius quod fit à dimidia, & eius quod fit à linea, quæ inter ſectiones intercipitur quadrati.

Propoſ. 10. Theor. 10.

Si recta linea biſecetur, eique in rectum quædam alia adijciatur; quæ à tota cum adiecta, & ab adiecta fiunt quadrata, dupla erunt quadratorum, quæ fiunt à dimidia, & a compoſita ex dimidia, & adiecta.

Propoſ. 12. Theor. 11.

In triangulis obtuſangulis quadratum quod fit à latere angulum obtuſum ſubtendente, maius eſt quadratis laterum obtuſum continentium rectangulo bis cõtento, & ab vno latere obtuſum continente, in quod productum perpendicularis cadit, & à linea exterius aſſumpta à perpendiculari ad angulum obtuſum.

Propoſ. 13. Theor. 12.

In acutangulis triangulis quadratum lateris acutum angulum ſubtendentis minus eſt quadratis acutum continen-

tibus

tibus rectangulo bis contento, & ab vno latere acutum continente, in quod perpendicularis cadit, & à linea à perpendiculari intus aſſumpta ad angulū acutum.

LIBER III.

Propoſ. 2. Theor. 1.

Si in circuli peripheria duo puncta accipiantur, recta illa coniūgens intrà circulum cadit.

Propoſ. 3. Theor. 2.

Si in circulo recta quædam linea per cētrum ducta rectam non per centrum ductam biſecet, & ad angulos rectos ipſam ſecabit: & ſi ad angulos rectos ipſam ſecet, bifariam quoq; ſecabit.

Propoſ. 4. Theor. 3.

Si in circulo duæ rectæ lineæ ſe mutuò ſecent non per centrum ductæ, ſe bifariam non ſecabunt.

Propoſ. 5. Theor. 4.

Si duo circuli ſe inuicem ſecuerint, non erit ipſorum idem centrum.

Propoſ. 6. Theor. 5.

Si duo circuli interius ſe contingant, nō erit illorum idem centrum.

Propoſ. 7. Theor. 6.

Si in diametro circuli accipiatur punctum, quod centrum non ſit, ab eoq; in circulum cadant rectæ quædā, maxima erit in qua eſt centrum, minima reliqua, aliarum verò propinquior ei, quæ per centrum tranſit remotiore ſemper maior eſt. Duæ autem tātum æquales à puncto in circulum cadent ad vtraſque partes ipſius minimæ.

Propoſ. 8. Theor. 7.

Si extra circulum accipiatur punctum, ab eoque ad circulum ducantur rectæ quædam lineæ, quarum vna per centrum tranſeat, reliquæ vtlibet; earum quidem, quæ in cauam peripheriam cadunt, maxima eſt quæ eſt per centrum: aliarum verò propinquior ei, quæ per centrum, remotiore ſemper maior eſt. At earum, quæ in conuexā peripheriam cadunt, minima eſt quæ inter punctum, & diametrum interijcitur; aliarum verò, quæ proquior minimæ ſemper remotiore minor eſt. Duæ autem tantum æquales à puncto in circulum cadunt ad vtraſque partes minimæ.

Propoſ. 9. Theor. 8.

Si intra circulum accipiatur punctum, ab eoque ad circulum plures quàm duæ æquales rectæ cadant, erit acceptum punctum centrum circuli.

Propoſ. 10. Theor. 9.

Circulus circulū in pluribus, quam duobus punctis, non ſecat.

Propoſ. 11. Theor. 10.

Si duo circuli ſe interius contingant, recta linea eorū cētra coniungens, ſi producatur, cadet in contactum circulorū.

Propoſ. 12. Theor. 11.

Si duo circuli ſeſe exterius contingant, recta ipſorum centra coniungens per contactum tranſibit.

Propoſ. 13. Theor. 12.

Circulus circulum in pluribus punctis vno non tangit, ſiue interius, ſiue exterius tangat.

Propoſ. 14. Theor. 13.

In circulo æquales rectæ lineæ æqualiter à centro diſtant. Et quæ æqualiter à centro diſtant, æquales ſunt.

Propoſ. 15. Theor. 14.

In circulo maxima eſt diametrus: aliarū verò ſemper quę propinquior eſt centro remotiore maior eſt.

Propoſ. 16. Theor. 15.

Quæ diametro ad angulos rectos ab extremitate ducitur, extra circulum cadit. Et in locum, qui inter rectam lineam, & peripheriam interijcitur, alia recta non cadit. Et ſemicirculi angulus omni acuto rectilineo maior eſt, reliquus autem minor.

Propoſ. 18. Theor. 16.

Si circulum tangat linea quędā recta, à centro autem ad tactum recta ducatur, erit illa ad tangentem perpendicularis.

Propoſ. 19. Theor. 17.
Si recta linea circulum tangat, & à tactu tangenti recta quędam ad angulos rectos ducatur, erit in illa centrum circuli.

Propoſ. 20. Theor. 18.
In circulo angulus ad cētrum duplus eſt anguli ad peripheriam, quando eandem peripheriam pro baſi habent.

Propoſ. 21. Theor. 19.
In circulo qui in eadem portione ſunt anguli æquales ſunt.

Propoſ. 22. Theor. 20.
Quadrilaterorum in circulo deſcriptorum anguli qui ex aduerſo, duobus rectis æquales ſunt.

Propoſ. 23. Theor. 21.
Super eadem recta linea duæ circulorū portiones ſimiles, & inæquales ad eaſdem partes non conſtituentur.

Propoſ. 24. Theor. 22.
Super inæqualibus rectis lineis ſimiles circulorum portiones æquales ſunt.

Propoſ. 26 Theor. 23.
In æqualibus circulis æquales anguli æqualibus peripherijs inſiſtunt, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias inſiſtant.

Propoſ. 28. Theor. 25.
In æqualibus circulis ęquales rectæ lineę æquales peripherias auferunt, maiorē quidem maiori, minorem autem minori.

Propoſ. 29. Theor. 26.
In æqualibus circulis æquales peripherias ęquales rectæ lineę ſubtendunt.

Propoſ. 31. Theor. 27.
In circulo angulus, qui in ſemicirculo rectus eſt; qui in portione maiore minori, qui in minore maior recto eſt. Inſuper maioris portionis angulus maior recto; minoris recto minor eſt.

Propoſ. 32. Theor. 28.
Si circulum quædam recta tetigerit, & à tactu ducatur recta circulum ſecans, erunt anguli, quos ad tangentem facit, æquales illis, qui in alternis circuli portionibus conſiſtunt.

Propoſ. 35. Theor. 29.
Si in circulo duę rectę ſe inuicem ſecēt, erit rectangulum portionibus vnius contentum æquale portionibus alterius contento.

Propoſ. 36. Theor. 30.
Si extra circulum punctum ſumatur, ab eoq; in circulum duæ rectæ lineæ cadant, quarum vna circulum ſecet, altera tangat, rectangulum tota ſecante, & ea parte, quæ inter punctum, & curuam peripheriam eſt, erit æquale tangentis quadrato.

Propoſ. 37. Theor. 31.
Si extra circulum punctum ſumatur, ab eoque in circulum duæ rectæ cadant, quarum vna circulum ſecet; altera incidat, ſit autem quod tota ſecante, & ea parte, quæ inter punctum, & curuā peripheriam eſt, continetur rectangulum, æquale quadraro quod fit ab incidente, tanget incideus circulum.

LIBER V.

Propoſ. 1. Theor. 1.
Si fuerint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, æqualium numero, ſingulæ ſingularū æquè multiplices, quotuplex eſt vna magnitudo vnius totuplices ſunt omnes omnium.

Propoſ. 2. Theor. 2.
Si prima ſecundę æquè multiplex fuerit, atque tertia quartæ, fuerit autem & quinta ſecundæ æquè multiplex, atque ſexta quartæ; erit & compoſita, ex prima, & quinta æquè multiplex ſecundæ, atque tertia, & ſexta quartæ.

Propoſ. 3. Theor. 3.
Si prima ſecundæ æquè fuerit multiplex, atq; tertia quartæ; ſumantur autem æquè multiplices primæ, & tertiæ; erit ex æquali ſumptarum vtraque vtriuſque æquè multiplex, altera quidem ſecundæ, altera autem quartæ.

Propoſ. 4. Theor. 4.
Si prima ad ſecundam eandem habuerit proportionem, quàm tertia ad quartā; ha-

habebunt & æquè multiplices primę, & tertiæ ad æquè multiplices ſecundę. & quartæ ſecundum quamuis multiplicationem eandem proportionem, ſi, vt inter ſe reſpondent, ſumptæ fuerint.

Propoſ. 5. Theor. 5.

Si magnitudo magnitudinis ęquè multiplex fuerit, atque ablata, ablatę; & reliqua reliquę ęquè multiplex erit, atque tota totius.

Propoſ. 6. Theor. 6.

Si duę magnitudines duarũ magnitudinũ æque multiplices fuerint, & ablatæ quædam ſint earundem ęquè multiplices, erunt reliquę eiſdem aut ęquales, aut ęquè multiplices.

Propoſ. 7. Theor. 7.

Æquales ad eandem eandem habent proportionem, & eadem ad ęquales.

Propoſ. 8. Theor. 8.

Inęqualium magnitudinum maior ad eãdem maiorem habet proportionem, quam minor; Et eadem ad minorem maiorem habet, quam ad maiorem.

Propoſ. 9. Theor. 9.

Quę ad eandem habent proportionem, ęquales ſunt: Et ad quas eadem eandẽ habet, & illę ſunt ęquales.

Propoſ. 10. Theor. 10.

Ad eandem proportionem habentium, quę maiorem habet maior eſt, ad quã vero eadem maiorem habet minor eſt.

Propoſ. 11. Theor. 11.

Quæ eidem eędem ſunt proportiones, & inter ſe eędem ſunt.

Propoſ. 12. Theor. 12.

Si quotcunque magnitudines proportionales fuerint, erit vt vna antecedentiũ ad vnam conſequentiũ, ita omnes antecedentes ad omnes conſequentes.

Propoſ. 13. Theor. 13.

Si prima ad ſecundam eãdem proportionem habuerit, quam tertia ad quartã; tertia verò ad quartam maiorem habuerit, quam quinta ad ſextam; habebit & prima ad ſecundam maiorem, quam quinta ad ſextam.

Propoſ. 14. Theor. 14.

Si prima ad ſecundam eandem habuerit proportionem, quam tertia ad quartam; prima autem quam tertia maior fuerit, erit & ſecunda quam quarta maior, & ſi æqualis, æqualis, ſi minor, minor.

Propoſ. 15. Theor. 15.

Partes cum pariter multiplicibus eandem habent proportionem; ſi vt ſibi mutuo reſpondent ſumantur.

Propoſ. 16 Theor. 16.

Si quattuor magnitudines proportionales fuerint, & permutatæ proportionales erunt.

Propoſ. 17 Theor. 17.

Si compoſitæ magnitudines proportionales fuerint, & diuiſæ proportionales erunt.

Propoſ. 18. Theor. 18.

Si diuiſæ magnitudines proportionales fuerint, & compoſitæ proportionales erunt.

Propoſ. 19. Theor. 19.

Si fuerit vt tota ad totam, ita ablata ad ablatam; & reliqua ad reliquam erit, vt tota ad totam.

Propoſ. 20. Theor. 20.

Si fuerint tres magnitudines, & aliæ illis numero æquales, quæ binæ, & in eadem ratione ſumantur, ex æquali autẽ prima quam tertia maior fuerit, erit & quarta, quam ſexta maior, & ſi æqualis, æqualis, ſi minor, minor.

Propoſ. 21. Theor. 21.

Si fuerint tres magnitudines, & aliæ ipſis numero ęquales quę binę, & in eadem proportione ſumantur, fuerit autẽ earum perturbata proportio, & ex ęquali prima maior fuerit quã tertia, & quarta quam ſexta maior erit, & ſi ęqualis, ęqualis, & ſi minor, minor.

Propoſ. 22. Theor. 22.

Si fuerint quotcunque magnitudines, & alię ipſis numero æquales, quę binę, & in eadem proportione ſumantur, & ex ęquali in eadem proportione erunt.

Propoſ.23. Theor. 23.

Si fuerint tres magnitudines,& aliæ ipſis ęquales numero,quę binę,& in eadem proportione ſumantur, fueritq; earum perturbata proportio, & ex ęquali in eadem portione erunt.

Propoſ.24. Theor. 24.

Si prima ad ſecundam eandem habuerit proportionem, quam tertia ad quartã, habeat autem & quinta ad ſecundam eandem, quam ſexta ad quartam; habebit & compoſita ex prima, & quinta ad ſecundam eandem proportionẽ, quam tertia, & ſexta ad quartam.

Propoſ.25. Theor. 25.

Si quattuor magnitudines proportionales fuerint, maxima, & minima duabus reliquis maiores erunt.

Propoſ. 26 Theor. 26.

Si prima ad ſecundam maiorem habuerit proportionem, quã tertia ad quartam, habebit conuertendo ſecunda ad primam minorem,quam quarta ad tertiam.

Propoſ. 27.Theor. 27.

Si prima ad ſecundam maiorem habuerit proportionem, quã tertia ad quartam; habebit permutando prima ad tertiam maiorem, quam ſecundam ad quartam.

Propoſ.28. Theor. 28.

Si prima ad ſecundam maiorem proportionem habeat,quam tertia ad quartã, etiam componendo prima, & ſecunda ad ſecundam maiorem proportionem habebunt, quam tertia, & quarta ad quartam.

Propoſ.29. Theor. 29.

Si prima,& ſecunda ad ſecundam maiorem habeat proportionem, quam tertia,& quarta ad quartam, habebit, & diuidendo prima ad ſecundam maiorem proportionem, quam tertia ad quartam.

Propoſ.30. Theor.30.

Si prima, & ſecunda ad ſecundam maiorem proportionem habeat, quam tertia, & quarta ad quartam; per conuerſionem rationis prima, & ſecunda ad primam minorem habebit, quam tertia, & quarta ad tertiam.

Propoſ. 31. Theor. 31.

Si prima ad tertiam maiorem proportionem habeat;quam ſecunda ad quartã; habebit etiam prima ad tertiam maiorem, quam prima, & ſecunda ad tertiam, & quartam.

Propoſ. 32.Theor. 32.

Si tota ad totam maiorem habuerit proportionem, quam ablata ad ablatam; habebit, & reliqua ad reliquam maiorem,quam tota ad totam.

Propoſ. 33.Theor. 33.

Si ſint tres magnitudines,& aliæ ipſis numero æquales, habeatque prima priorum ad ſecundam maiorem proportionem, quam prima poſteriorum ad ſecundam, ſecunda verò priorum ad tertiam maiorem habeat quam ſecunda poſteriorum ad tertiam,etiam ex æquali prima priorum ad tertiam maiorem habebit,quam prima poſteriorum ad tertiam.

LIBER VI.

Propoſ. 1. Theor. 1.

Triangula, & parallelogramma eandem habentia altitudinem, inter ſe ſunt vt baſes.

Propoſ. 2. Theor. 2.

Si vni laterũ trianguli parallela recta ducta fuerit, proportionaliter ſecabit trianguli latera. Et ſi trianguli latera proportionaliter ſecta fuerint, recta ſectiones coniungẽs reliquo lateri parallela erit

Propoſ. 3. Theor. 3.

Si trianguli angulus biſecetur, rectaque angulum ſecans, ſecet & baſim, habebunt baſis partes eãdem proportionem,quam reliqua trianguli latera. Et ſi baſis partes eãdem habeant proportionem, quam reliqua trianguli latera,

quæ

quę à vertice ad baſim ducitur recta linea trianguli angulum biſecabit.

Propoſ.4.Theor.4.

Æquiangulorum triangulorum latera circa æquales angulos proportionalia ſunt; & latera æqualibus angulis ſubtenſa homologa, ſiue eiuſdē rationis.

Propoſ.5.Theor.5.

Si duo triangula latera proportionalia habuerint, æquiangula erunt, habebuntq; angulos, quibus homologa latera ſubtenduntur, æquales.

Propoſ.6 Theor.6.

Si Duo triangula vnum angulum vni æqualem,& circa æquales angulos latera proportionalia habuerint, æquiangula erunt, habebuntq; angulos, quos homologa latera ſubtendunt,æquales.

Prropoſ.7.Theor.7.

Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, & circa alios angulos latera proportionalia habuerint, reliquorum vero vtrunque aut minorem, aut non minorem recto, æquiangula erunt triangula, & angulos,circa quos latera ſunt proportionalia, æquales habebunt.

Propoſ.8.Theor.8.

In rectangulo triangulo ſi ab angulis recto ad baſim perpendicularis ducatur, quæ ad perpendicularem ſunt triangula, & toti, & inter ſe ſimila ſunt.

Propoſitio 14.Theor.9.

Æqualium, & vnum vni angulo æqualem habentium parallelogrammorum reciproca ſunt latera, quæ circa æquales angulos. Et parallelogramma, quæ vnum vni angulum æqualem habent, & quorum reciprocantur latera circa æquales angulos, æqualia ſunt.

Propoſ. 15.Theor. 10.

Æqualium triangulorum, & vnum angulum vni æqualem habentium, reciproca ſunt latera, quæ circa æquales angulos. Et rriangula, quæ vnum angulum vni æqualem habent, & quorum latera,quæ circa æquales angulos, reciprocantur, ſunt æqualia.

Propoſ. 16.Theor. 11.

Si quattuor rectę lineę proportionales fuerint, erit quod extremis continetur rectangulum, ęquale illi quod medijs continetur rectangulo. Et ſi rectangulum extremis contentum æquale fuerit medijs contento rectangulo, quattuor illæ lineę proportionales erunt.

Propoſ.17. Theor 12.

Si tres rectę lineę proportionales fuerint erit quod extremis continetur rectangulum, æquale quadrato, quod fit à media. Et ſi quod extremis continetur rectangulum æquale fuerit quadrato quod à media fit, erunt tres lineę illæ proportionales.

Propoſ.19.Theor. 13.

Similia triangula inter ſe ſunt in dupla proportione ſuorum laterum.

Propoſ.20. Theor. 14.

Similia polygona in ſimilia triangula diuiduntur, & numero æqualia, & homologa totis; & polygonum duplam habet proportionem eius, quam habet latus homologum ad latus homologum.

Propoſ.21 Theor. 15.

Quę eidē rectilineo ſunt ſimilia, & inter ſe ſunt ſimilia.

Propoſ.22.Theor. 16.

Si quattuor rectæ lineæ proportionales fuerint, erunt & rectilinea ab ipſis ſimilia, ſimiliterq; deſcripta proportionalia: Et ſi rectilinea ſimilia ſimiliterque ab ipſis deſcripta proportionalia fuerint, erunt, & ipſæ proporrionales.

Propoſ.23.Theor. 17.

Æquiangula parallelogramma inter ſe proportionem habent ex lateribus cōpoſitam.

Propoſ.24.Theor. 18.

Omnis parallalogrammi quæ circa diametrum ſunt parallelogramma ſimilia ſunt toti, & inter ſe.

Propoſ.26.Theor. 19.

Si à parallelogrammo parallelogrāmum auferatur ſimile toti,ſimiliterque poſitum, communem ipſi habens angulū,

circa

circa eandem diametrum eſt toti.

Propoſ.27. Theor. 20.

Omnium parallelogrammorum ad eandem rectam lineam applicatorum, & deficientium figuris parallelogrammis ſimilibus, ſimiliter poſitis ei, quæ à dimidia deſcribitur, maximum eſt quod ad dimidiam eſt applicatum, ſimile exiſtens defectui.

Propoſ.31. Theor. 21.

In triangulis rectangulis figura quę fit à latere rectum ſubtendente æqualis eſt figuris, quę fiunt à lateribus rectum continentibus, ſimilibus, ſimiliterque deſcriptis.

Propoſ.32. Theor. 22.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus proportionalia habentia, ad vnũ angulum componantur, ita vt latera homologa ſint parallela, reliqua latera in directum erunt conſtituta.

Propoſ.33. Theor. 33.

In ęqualibus circulis anguli eandem proportionem habent, quam peripherię, quibus inſiſtunt, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias conſtituti inſiſtant. Quin, & ſectores, quippe ad centra conſtituti.

E LIBRO XI. ELEMEN.

Theor. 3. Propoſ. 3.

Si duo plana ſe inuicem ſecent, communis ipſorum ſectio recta linea erit.

Theor. 4. Propoſ. 4.

Si recta linea duabus rectis lineis ſe inuicem ſecantibus, in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat, etiam ducto per ipſas plano ad rectos angulos erit.

E LIBRO XII. ELEMEN.

Theor. 7. Propoſ. 7.

Omne priſma triangularem baſim habens diuiditur in tres pyramides ęquales inter ſe, quæ triangulares baſes habent.

Corollarium.

Ex hoc manifeſtum eſt omnem pyramidem tertiam partem eſſe priſmatis baſim habentis eandem, & altitudinem æqualem: quoniam etiam ſi baſis priſmatis aliam quandam figuram rectilineam obtineat, & oppoſitam ipſi eandem, diuiditur in priſmata, quæ triangulares baſes habent, & quæ ipſis opponuntur.

Theoremata de ſolidis pro libris vulgatis elementaribus habes in hoc Ærario etiam vltraelementaria, & de curuis ſuperficiebus circa ſolida, præſertim rotunda, facilius, & vniuerſalius demonſtrata, & vſibus in omni ſcientiarum, & artium genere applicata in Breuiario Stereometrico, in tertij Tomi parte ſecunda.

INDEX XX

Problematum elementariorum.

IN TOMO II, & III.

LIBER II.

Propoſ. 11. *Probl.* 1.

DAtam rectam ſecare; vt quod tota, & vna parte continetur rectangulum, æquale ſit quadrato quod fit ex reliqua parte.

Propoſ. 14. *Probl.* 2.

Dato rectilineo ęquale quadratū conſtituere.

LIBER III.

Propoſ. 1. *Probl.* 1.

Dati circuli centrum inuenire.

Propoſ. 17. *Probl.* 2.

A dato puncto rectam lineam ducere, quę datum circulum tangat.

Propoſ. 25. *Probl.* 3.

Data portione circuli, deſcribere circulum, cuius eſt portio.

Propoſ. 30. *Probl.* 4.

Datam peripheriam bifariam ſecare.

Propoſ. 33. *Probl.* 5.

Super data recta deſcribere portionem circuli, quę capiat angulum æqualem dato angulo rectilineo.

Propoſ 34. *Probl.* 6.

A dato circulo portionem auferre, quæ capiat angulum æqualem dato angulo rectilineo

LIBER IIII.

Propoſ. 1. *Probl.* 1.

In dato circulo, datæ rectæ lineę, quę diametro circuli maior non ſit, æqualem rectam lineam aptare.

Propoſ. 2. *Probl.* 2.

Dato circulo triangulum dato triangulo æquiangulum inſcribere.

Propoſ. 3. *Probl.* 3.

Circa datum circulum dato triangulo ęquiangulum triangulum deſcribere.

Propoſ. 4. *Probl.* 4.

In dato triangulo circulum deſcribere.

Propoſ. 5. *Probl.* 5.

Circa datum triangulum circulum deſcribere.

Propoſ. 6. *Probl.* 6.

In dato circulo quadratum deſcribere.

Propoſ. 7. *Probl.* 7.

Circa datum circulum quadratum deſcribere.

Propoſ. 8. *Probl.* 8.

In dato quadrato circulum deſcribere.

Propoſ. 9. *Probl.* 9.

Circa datum quadratum circulum deſcribere.

Prodoſ. 10. *Probl.* 10.

Triangulū iſoſceles conſtituere, habens vtrumq; qui ad baſim, angulum duplum reliqui.

Propoſ. 11. *Probl.* 11.

Dato circulo pētagonum æquilaterum, & ęquiangulum inſcribere.

Propoſ. 12. *Probl.* 12.

Circa datum circulum pentagonum ęquilaterum, & æquiangulum deſcribere.

Propoſ. 13. *Probl.* 13.

Dato pentagono ęquilatero, & ęquiangulo circulum inſcribere.

Propoſ. 14. *Probl.* 14.

Circa datum pentagonum æquilaterū, &

& æquiangulum circulum deſcribere.

Propoſ. 15. Probl. 15.

In dato circulo hexagonum æquilaterũ, & ęquiangulum deſcribere.

Propoſ. 16. Probl. 16.

In dato circulo quindecagonum ęquilaterum, & ęquiangulum deſcribere.

LIBER VI.

Propoſ. 9. Probl. 1.

A data recta linea imperatam partem auferre.

Propoſ. 10. Probl. 2.

Datam rectam lineam inſectam datæ rectę ſectæ ſimiliter ſecare.

Propoſ. 11. Probl. 3.

Duabus rectis datis tertiam proportionalem inuenire.

Propoſ. 12. Probl. 4.

Tribus datis rectis lineis quartam proportionem inuenire.

Propoſ. 13. Probl. 5.

Duabus rectis datis mediam proportionalem inuenire.

Propoſ. 18. Probl. 6.

Super data recta linea dato rectilineo ſimile, ſimiliterq; poſitum rectilineum deſcribere.

Propoſ. 25. Probl 7.

Dato rectilineo ſimile, & alteri dato æquale conſtituere.

Propoſ. 28. Probl. 8.

Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare deficiens figura parallelogramma, quæ ſit ſimilis alteri datæ. Oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum eſt, maius non eſſe eo, quod ad dimidiam applicatur; ſimilibus exiſtentibus defectibus; & eo quod à dimidia, & eo, cui oportet ſimile deficere.

Propoſ. 29. Probl, 9.

Ad datam rectam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedẽs figura parallelogramma, ſimili alteri datæ.

Propoſ. 30. Probl. 10.

Datam rectam lineam terminatam extrema, ac media ratione ſecare.

Finis Indicis 20, & vltimi.

Problemata de ſolidis etiam vltraelementaria, & de curuis ſuperficiebus circa ſolida præſertim rotunda habes in hoc Ærario nouo, & facillimo modo demonſtrata, & ad multiplices vſus traducta in Breuiarij noſtri Stereomet. ſectione ſecunda, in 2 parte tertij Tomi.

MONITVM.

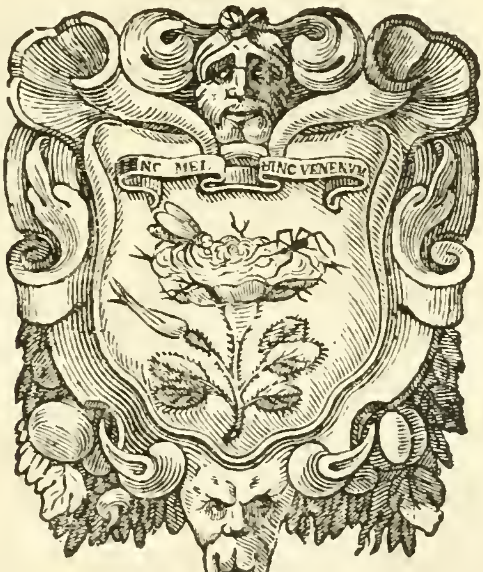
Quoniam in hoc Ærario ſæpiſsimè citatur quarta Editio Apiariorum cum analectis, ſciat Amicus Lector eam editionem extare etiam Venetijs cum aliquot exemplaribus apud Combium bibliopolam.

Re-

REGISTRVM
Tertij Tomi Aerarij. &c.

⁘ ✠ ✠ ✠ ††† A B C D E F G H I K L M N O P Q R S T V X Y Z
Aa Bb Cc Dd Ee Ff Gg Hh Ii Kk Ll Mm Nn Oo Pp Qq Rr Ss Tt Vu Xx
Yy Zz
Aaa Bbb Ccc Ddd Eee Fff Ggg Hhh Iii
A B C D E F G H I K L M N O P
† A B C D E F G ¶ h i kk ll mm nn oo pp

Omnes ſunt duerniones, præter ✠✠ Ee P †G, & Pp, quæ ſunt terniones, & ⁘ YY, & D, quæ ſunt ſemifol.



BONONIÆ M.DC.XLVIII.
Ex Typographia Io. Baptiſtæ Ferronij. Superiorum permiſſu.

135.1 - 48-1